

МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 15



Ярославль 2020

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Ярославский государственный технический университет»

**МАТЕМАТИКА
И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 15

Ярославль
Издательство ЯГТУ
2020

УДК 51:378
ББК 22.1
М34

М34 Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 15. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2020. – 248 с.

ISBN 978-5-9914-0840-0

В сборнике представлены научные статьи по актуальным вопросам математики, физики, информатики и методике их преподавания, а также математического моделирования технических, химических и технологических процессов и систем.

УДК 51:378
ББК 22.1

Редакционная коллегия: А. Н. Жаров (председатель), А. В. Бородин, Д. О. Бытев, И. М. Каневский, Ю. К. Оленикова, В. Ш. Ройтенберг.

Рецензенты: кафедра автоматизированных систем управления Ярославского высшего военного училища противовоздушной обороны; Д.Ф. Белоножко, д-р физ.-мат. наук, профессор Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

ISBN 978-5-9914-0840-0

© Ярославский государственный
технический университет, 2020

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

УДК 517.977.8:519.832.2

С. А. Ананьина, В. В. Абрамов

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: sofya.ananyina@yandex.ru, v.abramov@rsu.edu.ru

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ ФУНКЦИИ ВЫИГРЫША В ОДНОЙ АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЕ

Установлены условия существования единственности решения дифференциальной игры с квадратичной функцией выигрыша.

Ключевые слова: модель, теория игр, дифференциальная игра, функция выигрыша, седловая точка, квадратичная форма.

S. A. Ananyina, V. V. Abramov

S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: sofya.ananyina@yandex.ru, v.abramov@rsu.edu.ru

ON THE EXISTENCE OF SADDLE POINT WIN FUNCTIONS IN ONE ZERO-SUM GAME

The conditions of existence of uniqueness of the solution of differential game with quadratic function of a prize are established.

Keywords: model, game theory, differential game, gain function, saddle value, quadratic form.

Рассмотрим систему n дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) + B_1(t)u + B_2(t)w, \quad (1)$$

в которой матрицы $A(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$ и вектор-функция $f(t)$ непрерывны на заданном промежутке $[0, T]$, $u \in U \subset \mathbb{R}^p$ и $w \in W \subset \mathbb{R}^q$ – управляющие параметры. Будем предполагать, что для системы (1) представляет интерес решение $x = x(t)$ с начальным значением $x(0) = 0_n$ (если $x(0) = x_0 \neq 0_n$, то в системе (1) вместо вектор-функции $f(t)$ следует вы-

брать $f(t) + A(t)x_0$). В качестве критерия качества, характеризующего решение $x = x(t)$ на промежутке $[0, T]$, рассмотрим функцию

$$M(u, w) = \int_0^T x^T H(t) x dt, \quad (2)$$

где $H(t)$ – симметрическая матрица.

Задача: решить антагонистическую игру двух лиц, в которой: $u \in U$ – чистая стратегия игрока 1, стремящегося максимизировать выигрыш; $w \in W$ – чистая стратегия игрока 2, стремящегося минимизировать выигрыш; $M(u, w)$ – функция выигрыша игрока 1, оба игрока придерживаются позиции крайней осторожности.

Функция $M(u, w)$ в равенстве (2) – квадратичная. Если множества допустимых стратегий имеют вид $U = \{u \in \mathbb{R}^p: u = su_0, s \in [s_1, s_2]\}$, $W = \{w \in \mathbb{R}^q: w = hw_0, h \in [h_1, h_2]\}$, то функция выигрыша зависит от вещественных переменных s, h . Вопрос о вычислении седловой точки квадратичной функции двух вещественных переменных на единичном квадрате решался в работах [1, 2]. Заметим также, что поставленная задача имеет значение с точки зрения экономико-математического моделирования [3-5].

Для вычисления функции (2) найдем по принципу суперпозиции решение системы (1):

$$x(t) = x_0(t) + X_1(t)u + X_2(t)w, \quad x(0) = 0_n, \quad (3)$$

$$\text{где } x_0(t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, \quad X_1(t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) B_1(\tau) d\tau,$$

$$X_2(t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) B_2(\tau) d\tau; \quad X(t) \text{ – фундаментальная матрица системы}$$

$\dot{x} = A(t)x, \quad X(0) = E$. Подставив решение (3) в равенство (2), получим

$$M(u, w) = \int_0^T (x_0(t) + X_1(t)u + X_2(t)w)^T H(t) (x_0(t) + X_1(t)u + X_2(t)w) dt.$$

Используем свойства скалярного произведения. Обозначим:

$$c_1 = \int_0^T x_0^T(t) H(t) x_0(t) dt, \quad c_2 = \int_0^T x_0^T(t) H(t) X_1(t) dt, \quad c_3 = \int_0^T x_0^T(t) H(t) X_2(t) dt,$$

$$c_4 = \int_0^T X_1^T(t) H(t) X_2(t) dt, \quad c_5 = \int_0^T X_1^T(t) H(t) X_1(t) dt, \quad c_6 = \int_0^T X_2^T(t) H(t) X_2(t) dt.$$

Итак, функция $M(u, w)$ имеет вид

$$M(u, w) = c_1 + 2c_2u + 2c_3w + 2u^T c_4w + u^T c_5u + w^T c_6w. \quad (4)$$

В силу необходимого условия экстремума седловая точка функции (4) удовлетворяет линейной системе относительно переменных u и w :

$$\begin{cases} \text{grad}_u M = 2c_2 + 2(c_4w)^T + u^T c_5 + (c_5u)^T = 0_p, \\ \text{grad}_w M = 2c_3 + 2u^T c_4 + w^T c_6 + (c_6w)^T = 0_q. \end{cases} \quad (5)$$

Транспонируем равенства (5). Так как матрицы c_5 и c_6 являются симметрическими, то в матричной форме система (5) имеет вид

$$C \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = \bar{c}, \quad C = \begin{pmatrix} c_4 & c_5 \\ c_6 & c_4^T \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = - \begin{pmatrix} c_2^T \\ c_3^T \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Допустим, выполняются условия

$$c_5 < 0, \quad c_6 > 0, \quad (7)$$

в которых знак матрицы определяется по критерию Сильвестра и совпадает со знаком квадратичной формы, которую она определяет. Так как $M''_{uu} = c_5$, $M''_{ww} = c_6$ при любых значениях переменных, то при условии (7) функция (4) является строго вогнутой по переменной u и строго выпуклой по переменной w . Тогда функция (4) без учета ограничений на стратегии u , w имеет единственную седловую точку, определяемую системой (6).

Если условия (7) не выполняются, то без учета ограничений на стратегии u , w функция (4) не имеет седловой точки. Тогда при наличии ограничений $u \in U$, $w \in W$, по крайней мере, одна из оптимальных стратегий принадлежит границе допустимого множества. В игровом плане это означает, что хотя бы один из игроков действует по самому тривиальному принципу. В частности, для скалярных стратегий это означает либо минимальную, либо максимальную интенсивность участия игрока. Поэтому далее рассмотрим вопрос об условиях наличия единственной седловой точки функции (4), необходимых для наличия нетривиального решения игры.

Пусть в системе (1) матрица A постоянная. Выполним в (1) подстановку $x = Vy$, в которой столбцы матрицы V состоят из попарно ортогональных нормированных собственных векторов матрицы A . Получим линейную систему вида, аналогичного (1): $\dot{y} = \tilde{A}y + \tilde{f} + \tilde{B}_1u + \tilde{B}_2w$, где $\tilde{A} = V^T A V$ – жорданова нормальная форма матрицы A , $\tilde{f} = V^T f$, $B_1 = V^T B_1$, $B_2 = V^T B_2$. Таким образом, без ограничения общности можем

рассматривать систему (1), в которой матрица A имеет жорданову нормальную форму.

Далее рассмотрим автономную систему второго порядка вида (1)

$$\dot{x} = Ax + f + B_1u + B_2w, \quad (8)$$

в которой $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq 0$, $B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{R}$. Будем предполагать, что в равенстве (2) матрица $H(t) = (h_{ik})$ постоянная.

Вопрос о выполнении условий (7), обеспечивающих существование единственной седловой точки функции (4), сведем к вопросу о существовании коэффициентов b_{ik} , $i, k = 1, 2$. Заметим, что величину b_{ik} можно рассматривать в качестве интенсивности воздействия игрока k на динамику переменной x_i .

Вычислим для функции $M(u, w)$ коэффициенты c_5, c_6 как квадратичные формы векторов интенсивностей B_1, B_2 : $c_6 = B_2^T G B_2$, $c_5 = B_1^T G B_2$. В зависимости от собственных значений $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ матрицы A коэффициенты матрицы $G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ имеют вид:

$$\alpha = \frac{(2\lambda_1 T + 3 - 4e^{(\lambda_1 T)} + e^{(2\lambda_1 T)})h_{11}}{4\lambda_1^3},$$

$$\beta = \begin{cases} \frac{h_{12}(\lambda_1 \lambda_2 ((1 - e^{T\lambda_1})(1 - e^{\lambda_2 T})) + \lambda_1^2(1 - e^{\lambda_1 T}) + \lambda_2^2(1 - e^{\lambda_2 T}))}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2 (\lambda_1 + \lambda_2)}, & \lambda_2 \neq -\lambda_1, \lambda_1 \lambda_2 \neq 0; \\ \frac{h_{12}(e^{T\lambda_1} - 1)^2 e^{-T\lambda_1}}{\lambda_1^3}, & \lambda_2 = -\lambda_1, \lambda_1 \lambda_2 \neq 0; \\ \frac{h_{12}(2(\lambda_1 T - 1)e^{T\lambda_1} + 2 - T^2 \lambda_1^2)}{2\lambda_1^3}, & \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} (2\lambda_2 T + 3 - 4e^{\lambda_2 T} + e^{2\lambda_2 T})h_{22} / (4\lambda_2^3), & \lambda_2 \neq -\lambda_1, \lambda_1 \lambda_2 \neq 0; \\ (2\lambda_1 T - 3 + 4e^{-\lambda_1 T} - e^{-2\lambda_1 T})h_{22} / (4\lambda_1^3), & \lambda_2 = -\lambda_1, \lambda_1 \lambda_2 \neq 0; \\ \alpha, & \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \end{cases}$$

Если матрица G определяет знакопеременную форму, то существуют такие векторы B_1, B_2 , при которых выполняются условия (7).

Вывод. Функция вида (2) с постоянной матрицей $H(t)$, заданная на решении $x = x(t)$, $x(0) = 0_2$, системы (8), имеет единственную седловую точку, если: 1) $\alpha\gamma - \beta^2 < 0$, 2) векторы B_1, B_2 выбраны согласно условиям $c_6 = B_2^T G B_2 > 0$, $c_5 = B_1^T G B_2 < 0$.

Пример. Пусть дана система вида (8), в которой $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w \in W = [-0.5, 0]$, $u \in U = [1, 1.5]$. Допустим, качество решений оценивается при $t \in [0, 1]$ с помощью функции вида (2), в которой $H(t) = H = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, $b(t) = 0_2$. Вычислим величины $\alpha = 0.84$, $\beta = -0.79$, $\gamma = 2.27$. Получим, что $\alpha\gamma - \beta^2 = -0.43 < 0$. Выберем $B_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix}$. При этом выполняются условия (7). Значит, функция (4) имеет единственную седловую точку $\begin{pmatrix} w_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.06 \\ 1.15 \end{pmatrix}$, определяемую системой вида (6). Так как, $w_0 \in W$, $u_0 \in U$, то величины u_0, w_0 – оптимальные чистые стратегии игроков, $M(u_0, w_0) = -0.74$ – оптимальная чистая цена игры. График функции выигрыша представлен на рис. 1; траектория решения $x = x(t)$, $x(0) = 0_2$, на котором построена функция выигрыша, представлена на рис. 2 (рисунки выполнены в пакете Maple).

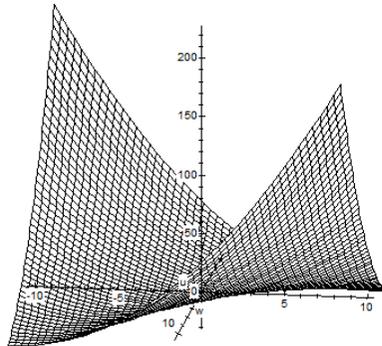


Рис. 1. График функции выигрыша вида (2)

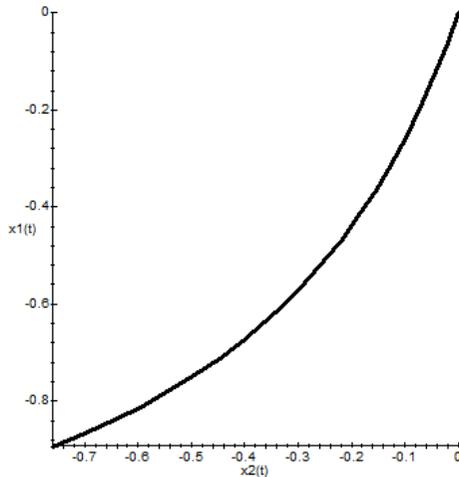


Рис. 2. Траектория решения с нулевым начальным значением системы вида (8) при оптимальных параметрах

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ананьина С.А.* Коэффициентные условия существования седловой точки квадратичной функции на единичном квадрате / С.А. Ананьина, В.В. Абрамов // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: сб. науч. ст. IV науч.-практ. междунар. конф. (школы-семинара) молодых ученых: 23-25 апреля 2018 г. Ч. 1. Тольятти: Издатель Качалин А.В., 2018. С. 164–168.
2. *Ананьина С.А.* Условия разрешимости антагонистической игры на единичном квадрате / С.А. Ананьина, В.В. Абрамов // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 13. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2018. С. 110–115.
3. *Титова Е.В.* Модель оценки объема предложения / Е.В. Титова, В.В. Абрамов // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 12. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. С. 271–276.
4. *Титова Е.В.* Оптимизация распределения объемов сбыта одного продукта / Е.В. Титова, В.В. Абрамов // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2019: сб. тр. междунар. науч.-техн. форума: в 10 т. Т. 7 / под общ. ред. О.В. Миловзорова. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2019.
5. *Титова Е.В.* Принятие решения об оптимизации потока объемов сбыта одного продукта / Е.В. Титова, В.В. Абрамов // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 14. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2019. С. 190–196.

УДК 515.177

М. А. Башкин

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, e-mail: vmat@rsatu.ru

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ СЕМЕЙСТВА КУРАНИСИ

В работе построено семейство Кураниси для тривиального голоморфного векторного расслоения ранга n над комплексным m -мерным тором.

Ключевые слова: семейство Кураниси, векторное расслоение, комплексный тор.

M. A. Bashkin

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University

Russia, Rybinsk, e-mail: vmat@rsatu.ru

ABOUT ONE ANALOGUE OF THE KURANISI FAMILY

In this paper we constructed the Kurani family for a trivial holomorphic vector bundle of rank n over a complex m -dimensional torus.

Keywords: Kurani family, vector bundle, complex torus.

В работе используются сведения о комплексных аналитических супермногообразиях, которые можно найти в [1-3, 6]. Основное поле здесь – это поле комплексных чисел \mathbb{C} . Пусть M – компактное комплексное топологическое пространство, E – голоморфное векторное расслоение на нём. В [5] было показано, что тогда можно построить комплекс (S, \bar{D}) , рассматривать на нём стандартную теорию Ходжа, представляя его как комплекс $(0, *)$ -форм со значениями в суперкасательном расслоении ST . Снабдим M и E гладкими эрмитовыми метриками и рассмотрим соответствующую эрмитову метрику на ST . Обозначим через \bar{D}^* оператор, сопряженный с \bar{D} , и через $\square = [\bar{D}, \bar{D}^*]$ – оператор Бельтрами–Лапласа (см. [5]). Это операторы бистепеней $(0, -1)$ и $(0, 0)$, соответственно. Тогда имеем ортогональное разложение

$$S = \mathbf{H} \oplus \bar{D} S \oplus \bar{D}^* S, \quad (1)$$

где $\mathbf{H} = \text{Ker } \square$ – биградуированное пространство гармонических элементов. Кроме того,

$$\text{id} = H + \square G = H + \overline{D} \overline{D}^* G + \overline{D}^* \overline{D} G,$$

где H – проектирование на \mathbf{H} в (1) и G – оператор Грина. Как известно,

$$\mathbf{H}_{p,q} \cong H^{p,q}(S, \overline{D}) \cong H^q(M, (T_{gr})_p), \quad p, q \geq 0. \quad (2)$$

Перейдем теперь к нелинейному комплексу K . Положим $\mathbf{H}_{(1)} = \bigoplus_{p \geq 1} \mathbf{H}_{2p,1}$,

$L_1 = \text{Ker } \overline{D}^* \cap K^1$, $\mathbf{K} = Z^1(K) \cap L_1$ и определим также подмножество $\mathbf{K}_0 \subset K^1$ уравнением

$$u - \frac{1}{2} \overline{D}^* G[u, u] = Hu. \quad (3)$$

Теорема 1. (А. Л. Онищик [5]) *Имеем $\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_0 \subset L_1$. Отображение $H: \mathbf{K}_0 \rightarrow \mathbf{H}_{(1)}$ биективно, и обратное к нему отображение $\varphi: \mathbf{H}_{(1)} \rightarrow L_1$ полиномиально. При этом H отображает \mathbf{K} на связное алгебраическое подмножество $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}_{(1)} \cong \bigoplus_{p \geq 1} H^1(M, (T_{gr})_{2p})$, заданное уравнением*

$$H[\varphi(h), \varphi(h)] = 0.$$

Естественное отображение $\mathbf{K} \rightarrow H^1(K) \cong H^1(M, \text{Aut}_{(2)} O_{gr})$ сюръективно.

Семейство \mathbf{K} является аналогом семейства Кураниси комплексных структур на компактном многообразии.

Рассмотрим теперь m -мерное комплексное пространство C^m . Пусть Γ – дискретная подгруппа ранга $2m$ в C^m . Тогда многообразие $T = C^m/\Gamma$ называется m -мерным комплексным тором. Заметим, что тор T является компактной комплексной абелевой группой Ли. В окрестности любой точки многообразия T имеется локальная система координат, порожденная стандартными координатами z_1, \dots, z_m в C^m . Будем обозначать эти координаты на T также через z_1, \dots, z_m . Базисные дифференциальные формы dz_1, \dots, dz_m и $\overline{dz}_1, \dots, \overline{dz}_m$ определены на T глобально, так как не меняются при прибавлении к переменной любого комплексного числа. Из двойственности дифференциальных форм и векторных полей следует, что векторные поля $\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_m}$ также определены глобально. Касательное и кокасательное

расслоения над T тривиальны, и $dz_i, \frac{\partial}{\partial z_i}$ ($i = 1, \dots, m$) суть базисные сечения этих векторных расслоений.

Предложение 1. (См. [4]) Пусть M – компактное кэлерово многообразие. Форма $\alpha \in \Gamma(M, \Phi^{0,q})$ является гармонической тогда и только тогда, когда α антиголоморфна, т.е. $\bar{\partial}\alpha = 0$.

Известно, что тор $T = \mathbb{C}^m/\Gamma$ является компактным кэлеровым многообразием с плоской метрикой, индуцированной эрмитовой метрикой на \mathbb{C}^m (см. [4]). Любая форма $\alpha \in \Gamma(T, \Phi^{0,q})$ может быть представлена в виде

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_q}(z, \bar{z}) d\bar{z}_{i_1} \dots d\bar{z}_{i_q}, \quad (4)$$

где $\alpha_{i_1 \dots i_q}(z, \bar{z})$ – гладкие глобально определенные функции, $z = (z_1, \dots, z_m)$, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$. Так как на торе T любая антиголоморфная функция постоянна, то получаем

Предложение 2. Форма $\alpha \in \Gamma(T, \Phi^{0,q})$ является гармонической тогда и только тогда, когда

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_q} d\bar{z}_{i_1} \dots d\bar{z}_{i_q},$$

где $\alpha_{i_1 \dots i_q} \in \mathbb{C}$.

Под T -инвариантной формой будем понимать форму, которая инвариантна относительно действия группы T на себе при помощи сдвигов.

Предложение 3. Пространства гармонических и T -инвариантных $(0, q)$ -форм на T совпадают.

Доказательство. Очевидно, что формы вида $d\bar{z}_{i_1}, \dots, d\bar{z}_{i_q}$ являются T -инвариантными. Это означает, что формы вида (4) T -инвариантны тогда и только тогда, когда $\alpha_{i_1 \dots i_q} \in \mathbb{C}$. Теперь наше утверждение непосредственно следует из предложения 2.

Пусть $\mathbf{E} = T \times \mathbb{C}^n$ – тривиальное голоморфное векторное расслоение ранга n над T , а ξ_1, \dots, ξ_n – стандартный базис слоя \mathbb{C}^n . Обозначим $T^{mn} = (T, O_{\text{gr}})$ – расщепимое супермногообразие, соответствующее расслоению \mathbf{E} . Его структурный пучок O_{gr} имеет вид $F \otimes \Lambda(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Локальные координаты z_1, \dots, z_m на T являются четными, а ξ_1, \dots, ξ_n – нечетными координатами на T^{mn} . Рассмотрим касательный пучок $T_{\text{gr}} = \text{Der}O_{\text{gr}}$. Этот пучок свободен над F , или, что эквивалентно, расслоение \mathbf{ST} тривиально. Базис сечений пучка T_{gr} имеет вид:

$$\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k} \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k} \frac{\partial}{\partial \xi_l}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, \quad j = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Следовательно, формы из $S_{p,q}$ имеют вид

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \left(\sum_{\substack{j_1 < \dots < j_p \\ i=1, \dots, m}} \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i, i_1, \dots, i_q}(z, \bar{z}) \xi_{j_1} \dots \xi_{j_p} \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_{p+1} \\ j=1, \dots, n}} \beta_{j_1, \dots, j_{p+1}}^{j, i_1, \dots, i_q}(z, \bar{z}) \xi_{j_1} \dots \xi_{j_{p+1}} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) d\bar{z}_{i_1} \dots d\bar{z}_{i_q},$$

где $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i, i_1, \dots, i_q}(z, \bar{z})$, $\beta_{j_1, \dots, j_{p+1}}^{j, i_1, \dots, i_q}(z, \bar{z})$ – гладкие глобально определенные функции на T . Из предложения 2 следует

Предложение 4. Форма $\alpha \in S_{p,q}$ является гармонической тогда и только тогда, когда

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \left(\sum_{\substack{j_1 < \dots < j_p \\ i=1, \dots, m}} \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i, i_1, \dots, i_q} \xi_{j_1} \dots \xi_{j_p} \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_{p+1} \\ j=1, \dots, n}} \beta_{j_1, \dots, j_{p+1}}^{j, i_1, \dots, i_q} \xi_{j_1} \dots \xi_{j_{p+1}} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) d\bar{z}_{i_1} \dots d\bar{z}_{i_q}, \quad (6)$$

где $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i, i_1, \dots, i_q}$, $\beta_{j_1, \dots, j_{p+1}}^{j, i_1, \dots, i_q} \in \mathbb{C}$.

Теорема 2. Имеет место равенство

$$\mathbf{K} = \mathbf{V} = \{w \in \mathbf{H}_{(1)} \mid [w, w] = 0\}.$$

Доказательство. Пусть $w \in \mathbf{K}_0$, т. е. удовлетворяет уравнению

$$(3). \text{ Пусть } h = Hw. \text{ Запишем } h = \sum_{k \geq 1} h_{2k}, \quad w = \sum_{k \geq 1} w_{2k}, \quad \text{где } h_{2k} \in \mathbf{H}_{2k,1},$$

$w_{2k} \in S_{2k,1}$. Из уравнения (3) получаем систему уравнений

$$w_2 = h_2, \quad w_4 - \frac{1}{2} D^* G[w_2, w_2] = h_4, \dots$$

$$w_{2k} - \frac{1}{2} D^* G \sum_{s=1}^{k-1} [w_{2s}, w_{2(k-s)}] = h_{2k}, \dots$$

Докажем, что $w_{2k} = h_{2k}$, используя индукцию по k . Для $k = 1$ это следует из первого уравнения. Предположим, что $w_{2i} = h_{2i}$ для $1 \leq i \leq k-1$. Тогда

из предложения 4 имеем $h' = \sum_{s=1}^{k-1} [w_{2s}, w_{2(k-s)}] \in \mathbf{H}$. Так как операторы

\overline{D}^* и G перестановочны, а $\overline{D}^* h' = 0$, то $w_{2s} = h_{2s}$.

Итак, доказано, что $w = h \in \mathbf{H}_{(1)}$. Следовательно, $\mathbf{K}_0 = \mathbf{H}_{(1)}$ и $\varphi = \text{id}$. В силу теоремы 1 имеем $\mathbf{K} = \mathbf{V} = \{w \in \mathbf{H}_{(1)} \mid [w, w] = 0\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башкин М.А.* Однородные и четно-однородные супермногообразия с ретрактом $CP_{kk}^{||4}$ при $k \geq 2$ // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, № 3. С. 14–21.
2. *Башкин М.А.* Четно-однородные наращиваемые супермногообразия с ретрактом $CP_{k+1k}^{||4}$ при $k \geq 3$ // Ярославский педагогический вестник. 2010. Т. 3, № 1. С. 37–41.
3. *Башкин М.А.* Одно семейство однородных нерасщепимых супермногообразий над сферой Римана // Вест. Рыбинской гос. авиационной технол. акад. им. П.А. Соловьева. 2015. № 3(34). С. 125–129.
4. *Гриффитс Ф.* Принципы алгебраической геометрии / Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. Т.1. М.: Мир, 1982. 496 с.
5. *Onishchik A.L.* Non-Abelian Cohomology and Supermanifolds. SFB 288. Preprint № 360. Berlin, 1998. С.1–38.
6. *Onishchik A.L.* Lifting of holomorphic actions on complex supermanifolds // Lie Groups, Geometric Structures and Differential Geometry / Adv. Studies in Pure Math. 37. Kyoto, 2002. P.317–335.

УДК 517.5

А. В. Бородин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: *alvasborodin@mail.ru*

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ КОММУТАТОРА. I

Посредством коммутатора линейного дифференциального оператора, его собственных операторов и значений исследуются специальные функции, удовлетворяющие обобщённым условиям типа Коши-Римана.

Ключевые слова: коммутатор, собственный оператор коммутатора, собственные значения коммутатора, ортогональные многочлены, барианализ, бариголоморфность.

A. V. Borodin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: *alvasborodin@mail.ru*

EIGENVALUES AND EIGENOPERATORS OF THE COMMUTATOR. I

Using the commutator of a linear differential operator, its eigenoperators and eigenvalues, we study special functions satisfying generalized conditions of the Cauchy-Riemann type.

Keywords: commutator, eigenoperators, eigenvalues, orthogonal polynomials, barianalysis, barigolomorphy.

Пусть X – векторное пространство (ВП) над полем \mathbb{P} с элементами x , L – фиксированный линейный оператор (ЛО) на X . Обозначим через $L = \{l\}$ множество линейных операторов $l: X \rightarrow X$, обладающих относительно ЛО L свойством

$$[L, l] = \kappa(l)l, \quad (1)$$

где

$$[L, l] := Ll - lL \quad (1')$$

– коммутатор операторов L и l , а $\kappa(l) \in \mathbb{P}$ – собственное значение коммутатора $[L, l]$ (скаляр, зависящий от l), соответственно ЛО l – его соб-

ственный оператор. Здесь следует отметить, что в случае, когда L и l линейные дифференциальные операторы на ВП X аналитических функций x (см. работу [5]), оператор L в (1) можно трактовать как простейший (т.к. $\kappa(l)$ – скаляр) оператор симметрии для дифференциального уравнения (ДУ)

$$l(x) = 0 \tag{2}$$

и дальше рассматривать задачу разделения переменных в ДУ (2), как это уже описано в указанной работе [5] и работе [4]. В настоящей же работе рассматривается задача о нахождении собственных операторов l и собственных значений $\kappa(l) \in \mathbb{P}$ операторного уравнения (1) и приложения полученных результатов к нахождению собственных значений и собственных функций ДУ (2) и ДУ

$$L(x) = 0. \tag{3}$$

С этой целью укажем простейшие свойства элементов L , l , $\kappa(l)$ отношения (1).

Лемма 1. Если $[L, l] = \kappa(l)l$, то для любого $c \in \mathbb{P}$ ЛО $cl \in L$, причём $\kappa(cl) = \kappa(l)$.

Доказательство. Согласно (1') и линейности оператора L

$$[L, cl] = L(cl) - (cl)L = c(Ll - lL).$$

Отсюда ввиду (1), (1')

$$[L, cl] = c(\kappa(l)l) = c\kappa(l)l = \kappa(l)(cl),$$

что и требовалось доказать. □

Из доказательства видно, что для справедливости леммы 1 достаточно однородности оператора L .

Лемма 2. Если

$$[L, l_1] = \kappa(l_1)l_1, \quad [L, l_2] = \kappa(l_2)l_2,$$

где $\kappa(l_1) = \kappa(l_2) = k$, то

$$[L, l_1 + l_2] = k \cdot (l_1 + l_2),$$

т. е. $\kappa(l_1 + l_2) = k$.

Доказательство. В силу (1), (1') и условий леммы 2

$$\begin{aligned} [L, l_1 + l_2] &= L(l_1 + l_2) - (l_1 + l_2)L = Ll_1 - l_1L + Ll_2 - l_2L = \\ &= \kappa(l_1)l_1 + \kappa(l_2)l_2 = k(l_1 + l_2). \quad \square \end{aligned}$$

Из лемм 1 и 2 следует, что множество собственных операторов l , отвечающих одному и тому же собственному значению $\kappa = \kappa(l)$, является векторным пространством.

Лемма 3. Если элемент $x_0 \in X$ такой, что $L(x_0) = \lambda_0 x_0$, то для ЛО $l \in L$ элемент $x_1 = l(x_0)$ такой, что $L_1(x_1) = \lambda_0 x_1$, где ЛО $L_1 = L - \kappa(l)E$ (E – единичный оператор) удовлетворяет условию (1): $[L_1, l] = \kappa(l)l$, т. е. $l \in L_1$.

Доказательство. Пусть $l \in L$ и, следовательно, $\kappa(l)l(x) = L l(x) - l L(x)$ для каждого $x \in X$. Тогда ввиду условий леммы

$$\begin{aligned} L_1(x_1) &= (L - \kappa(l)E) l(x_0) = L l(x_0) - \kappa(l)l(x_0) = L l(x_0) - (L l(x_0) - l L(x_0)) = \\ &= l L(x_0) = l(\lambda_0 x_0) = \lambda_0 l(x_0) = \lambda_0 x_1, \end{aligned}$$

$$[L_1, l] = L_1 l - l L_1 = (L - \kappa(l)E) l - l (L - \kappa(l)E) = L l - l L = \kappa(l)l,$$

что и требовалось показать. \square

Из леммы 3 вытекает следующее эквивалентное утверждение.

Лемма 3'. Если $x_0 \in X$ – собственный элемент ЛО L , а λ_0 – соответствующее собственное значение, т. е. $L(x_0) = \lambda_0 x_0$, то для любого ЛО $l \in L$ элемент $x_1 = l(x_0) \in X$ тоже собственный, а $\lambda_1 = \lambda_0 + \kappa(l)$ – соответствующее собственное значение, т. е.

$$L(x_1) = \lambda_1 x_1 \quad (x_1 = l(x_0), \lambda_1 = \lambda_0 + \kappa(l)). \quad (4)$$

Дополним леммы 1–3 ещё одной, касающейся произведения собственных операторов.

Лемма 4. Если $l_1, l_2 \in L$, то

$$l_1 l_2 \in L \text{ и } \kappa(l_1 l_2) = \kappa(l_1) + \kappa(l_2). \quad (5)$$

Доказательство. Согласно (1) и (1')

$$\begin{aligned} [L, l_1 l_2] &= L l_1 l_2 - l_1 l_2 L = L l_1 l_2 - l_1 (L l_2 - \kappa(l_2)l_2) = \\ &= (L l_1 - l_1 L)l_2 + \kappa(l_2)l_1 l_2 = \kappa(l_1)l_1 l_2 + \kappa(l_2)l_1 l_2 = \\ &= (\kappa(l_1) + \kappa(l_2))l_1 l_2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

Тем самым, произведению $l_1 l_2$ собственных операторов $l_1, l_2 \in L$ отвечает сумма $\kappa(l_1) + \kappa(l_2)$ собственных значений. $\kappa(l_1), \kappa(l_2) \in \mathbb{P}$. Отсюда и леммы 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Если $x_0 \in X$ – собственный элемент ЛО L , а λ_0 – его собственное значение ($L(x_0) = \lambda_0 x_0$), то для любых ЛО

$$l_1, l_2, \dots, l_k \in L \quad ([L, l_i] = \kappa(l_i)l_i, \quad k \in \mathbb{N})$$

элемент

$$x_k = l_k l_{k-1} \Lambda l_1(x_0) \in X$$

– собственный элемент ЛО L , число

$$\lambda_k = \lambda_0 + \sum_{i=1}^k \kappa(l_i)$$

– его собственное значение, т. е. $L(x_k) = \lambda_k x_k$. □

Другим следствием леммы 4 (её аналогом) будет следующая

Лемма 4’. Если $l_1, l_2 \in L$, то коммутатор

$$l = [l_1, l_2] \in L \quad \text{и} \quad \kappa(l) = \kappa(l_1) + \kappa(l_2). \quad (5)$$

Доказательство. Согласно (1), (1’) для ЛО $l = [l_1, l_2]$ имеем

$$\begin{aligned} [L, l] &= L(l_1 l_2 - l_2 l_1) - (l_1 l_2 - l_2 l_1)L = \\ &= L(l_1 l_2) - (l_1 l_2)L - (L(l_2 l_1) - (l_2 l_1)L) \end{aligned}$$

Отсюда в силу леммы 4

$$\begin{aligned} [L, l] &= ((\kappa(l_1) + \kappa(l_2))l_1 l_2 - (\kappa(l_2) + \kappa(l_1))l_2 l_1) = (\kappa(l_1) + \kappa(l_2))(l_1 l_2 - l_2 l_1) = \\ &= (\kappa(l_1) + \kappa(l_2))[l_1, l_2], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 5. Для того чтобы ЛО $l \in L_1 \cap L_2$ удовлетворял условию

$$\kappa_1(l) = \kappa_2(l)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$[L_1 - L_2, l] = 0.$$

Действительно, если $l \in L_1 \cap L_2$, т. е. $[L_1, l] = \kappa_1(l)l$, $[L_2, l] = \kappa_2(l)l$,

то $[L_1 - L_2, l] = (\kappa_1(l) - \kappa_2(l))l$. □

В качестве первого примера, иллюстрирующего применение представленных выше результатов, рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений (ЛСДУ) в частных производных 1-го порядка вида

$$\begin{aligned} \alpha(x) \partial_x v(x, y) &= -\varphi(x, y) \partial_y w(x, y), \\ \beta(y) \partial_y v(x, y) &= \varphi(x, y) \partial_x w(x, y), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\alpha(x), \beta(y) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ – гладкие комплекснозначные функции. Дальше (если не оговорено противное)

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \varphi_2(y). \quad (6')$$

Отметим, что частным случаем ЛСДУ (6), (6') (при $\alpha(x) = 1$, $\beta(y) = 1$, $\varphi(x, y) = -1$) являются условия комплексной дифференцируемости Коши-Римана [7] и их барианалога – условий *баридифференцируемости* [4]. Тем самым, система (6) являются обобщением классических условий Коши-Римана.

Ввиду условия (6') часть решений системы (6) будем искать методом разделения переменных [5, 6] т.е. в виде

$$v(x, y) = v_1(x) v_2(y), \quad w(x, y) = w_1(x) w_2(y). \quad (7)$$

Подставляя (6'), (7) в (6), для функций $v_1(x)$, $w_1(x)$ и $v_2(y)$, $w_2(y)$ получим следующие определяющие их ЛСДУ 1-го порядка:

$$\alpha(x) \partial_x v_1(x) = \mu_1 \varphi_1(x) w_1(x), \quad \varphi_1(x) \partial_x w_1(x) = \mu_2 v_1(x), \quad (8_1)$$

$$\beta(y) \partial_y v_2(y) = \mu_2 \varphi_2(y) w_2(y), \quad \varphi_2(y) \partial_y w_2(y) = -\mu_1 v_2(y), \quad (8_2)$$

где $\mu_1 \in \mathbb{C}$ и $\mu_2 \in \mathbb{C}$ – произвольные комплексные числа.

Из (8₁) следует, что $v_1(x)$, $w_1(x)$ – решения системы ЛСДУ 2-го порядка

$$\alpha(x) \partial_x^2 v_1(x) + (\partial_x \alpha(x) - \alpha(x) \frac{\partial_x \varphi_1(x)}{\varphi_1(x)}) \partial_x v_1(x) = \mu_1 \mu_2 v_1(x), \quad (9_1)$$

$$w_1(x) = \alpha(x) \partial_x v_1(x) / (\mu_1 \varphi_1(x)); \quad (10_1)$$

$$\alpha(x) \partial_x^2 w_1(x) + \alpha(x) \frac{\partial_x \varphi_1(x)}{\varphi_1(x)} \partial_x w_1(x) = \mu_1 \mu_2 w_1(x), \quad (11_1)$$

$$v_1(x) = \varphi_1(x) \partial_x w_1(x) / \mu_2, \quad (12_1)$$

а из (8₂) следует, что $v_2(y)$, $w_2(y)$ – решения системы ЛСДУ 2-го порядка

$$\beta(y) \partial_y^2 v_2(y) + (\partial_y \beta(y) + \beta(y) \frac{\partial_y \varphi_2(y)}{\varphi_2(y)}) \partial_y v_2(y) = -\mu_1 \mu_2 v_2(y), \quad (9_2)$$

$$w_2(y) = \beta(y) \partial_x v_2(y) / (\mu_2 \varphi_2(y)), \quad (10_2)$$

$$\beta(y)\partial_y^2 w_2(y) + \beta(y)\frac{\partial_y \varphi_2(y)}{\varphi_2(y)} \partial_y w_2(y) = -\mu_1 \mu_2 w_2(y), \quad (11_2)$$

$$v_2(y) = -\varphi_2(y)\partial_y w_2(y)/\mu_1. \quad (12_2)$$

Таким образом, задача нахождения решений ЛСДУ (6) при условии (6') свелась к решению четырёх задач (9₁), (11₁), (9₂), (11₂) на собственные значения и собственные функции. На самом деле, вместо перечисленных четырёх задач достаточно решить две: (9₁) и (9₂) или (11₁) и (11₂). При этом, как будет показано ниже, главную роль будет играть теорема 1 и связанные с ней понятия собственного ЛО l и собственного значения $\kappa(l) \in \mathbb{R}$ относительно ЛО L , индуцированного линейными ДУ (9₁) и (9₂) или (11₁) и (11₂).

Для экономии места введём обозначения:

$$x_- = x, x_+ = y; \alpha_- = \alpha(x), \alpha_+ = \beta(y);$$

$$\varphi_- = \varphi_1(x), \varphi_+ = \varphi_2(y); \partial_- = \partial_x = \partial/\partial x, \partial_+ = \partial_y = \partial/\partial y;$$

$$\mu_\mu : \mu_- = \mu_1, \mu_+ = \mu_2,$$

где индекс «-» указывает на отношения (9₁) – (12₁), а индекс «+» указывает на отношения (9₂) – (12₂).

В качестве операторов $L : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ и $l : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ в условии (1) возьмём соответственно линейный дифференциальный оператор (ЛДО) 2-го порядка из ДУ (9₁) ((9₂))

$$L_\mp = \alpha_\mp \partial_\mp^2 + (\partial_\mp \alpha_\mp \mp \alpha_\mp \frac{\partial_\mp \varphi_\mp}{\varphi_\mp}) \partial_\mp \quad (13)$$

и линейный дифференциальный оператор (ЛДО) 1-го порядка

$$l_\mp = \partial_\mp. \quad (13_1)$$

Тогда коммутатор (1') будет иметь вид

$$[L_\mp, l_\mp] = -(\partial_\mp \alpha_\mp) \partial_\mp^2 - \partial_\mp (\partial_\mp \alpha_\mp \mp \alpha_\mp \frac{\partial_\mp \varphi_\mp}{\varphi_\mp}) \partial_\mp. \quad (14)$$

Соответственно условие (1), т. е. $[L_\mp, l_\mp] = \kappa_\mp l_\mp$, будет иметь вид

$$-(\partial_\mp \alpha_\mp) \partial_\mp^2 - \partial_\mp (\partial_\mp \alpha_\mp \mp \alpha_\mp \frac{\partial_\mp \varphi_\mp}{\varphi_\mp}) \partial_\mp = \kappa_\mp \partial_\mp, \quad (15)$$

где $\kappa_\mp \in \mathbb{C}$ – произвольная постоянная. Чтобы оно выполнялось, необходимо и достаточно выполнения условий:

$$\partial_{\mp} \alpha_{\mp} = 0, \quad -\partial_{\mp} (\partial_{\mp} \alpha_{\mp} \mp \alpha_{\mp} \partial_{\mp} \frac{\partial_{\mp} \varphi_{\mp}}{\varphi_{\mp}}) = \kappa_{\mp}, \quad (15_1)$$

или

$$\alpha_{\mp} = \text{const} = d_{\mp}, \quad \pm d_{\mp} \partial_{\mp} (\frac{\partial_{\mp} \varphi_{\mp}}{\varphi_{\mp}}) = \kappa_{\mp}.$$

Отсюда

$$\varphi_{\mp} = \exp(\pm(\frac{1}{2} a_{\mp} x_{\mp}^2 + b_{\mp} x_{\mp} + c_{\mp})), \quad (16)$$

где $a_{\mp} = \kappa_{\mp}/d_{\mp}, b_{\mp}, c_{\mp} \in \mathbb{C}$ – произвольные постоянные. Поэтому дальше, не теряя общности, можно считать

$$\alpha_{\mp} = d_{\mp} = 1. \quad (16')$$

Здесь важно отметить, что в силу леммы 5 совершенно те же отношения (16), (16') влекут за собой ЛДУ

$$L'_{\mp} = \alpha_{\mp} \partial_{\mp}^2 + (\mp \alpha_{\mp} \frac{\partial_{\mp} \varphi_{\mp}}{\varphi_{\mp}}) \partial_{\mp} \quad (13')$$

(из ДУ (11₁) (11₂)), но при более общем, чем $\partial_{\mp} \alpha_{\mp} = 0$ (см. (15₁)), условии

$$\partial_{\mp}^2 \alpha_{\mp} = 0. \quad (14')$$

Поэтому, подставляя (16) и (16') в ЛДУ (9₁) – (12₂), получим относительно v_{\mp} и w_{\mp} квазициклическую систему ЛДУ 2-го порядка:

$$\Lambda_{\mp}(v_{\mp}) := (\partial_{\mp}^2 \mp (a_{\mp} x_{\mp} + b_{\mp}) \partial_{\mp}) v_{\mp} = \pm \mu_1 \mu_2 v_{\mp}, \quad (17)$$

$$w_{\mp} = \frac{\partial_{\mp} v_{\mp}}{\mu_{\mp}} \exp(\mp(\frac{1}{2} a_{\mp} x_{\mp}^2 + b_{\mp} x_{\mp} + c_{\mp})); \quad (17')$$

$$\Lambda'_{\mp}(w_{\mp}) := (\partial_{\mp}^2 \pm (a_{\mp} x_{\mp} + b_{\mp}) \partial_{\mp}) w_{\mp} = \pm \mu_1 \mu_2 w_{\mp}, \quad (18)$$

$$v_{\mp}(x) = \pm \frac{\partial_{\mp} w_{\mp}}{\mu_{\mp}} \exp(\pm(\frac{1}{2} a_{\mp} x_{\mp}^2 + b_{\mp} x_{\mp} + c_{\mp})). \quad (18')$$

Нетрудно убедиться, что если параметр

$$a_{\mu} = \pm \mu_- \mu_+ = \pm \mu_1 \mu_2, \quad (19)$$

то функция

$$v_{\mp} = \exp(\pm(\frac{1}{2} a_{\mp} x_{\mp}^2 + b_{\mp} x_{\mp} + c_{\mp})), \quad (20)$$

– решения ЛДУ (17). Следовательно, функция (20) – собственный элемент ЛДО (17), отвечающий собственному значению (19), т. е.

$$\Lambda_{\mp}(v_{\mp}) = a_{\mp} v_{\mp}.$$

Другими словами, при условии (19) функция (20) – решение ЛДУ 2-го порядка (17). Здесь уместно заметить, что если вместо функции (20) взять функцию

$$w_{\mp} = \exp(\mp(\frac{1}{2}a_{\mp}x_{\mp}^2 + b_{\mp}x_{\mp} + c_{\mp})), \quad (20')$$

то она уже не будет решением ДУ (17), однако будет решением ДУ (18) и, тем самым, ДУ (17), (17') и ДУ (18), (18') поменяются ролями.

Далее, если функции $\alpha_{\mp} = \alpha_{\mp}(x_{\mp})$ и $\varphi_{\mp} = \varphi_{\mp}(x_{\mp})$ – решения системы ДУ (15₁) (что равносильно их значениям (16'), (16)), то отношение (15) примет окончательный вид

$$[\partial_{\mp}^2 \mp (a_{\mp}x + b_{\mp})\partial_{\mp}, \partial_{\mp}] = a_{\mp}\partial_{\mp}, \quad (21)$$

т. е. $l_{\mp} = \partial_{\mp}$ (см. (14)) – собственный оператор коммутатора $[\Lambda_{\mp}, l_{\mp}]$, где (см. (17))

$$\Lambda_{\mp} := \partial_{\mp}^2 \mp (a_{\mp}x_{\mp} + b_{\mp})\partial_{\mp} \quad (22)$$

– ЛДО 2-го порядка, а число (19) – соответствующее собственное значение.

Тогда, согласно теореме 1, функции

$$v_k^{\mp} = \partial_{\mp}^k v_{\mp} = \partial_{\mp}^k \exp(\pm(\frac{1}{2}a_{\mp}x_{\mp}^2 + b_{\mp}x_{\mp} + c_{\mp})) \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (23)$$

– собственные функции ЛДО 2-го порядка (22), отвечающие собственным значениям

$$\lambda_k^{\mp} = \pm a_{\mp}(1+k) \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (24)$$

т. е.

$$\Lambda_{\mp}(v_k^{\mp}) = \pm a_{\mp}(1+k)v_k^{\mp} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (25)$$

Отсюда, в свою очередь, для ЛДО 2-го порядка (из ДУ (18))

$$\Lambda'_{\mp} := \partial_{\mp}^2 \pm (a_{\mp}x + b_{\mp})\partial_{\mp} \quad (22')$$

по формуле (17') получаем собственные функции (по нижнему индексу тесно связанные с полиномами Эрмита [1-3])

$$w_k^{\mp} = \frac{1}{\mu_l} \exp(\mp(\frac{1}{2}a_{\mp}x_{\mp}^2 + b_{\mp}x + c_{\mp})) \partial_{\mp}^{k+1} \exp(\pm(\frac{1}{2}a_{\mp}x_{\mp}^2 + b_{\mp}x_{\mp} + c_{\mp})) \quad (23')$$

$$(k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

и соответствующие собственные значения

$$\lambda_k^{\mp} = \pm a_{\mp}(1+k) \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (24')$$

ЛДО (22'), т. е.

$$\Lambda'_{\mp}(w_k^{\mp}) = \pm a_{\mp}(1+k)(w_k^{\mp}) \quad (k=0,1,2,3,\dots). \quad (25')$$

Замечание 1. Поскольку (см. (13')) ЛДО (22') во всех отношениях подобен ЛДО (22), то к нему (в паре с ЛДО (14)) и собственному элементу (23') (в паре с собственным значением (24'), см. (25')) применима теорема 1, а именно: согласно этой теореме ЛДО (22') помимо собственных элементов (23') и собственных значений (24') имеет собственные элементы

$$\tilde{w}_s^{\mp} = \frac{1}{\mu_1} \partial_{\mp}^s \left(\exp(\mp(\frac{1}{2}a_{\mp}x_{\mp}^2 + b_{\mp}x + c_{\mp})) \partial_{\mp}^{k+1} \exp(\pm(\frac{1}{2}a_{\mp}x_{\mp}^2 + b_{\mp}x_{\mp} + c_{\mp})) \right)$$

и соответствующие собственные значения

$$\tilde{\lambda}_s^{\mp} = \pm a_{\mp}(1+k+s)$$

такие, что

$$\Lambda'_{\mp}(\tilde{w}_s^{\mp}) = \pm a_{\mp}(1+k+s)(\tilde{w}_s^{\mp}) \quad (k=0,1,2,3,\dots; s \in \mathbb{N}). \quad \square$$

Замечание 2. Возможен и другой вариант, когда по формуле (18') собственному элементу (23') ЛДО (22') ставится в соответствие собственный элемент (аналог элемента (20))

$$\tilde{v}_k^{\mp}(x) = \pm \frac{\partial_{\mp} w_k^{\mp}}{\mu_{\pm}} \exp(\pm(\frac{1}{2}a_{\mp}x_{\mp}^2 + bx_{\mp} + c_{\mp}))$$

ЛДО (22) и соответствующее собственное значение $\tilde{\lambda}_k^{\mp}$ (пропорциональное собственному значению (24')). А затем всё повторяется, как с элементом (20). В этой повторяемости как раз и проявляется свойство квазициклическости системы ЛДУ (17) – (18'). \square

Теперь в качестве собственного ЛО l коммутатора $[L_{\mp}, l]$ ($[L'_{\mp}, l]$), где (см. (13), (13'))

$$\begin{aligned} L_{\mp} &= \alpha_{\mp} \partial_{\mp}^2 + (\partial_{\mp} \alpha_{\mp} \mp \alpha_{\mp} \frac{\partial_{\mp} \varphi_{\mp}}{\varphi_{\mp}}) \partial_{\mp} \\ (L'_{\mp} = L_{\mp} - (\partial_{\mp} \alpha_{\mp}) \partial_{\mp} &= \alpha_{\mp} \partial_{\mp}^2 \mp \alpha_{\mp} \frac{\partial_{\mp} \varphi_{\mp}}{\varphi_{\mp}} \partial_{\mp}) \end{aligned} \quad (26)$$

рассмотрим оператор интегрирования

$$l_{\mp}^{-1} = \int_{-\infty}^{x_{\pm}} dx_{\mp} \quad (x_{\mp} \in \mathbb{R}) \quad (27)$$

$$\left(\Rightarrow l_{\mp}^{-0} = I, \quad l_{\mp}^{-k} = (l_{\mp}^{-1})^k = \left(\int_{-\infty}^{x_{\mp}} dx_{\mp} \right)^k \quad (k \in \mathbb{N}) \right),$$

обратный к оператору дифференцирования $l_{\mp} = \partial_{\mp}$ (см. (14)) и действующий по правилу

$$l_{\mp}^{-1}(u_{\mp}) = \int_{-\infty}^{x_{\mp}} u_{\mp}(x_{\mp}) dx_{\mp} \quad (l_{\mp}^{-0}(u_{\mp}) = 1),$$

при условиях, что

$$\lim_{x_{\mu} \rightarrow -\infty} u_{\mu} = 0, \quad \lim_{x_{\mp} \rightarrow -\infty} u_{\mp} \partial_{\mp} \alpha_{\mp} = 0, \quad \lim_{x_{\mp} \rightarrow -\infty} \alpha_{\mp} \partial_{\mp} u_{\mp} = 0. \quad (*)$$

В этом случае коммутаторы $[L_{\mp}, l_{\mp}^{-1}]$ и $[L'_{\mp}, l_{\mp}^{-1}]$ определяются так:

$$\begin{aligned} [L_{\mp}, l_{\mp}^{-1}] &= \partial_{\mp} \alpha_{\mp} \mp \int_{-\infty}^{x_{\mp}} dx_{\mp} \partial_{\mp} (\alpha_{\mp} \partial_{\mp} \varphi_{\mp} / \varphi_{\mp}), \\ [L'_{\mp}, l_{\mp}^{-1}] &= [L_{\mp}, l_{\mp}^{-1}] + \int_{-\infty}^{x_{\mp}} dx_{\mp} (\partial_{\mp}^2 \alpha_{\mp}). \end{aligned} \quad (28_1)$$

Для них свойство (1) (в нашем случае свойства

$$[L_{\mp}, l_{\mp}^{-1}] = \kappa_{\mp} l_{\mp}^{-1}, \quad [L'_{\mp}, l_{\mp}^{-1}] = \kappa'_{\mp} l_{\mp}^{-1})$$

выполняется тогда и только тогда, когда относительно функций α_{\mp} и φ_{\mp} выполняются условия

$$\partial_{\mp} \alpha_{\mp} = 0, \quad \mp \partial_{\mp} (\alpha_{\mp} \partial_{\mp} \varphi_{\mp} / \varphi_{\mp}) = \kappa_{\mp} \quad (\kappa_{\mp} = \kappa(l_{\mp}^{-1})).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \alpha_{\mp} &= \text{const} = d_{\mp}, \\ \varphi_{\mp} &= \exp(\mp (\frac{1}{2} a_{\mp} x_{\mp}^2 + b_{\mp} x_{\mp} + c_{\mp})), \end{aligned} \quad (29_1)$$

где $a_{\mp} = \kappa_{\mp} / d_{\mp}$, b_{\mp} , $c_{\mp} \in \mathbb{C}$ – произвольные постоянные; можно считать

$$\alpha_{\mp} = d_{\mp} = 1 \quad (29_2)$$

(и заодно (см. (*)) $\lim_{x_{\mp} \rightarrow -\infty} u_{\mp} = 0$, $\lim_{x_{\mp} \rightarrow -\infty} \partial_{\mp} u_{\mp} = 0$). Поэтому при условиях

(29₁), (29₂) коммутаторы (28₁) принимают вид

$$[\Lambda_{\mp}, l_{\mp}^{-1}] = \mp a_{\mp} l_{\mp}^{-1}, \quad [\Lambda'_{\mp}, l_{\mp}^{-1}] = \mp a_{\mp} l_{\mp}^{-1}, \quad (28_2)$$

где

$$L_{\mp} = \Lambda_{\mp} := \partial_{\mp}^2 \pm (a_{\mp} x_{\mp} + b_{\mp}) \partial_{\mp}, \quad L'_{\mp} = \Lambda'_{\mp} := \partial_{\mp}^2 \mp (a_{\mp} x_{\mp} + b_{\mp}) \partial_{\mp}; \quad (28_3)$$

$$a_{\mp} = \mp \mu_{\mp} \quad (a_{\mp} = \pm \mu_{\mp}) \quad (\mu_{\mp} = \mu_1, \mu_2 = \mu_{\mp}). \quad (29_3)$$

Подставляя функцию (29₁) и параметры (29₂), (29₃) в ЛДУ (9₁) – (12₂) получим относительно $v_{\mp} = \bar{v}_{\mp}$ и $w_{\mp} = \bar{w}_{\mp}$ квазициклическую систему ЛДУ 2-го порядка:

$$\Lambda_{\mp}(\bar{v}_{\mp}) := (\partial_{\mp}^2 \pm (a_{\mp} x_{\mp} + b_{\mp}) \partial_{\mp}) \bar{v}_{\mp} = \pm \mu_1 \mu_2 \bar{v}_{\mp}, \quad (30_1)$$

$$\bar{w}_{\mp} = \frac{\partial_{\mp} \bar{v}_{\mp}}{\mu_{\mp}} \exp\left(\pm \left(\frac{1}{2} a_{\mp} x_{\mp}^2 + b_{\mp} x_{\mp} + c_{\mp}\right)\right); \quad (30_2)$$

$$\Lambda'_{\mp}(\bar{w}_{\mp}) := (\partial_{\mp}^2 \mp (a_{\mp} x_{\mp} + b_{\mp}) \partial_{\mp}) \bar{w}_{\mp} = \pm \mu_1 \mu_2 \bar{w}_{\mp}, \quad (31_1)$$

$$\bar{v}_{\mp}(x) = \pm \frac{\partial_{\mp} \bar{w}_{\mp}}{\mu_{\pm}} \exp\left(\mp \left(\frac{1}{2} a_{\mp} x_{\mp}^2 + b x_{\mp} + c_{\mp}\right)\right). \quad (31_2)$$

Нетрудно убедиться, что при указанных условиях функции

$$\bar{v}_{\mp} = \exp\left(\mp \left(\frac{1}{2} a_{\mp} x_{\mp}^2 + b_{\mp} x_{\mp} + c_{\mp}\right)\right), \quad (32_1)$$

$$\bar{w}_{\mp} = \exp\left(\pm \left(\frac{1}{2} a_{\mp} x_{\mp}^2 + b_{\mp} x_{\mp} + c_{\mp}\right)\right) \quad (32_2)$$

– решения ЛДУ (30₁), (31₁) соответственно (но не наоборот). Следовательно, функции (32) – собственные элементы ЛДО (30₁) (31₁), отвечающие собственным значениям (29₃), т. е.

$$\Lambda_{\mp}(\bar{v}_{\mp}) = \mp a_{\mp} \bar{v}_{\mp} \quad (\Lambda'_{\mp}(\bar{w}_{\mp}) := \pm a \bar{w}_{\mp}).$$

Другими словами, при условиях (29₃) функции (32₁), (32₂) – решения ЛДУ 2-го порядка (30₁), (31₁).

Таковыми же при условии

$$\mp a_{\mp} < 0, \quad (\pm a_{\mp} < 0) \quad (**)$$

будут соответственно функции

$$\bar{v}_{\mp}^{-k} = (l_{\mp}^{-1})^k \bar{v}_{\mp} = \left(\int_{-\infty}^{x_{\mp}} dt\right)^{k-1} \exp\left(\mp \left(\frac{1}{2} a_{\mp} x_{\mp}^2 + b_{\mp} x_{\mp} + c_{\mp}\right)\right) \quad (k \in \mathbb{N}), \quad (33_1)$$

$$\bar{w}_{\mp}^{-k} = (l_{\mp}^{-1})^k \bar{w}_{\mp} = \left(\int_{-\infty}^{x_{\mp}} dt\right)^{k-1} \exp\left(\pm \left(\frac{1}{2} a_{\mp} x_{\mp}^2 + b_{\mp} x_{\mp} + c_{\mp}\right)\right) \quad (k \in \mathbb{N}), \quad (33_2)$$

являющимися по теореме 1 решениями ЛДУ 2-го порядка

$$\Lambda_{\mp}(\bar{v}_{\mp}^{-k}) = (1 \mp k) a_{\mp} \bar{v}_{\mp}^{-k} \quad (34_1)$$

$$\Lambda'_{\mp}(\bar{w}_{\mp}^{-k}) = (1 \pm k) a_{\mp} \bar{w}_{\mp}^{-k} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad (34_2)$$

а заодно и собственными функциями ЛДО Λ_{\mp} (Λ'_{\mp}) с соответствующими собственными значениями

$$\lambda_k = (1 \mp k) a_{\mp} \quad (\lambda_k = (1 \pm k) a_{\mp}) \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (35)$$

То же самое, согласно отношениям (10₁) ((12₁),) можно сказать о функциях

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{\mp}^{-k} = & \pm \frac{1}{\mu_{\pm}} \exp\left(\mp\left(\frac{1}{2}a_{\mp}x_{\mp}^2 + b_{\mp}x_{\mp} + c_{\mp}\right)\right) \left(\int_{-\infty}^{x_{\mp}} dt\right)^{k-1} \times \\ & \times \exp\left(\pm\left(\frac{1}{2}a_{\mp}x_{\mp}^2 + b_{\mp}x_{\mp} + c_{\mp}\right)\right), \end{aligned} \quad (36_1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{\mp}^{-k} = & \frac{1}{\mu_{\mp}} \exp\left(\pm\left(\frac{1}{2}a_{\mp}x_{\mp}^2 + b_{\mp}x_{\mp} + c_{\mp}\right)\right) \left(\int_{-\infty}^{x_{\mp}} dt\right)^{k-1} \times \\ & \times \exp\left(\mp\left(\frac{1}{2}a_{\mp}x_{\mp}^2 + b_{\mp}x_{\mp} + c_{\mp}\right)\right), \end{aligned} \quad (36_2)$$

являющихся решениями уравнений (34₂) ((34₁)). К этому следует добавить, что остаются в силе соответствующим образом скорректированные замечания 1 и 2, и отметить, что функции (36₁), (36₂) тесно связаны с обратными к полиномам Эрмита функциями [3].

Сформулируем часть полученных результатов в исходных (принятых в системе отношений (6) – (12₂)) обозначениях:

$$\begin{aligned} x = x_{-}, y = x_{+}; \alpha(x) = \alpha_{-}, \beta(y) = \alpha_{+}; \\ \varphi_1(x) = \varphi_{-}, \varphi_2(y) = \varphi_{+}; \partial_x = \partial_{-} = \partial/\partial_x, \partial_y = \partial_{+} = \partial/\partial_y, \\ \mu_{\mp} : \mu_1 = \mu_{-}, \mu_2 = \mu_{+}. \end{aligned}$$

Теорема 1.1. *И. Пусть дано (связанное с условием (6), см. также (9₁) ((9₂))) ДУ*

$$L_1(v_1(x)) = \mu_1 \mu_2 v_1(x) : \quad (37_1)$$

$$L_1(v_1(x)) := \alpha(x) \partial_x^2 v_1(x) + \left(\partial_x \alpha(x) - \alpha(x) \frac{\partial_x \varphi_1(x)}{\varphi_1(x)}\right) \partial_x v_1(x) ; \quad (38_1)$$

$$L_2(v_2(y)) = -\mu_1 \mu_2 v_2(y) : \quad (37_2)$$

$$L_2(v_2(y)) := \beta(y) \partial_y^2 v_2(y) + \left(\partial_y \beta(y) - \beta(y) \frac{\partial_y \varphi_2(y)}{\varphi_2(y)}\right) \partial_y v_2(y) . \quad (38_2)$$

Для того чтобы ЛДО

$$l_1 = \partial_x \quad (l_2 = \partial_y) \quad (39_1) (39_2)$$

был собственным для оператора (37₁) ((37₂)), т. е.

$$[L_1, l_1] = \kappa_1(l_1) l_1 \quad ([L_2, l_2] = \kappa_2(l_2) l_2),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\alpha(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = \exp\left(+\left(\frac{1}{2}a_1x^2 + b_1x + c_1\right)\right), \quad (40_1)$$

$$\beta(y) = 1, \quad \varphi_2(y) = \exp\left(-\left(\frac{1}{2}a_2y^2 + b_2y + c_2\right)\right), \quad (40_2)$$

где

$$a_1 = \kappa_1(l_1) = \mu_1\mu_2 \quad (a_2 = -\kappa_2(l_2) = -\mu_1\mu_2)$$

– соответствующее собственное значение. При этом уравнение (37₁) ((37₂)) принимает вид

$$\Lambda_1(v_1(x)) = \kappa_1(l_1)v_1(x) :$$

$$\Lambda_1(v_1(x)) := \partial_x^2 v_1(x) - (a_1x + b_1)\partial_x v_1(x), \quad (41_1)$$

$$\Lambda_2(v_2(y)) = \kappa_2(l_2)v_2(y) :$$

$$\Lambda_2(v_2(y)) := \partial_y^2 v_2(y) + (a_2y + b_2)\partial_y v_2(y), \quad (41_2)$$

его собственными функциями и значениями являются

$$v_1^{k_1}(x) = \partial_x^{k_1} \exp\left(+\left(\frac{1}{2}\kappa_1(l_1)x^2 + b_1x + c_1\right)\right),$$

$$\lambda_1^{k_1} = (1 + k_1)\kappa_1(l) \quad (k_1 \in \{0, 1, 2, \dots\}). \quad (42_1)$$

$$v_2^{k_2}(y) = \partial_y^{k_2} \exp\left(-\left(\frac{1}{2}\kappa_2(l_2)y^2 + b_2y + c_2\right)\right),$$

$$\lambda_2^{k_2} = -(1 + k_2)\kappa_2(l) \quad (k_2 \in \{0, 1, 2, \dots\}). \quad (42_2)$$

Кроме того, в силу (12₁), (42₁), собственными функциями и значениями являются

$$w_1^k(x) = \frac{1}{\mu_2} \exp\left(+\left(\frac{1}{2}\kappa_1'(l)x^2 + b_1x + c_1\right)\right) \partial_x^{k+1} \exp\left(-\left(\frac{1}{2}\kappa_1'(l)x^2 + b_1x + c_1\right)\right),$$

$$\lambda_1^k = -(1 + k)\kappa_1'(l) \quad (k \in \{0, 1, 2, \dots\}). \quad (43_1)$$

II. Пусть дано (связанное с условием (6), см. также (11₁) ((11₂))) ДУ

$$L_1'(w_1(x)) = \mu_1\mu_2 w_1(x), \quad (37_3)$$

$$L_1'(w_1(x)) := \alpha(x)\partial_x^2 w_1(x) + \alpha(x)\frac{\partial_x \varphi_1(x)}{\varphi_1(x)} \partial_x w_1(x), \quad (37_4)$$

$$L_2'(w_2(y)) = -\mu_1\mu_2 w_2(y) : \quad (38_3)$$

$$L_2'(w_2(y)) := \beta(y)\partial_y^2 w_2(y) + \beta(y)\frac{\partial_y \varphi_2(y)}{\varphi_2(y)} \partial_y w_2(y). \quad (38_4)$$

Для того чтобы ЛДО

$$l_1 = \partial_x \quad (l_2 = \partial_y) \quad (39_3) \quad (39_4)$$

был собственным и для оператора (37₄) ((38₄)), т. е.

$$[L'_1, l_1] = \kappa'_1(l_1)l_1, \quad [L'_2, l_2] = \kappa'_2(l_2)l_2,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\alpha(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = \exp\left(+\left(\frac{1}{2}a_1x^2 + b_1x + c_1\right)\right), \quad (40_3)$$

$$\beta(y) = 1, \quad \varphi_2(y) = \exp\left(-\left(\frac{1}{2}a_2y^2 + b_2y + c_2\right)\right), \quad (40_4)$$

где

$$a_1 = \kappa'_1(l_1) = \mu_1\mu_2 \quad (a_2 = -\kappa'_2(l_2) = -\mu_1\mu_2).$$

При этом уравнение (37₃) ((38₃)) принимает вид

$$\Lambda'_1(w_1(x)) = \kappa'_1(l_1)w_1(x):$$

$$\Lambda'_1(w_1(x)) := \partial_x^2 w_1(x) + (a_1x + b_1)\partial_x w_1(x), \quad (41_3)$$

$$\Lambda'_2(w_2(y)) = \kappa'_2(l_2)w_2(y):$$

$$\Lambda_2(w_2(y)) := \partial_y^2 w_2(y) - (a_2y + b_2)\partial_y w_2(y), \quad (41_4)$$

а его собственными функциями и значениями являются

$$w_1^k(x) = \partial_x^k \exp\left(-\left(\frac{1}{2}\kappa'_1(l)x^2 + b_1x + c_1\right)\right), \quad (42_3)$$

$$\lambda_1^k = -(1+k)\kappa'_1(l) \quad (k \in \{0, 1, 2, \dots\}), \quad (43_3)$$

$$w_2^k(y) = \partial_y^k \exp\left(-\left(\frac{1}{2}\kappa'_2(l)y^2 + b_2y + c_2\right)\right), \quad (42_4)$$

$$\lambda_2^k = -(1+k)\kappa'_2(l) \quad (k \in \{0, 1, 2, \dots\}). \quad (43_4)$$

Затем, в силу (12₁), (42₁), собственными функциями и значениями являются

$$v_1^k(x) = \frac{1}{\mu_1} \exp\left(-\left(\frac{1}{2}\kappa'_1(l)x^2 + b_1x + c_1\right)\right) \times \quad (43_2)$$

$$\times \partial_x^{k+1} \exp\left(+\left(\frac{1}{2}\kappa'_1(l)x^2 + b_1x + c_1\right)\right),$$

$$\lambda_1^k = -(1+k)\kappa'_1(l) \quad (k \in \{0, 1, 2, \dots\}).$$

Другие варианты аналогичных отношений будут рассмотрены во второй части этой работы (см. также замечания 1 и 2).

Понятно, что похожие утверждения имеет место в случае собственного оператора интегрирования (27) (см. текст между отношениями (26) и (36)). Продолжение настоящей работы с упором на приложения к специальным функциям и *барифункциям* во второй части этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методы математической физики. Специальные функции / В.Г. Багров, В.В. Белов, В.Н. Задорожный, А.Ю. Трифонов. Томск: НТЛ, 2002. 352 с.
2. *Бейтмен Г.* Высшие трансцендентные функции. II / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1976. 296 с.
3. *Бородин А.В.* О новых полугрупповых свойствах ортогональных полиномов // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2016. С. 20–31.
4. *Бородин А.В.* Одномерный барилинейный анализ и изоспектральные уравнения Шредингера. Ярославль, 1977. 177 с.
5. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1977. 736 с.
6. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981. 342 с.
7. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985. 336 с.

УДК 514.76

А. В. Букушева

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
Россия, г. Саратов, *e-mail*: bukusheva@list.ru

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ НЕГОЛОНОМНОГО МНОГООБРАЗИЯ КЕНМОЦУ

Вводится понятие структуры неголономного многообразия Кенмоцу. В отличие от многообразия Кенмоцу, распределение неголономного многообразия Кенмоцу не интегрируемо. На распределении K -контактного метрического многообразия определяется почти контактная метрическая структура, называемая в работе продолженной почти контактной метрической структурой. Доказывается, что продолженная структура является структурой неголономного многообразия Кенмоцу тогда и только тогда, когда в качестве исходного многообразия выбирается сасакиево многообразие с распределением нулевой кривизны.

Ключевые слова: *неголономное многообразие Кенмоцу, внутренняя связность почти контактного метрического многообразия, продолженная почти контактная метрическая структура, многообразие Сасаки.*

A. V. Bukusheva

G.N. Chernyshevsky National Research Saratov State University
Russia, Saratov, e-mail: bukusheva@list.ru

AN EXAMPLE OF NONHOLONOMIC KENMOTSU MANIFOLD

The notion of the structure of a nonholonomic Kenmotsu manifold is introduced. The distribution of a nonholonomic Kenmotsu manifold is not integrable, unlike the Kenmotsu manifold. An almost contact metric structure is defined on the distribution of a K-contact metric manifold. This structure is called in the paper an extended almost contact metric structure. It is proved that the extended structure is the structure of a nonholonomic Kenmotsu manifold if and only if a Sasakian manifold with a distribution of zero curvature is chosen as the initial manifold.

Keywords: *nonholonomic Kenmotsu manifold, interior connection of an almost contact metric manifold, extended almost contact metric structure, Sasaki manifold.*

1. Введение. В работе [1] исследовалось многообразие Кенмоцу с заданной на нем N -связностью. Из условия интегрируемости распределения многообразия Кенмоцу следует, что N -связность относится к классу четверть-симметрических связностей [9]. В указанной работе среди N -связностей был выделен класс связностей, адаптированных к структуре многообразия Кенмоцу. В частности, было доказано, что N -связность сохраняет структурный эндоморфизм φ многообразия Кенмоцу тогда и только тогда, когда эндоморфизмы N и φ коммутируют. Найденные в адаптированных координатах коэффициенты связности Леви-Чивита и N -связности многообразия Кенмоцу использовались при исследовании свойств инвариантов внутренней геометрии многообразия Кенмоцу. В настоящей работе вводится понятие неголономного многообразия Кенмоцу. Главное отличие неголономного многообразия Кенмоцу от «классического» многообразия Кенмоцу заключается в том, в неголономном случае распределение изучаемого многообразия не обладает свойством инволютивности. Приводится два примера неголономного многообразия Кенмоцу. Один из примеров представляет самостоятельный интерес и посвящен описанию специальным образом продолженной структуры, определяемой на распределении нулевой кривизны сасакиева многообразия. Для построения продолженной структуры неголономного многообразия Кенмоцу используются N -связности, возникающие на почти контактном метрическом многообразии.

2. Основные сведения из геометрии многообразий Кенмоцу. Почти контактном метрическим многообразием называется гладкое мно-

гообразии M нечетной размерности $n=2m+1$, $m > 1$ с заданной на нем почти контактной метрической структурой $(M, \xi, \eta, \varphi, g)$ [2-4]. Здесь, в частности, η – 1-форма, порождающая распределение $D: D = \ker(\eta)$, ξ – векторное поле, определяющее оснащение D^\perp распределения $D: D^\perp = \text{span}(\xi)$. Гладкое распределение D будем называть распределением почти контактного метрического многообразия. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^\perp$. Почти контактное метрическое многообразие называется нормальным, если выполняется условие $N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0$, где $N_\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = [\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}] + \varphi^2[\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\varphi\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\vec{x}, \varphi\vec{y}]$ – тензор Нейенхейса эндоморфизма φ . Нормальное почти контактное метрическое многообразие называется многообразием Кенмоцу, если $d\eta = 0$, $d\Omega = 2\eta \wedge \Omega$ [11, 12]. Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивита тензора g : $\bar{\nabla}$, $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$. Известно, что почти контактное метрическое многообразие M является многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда

$$(\bar{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = -\eta(\vec{y})\varphi\vec{x} - g(\vec{x}, \varphi\vec{y})\xi.$$

Для многообразий Кенмоцу также оказываются верными следующие равенства:

$$(\bar{\nabla}_{\vec{x}}\eta)\vec{y} = g(\vec{x}, \vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y}), L_{\bar{\xi}}g = 2(g - \eta \otimes \eta).$$

Карту $k(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n; a, b, c = 1, \dots, n-1$) многообразия M будем называть адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \bar{\xi}$ [5-7]. Пусть $P: TM \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $k(x^\alpha)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ порождают распределение $D: D = \text{span}(\vec{e}_a)$. Неголономное поле базисов $(\vec{e}_a) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ будет активно использоваться в процессе проведения вычислений. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Из условия $\bar{\xi} \in \ker\omega$ следует, что $\partial_n \Gamma_a^n = 0$. Пусть $k(x^\alpha)$ и $k'(x^{\alpha'})$ – адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^{\alpha'}(x^{\alpha'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{\alpha'})$.

Преобразование компонент допустимого тензорного поля t в адаптированных координатах подчиняется следующему закону [8]:

$$t_b^a = A_a^{\alpha'} A_b^{\beta'} t_{b'}^{\alpha'}, \text{ где } A_a^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^a}.$$

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t_b^a$ являются компонентами допустимого тензорного поля. Заметим, что обращение в нуль производных $\partial_n t_b^a$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Пусть $\psi: D \rightarrow D$ – эндоморфизм, определяемый равенством $\omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\psi\vec{x}, \vec{y})$.

Имеет место следующее предложение [10].

Предложение 1. Коэффициенты связности Леви-Чивита почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \frac{1}{2}g^{ad}(\tilde{e}_b g_{cd} + \tilde{e}_c g_{bd} - \tilde{e}_{bc}), \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab}, \quad \tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{na}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^\alpha = 0, \partial e C_{ab} = \frac{1}{2} \partial_n g_{ab}, \quad C_b^a = g^{da} C_{db}, \quad \psi_a^c = g^{bc} \omega_{ab}.$$

Для многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах получаем

$$C_{ab} = g_{ab}, \quad C_a^b = \delta_a^b, \quad \omega_{ba} = 0, \quad \psi_a^c = 0.$$

Таким образом, в качестве следствия предложения 1 получаем

Предложение 2. Коэффициенты связности Леви-Чивита многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \frac{1}{2}g^{ad}(\tilde{e}_b g_{cd} + \tilde{e}_c g_{bd} - \tilde{e}_{bc}), \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = -g_{ab}, \quad \tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = \delta_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{na}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^\alpha = 0.$$

Внутренней линейной связностью ∇ на многообразии с почти контактной метрической структурой [10] называется отображение $\nabla: \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{f_1 \vec{x} + f_2 \vec{y}} = f_1 \nabla_{\vec{x}} + f_2 \nabla_{\vec{y}}$,
- 2) $\nabla_{\vec{x}} f \vec{y} = (\vec{x}f) \vec{y} + f \nabla_{\vec{x}} \vec{y}$,
- 3) $\nabla_{\vec{x}} (\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} + \nabla_{\vec{x}} \vec{z}$,

где $\Gamma(D)$ - модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c$. Из равенства

$\vec{e}_a = A_a^{\alpha'} \vec{e}_{\alpha'}$, где $A_a^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^a}$, следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности:

$$\Gamma_{ab}^c = A_a^{\alpha'} A_b^{\beta'} A_c^{\gamma'} \Gamma_{\alpha' \beta'}^{\gamma'} + A_c^{\gamma'} \vec{e}_a A_b^{\delta'}$$

Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным $S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} - \nabla_{\vec{y}} \vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}]$.

Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем $S_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c$.

На почти контактном метрическом многообразии внутреннюю связность всегда можно получить с помощью равенства $\nabla_{\vec{x}} \vec{y} = P \vec{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$. Как мы видим, $\Gamma_{ab}^c = \tilde{\Gamma}_{ab}^c$.

3. Основные понятия геометрии неголономных многообразий Кенмоцу. Гладкое многообразие M с заданной на нем почти контактной

нормальной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ назовем неголономным многообразием Кенмоцу, если выполняется равенство $L_{\vec{\xi}}g = 2(g - \eta \otimes \eta)$.

Предложение 3. Коэффициенты связности Леви-Чивита неголономного многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ab}^c &= \frac{1}{2}g^{ad}(\tilde{e}_b g_{cd} + \tilde{e}_c g_{bd} - \tilde{e}_{bc}), & \tilde{\Gamma}_{ab}^n &= \omega_{ba} - g_{ab}, \\ \tilde{\Gamma}_{an}^b &= \tilde{\Gamma}_{na}^b = \delta_a^b + \psi_a^b, & \tilde{\Gamma}_{na}^n &= \tilde{\Gamma}_{nn}^a = 0. \end{aligned}$$

Результаты предложения 3 использовались при доказательстве следующего утверждения.

Предложение 4. Почти контактное метрическое многообразие является неголономным многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда

$$(\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = \eta(\vec{y})F\vec{x} - (\omega(\vec{x}, \varphi\vec{y}) - g(\vec{x}, \varphi\vec{y}))\vec{\xi},$$

где $F = -\varphi - \psi \circ \varphi$.

Доказательство предложения опирается на равенство $L_{\vec{\xi}}g = 2(g - \eta \otimes \eta)$, а также на результаты работы [10], в которой было показано, что почти контактная метрическая структура нормальна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) $L_{\vec{\xi}}\varphi = 0$,
- 2) $\nabla\varphi = 0$,
- 3) $\omega(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}) = \omega(\vec{x}, \vec{y})$.

Первый пример неголономного многообразия Кенмоцу.

Пусть $M = R^3$, (∂_α) ($\alpha = 1, 2, 3$) – стандартный базис арифметического пространства. Определим на M 1-форму η , полагая, $\eta = dx^3 + x^2 dx^1$. Пусть далее $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2 \partial_3$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \partial_3$, $D = \text{span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Определим метрический тензор, полагая $g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = g(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = e^{2x^3}$, $g(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1$. Тем самым, добиваемся выполнения равенства $L_{\vec{\xi}}g = 2(g - \eta \otimes \eta)$. Структурный эндоморфизм зададим равенствами

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_2, \quad \varphi(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1, \quad \varphi(\vec{e}_3) = \vec{0}.$$

Отсюда непосредственно следует, что $L_{\vec{\xi}}\varphi = 0$ и

$$\omega(\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)) = -\omega(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = \omega(\vec{e}_1, \vec{e}_2).$$

Последнее означает выполнение равенства $\omega(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}) = \omega(\vec{x}, \vec{y})$.

Проводя непосредственные вычисления, убеждаемся в том, что ненулевыми компонентами связности Леви-Чивита являются следующие коэффициенты: $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = -x^2$. Таким образом, $\nabla\varphi = 0$.

4. Продолженная структура неголономного многообразия Кен-мощу. На распределении D K -контактного метрического многообразия структура гладкого многообразия определяется обычным образом [5-8]. А именно, в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ многообразия M ставится свертка $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на распределении D так, что $\tilde{K}(\vec{x}) = (x^\alpha, x^{n+a})$, где x^{n+a} - координаты допустимого вектора \vec{x} в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$: $\vec{x} = x^{n+a} \vec{e}_a$. Благодаря заданию внутренней связности ∇ получаем разложение распределения $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi: D \rightarrow M$ - естественная проекция, в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD - вертикальное распределение на тотальном пространстве D , а HD - горизонтальное распределение, порожаемое векторными полями $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b(x^\alpha) x^{n+c} \partial_{n+b}$.

Связность в векторном расслоении (D, π, M) , определяемую разложением $TD = \tilde{H}\tilde{D} \oplus VD$, где $\tilde{H}\tilde{D} = HD \oplus Span(\vec{u})$, $\vec{u}_{\vec{x}} = \vec{e} - (N\vec{x})^v$, $\vec{e} = \partial_n$, $\vec{x} \in D$, $(N\vec{x})^v$ - вертикальный лифт, назовем N - продолженной связностью [8]. Здесь $N: D \rightarrow D$ - поле допустимого тензора типа $(1, 1)$.

Координатное представление поля \vec{u} в базисе $(\vec{e}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ имеет вид $\vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$. В дальнейшем будем считать, что $N = 0$. В этом случае $\tilde{H}\tilde{D} = HD \oplus Span(\partial_n)$.

Имеют место следующие структурные уравнения:

$$[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n + x^{n+d} R_{bad}^c \partial_{n+c},$$

$$[\vec{e}_a, \partial_n] = x^{n+d} \partial_n \Gamma_{ad}^c \partial_{n+c},$$

$$[\vec{e}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}.$$

По аналогии с тем как это делается в случае касательного расслоения, векторному полю $\vec{x} \in \Gamma(TM)$, заданному на многообразии M , соотносится его горизонтальный лифт \vec{x}^h , при этом $\vec{x}^h \in \Gamma(HD)$ тогда и только тогда, когда \vec{x} - допустимое векторное поле: $\vec{x} \in \Gamma(D)$.

Используя полученные выше структурные уравнения, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1 [8]. Пусть ∇ - внутренняя симметричная связность s тензором кривизны Схоутена $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$. Тогда для всех $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$ и $\vec{p} \in D$ имеют место следующие равенства.

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^h] = [\vec{x}, \vec{y}]^h - \{R(\vec{x}, \vec{y})\vec{p}\}^v,$$

$$[\vec{x}^h, \vec{\xi}^h] = [\vec{x}, \vec{\xi}]^h + \{P(\vec{x}, \vec{p})\}^v,$$

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^v] = (\nabla_{\vec{x}} \vec{y})^v,$$

$$[\vec{x}^v, \vec{\xi}^h] = [\vec{x}, \vec{\xi}]^v.$$

Пусть $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$ - продолженная почти контактная метрическая структура, определяемая на распределении D многообразия M следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^h) &= \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = e^{2x^n} g(\vec{x}, \vec{y}), \\ \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^v) &= \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{u}) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{u}) = 0, \\ J\vec{x}^h &= (\varphi\vec{x})^h, \quad J\vec{x}^v = (\varphi\vec{x})^v, \quad J(\vec{u}) = \vec{0}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D), \quad \vec{u} = \partial_n = \vec{\xi}^h. \end{aligned}$$

Теорема 2. Почти контактная метрическая структура $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \vec{D})$, определяемая на распределении K -контактного метрического многообразия M , является структурой неголономного многообразия Кенмоцу тогда и только тогда, когда многообразии M - сасакиево многообразии нулевой кривизны.

Доказательство. Проверяем непосредственно, что

$$d\lambda(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = d\eta(\vec{x}, \vec{y}), \quad d\lambda(\vec{x}^v, \vec{y}^h) = 0, \quad d\lambda(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = 0, \quad d\lambda(\vec{z}, \vec{\xi}^h) = 0, \\ \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D), \quad \vec{z} \in \Gamma(TD).$$

Выясним, при каких условиях выполняется равенство

$$\tilde{N}_J = N_J + 2d\lambda \otimes \vec{u} = 0.$$

Опираясь на структурные уравнения, для $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$ получаем:

$$\tilde{N}_J(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = \{\tilde{N}_\varphi(\vec{x}, \vec{y})\}^h + \{R(\vec{x}, \vec{y})\vec{p} - R(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y})\vec{p} + \varphi R(\varphi\vec{x}, \vec{y})\vec{p} + \varphi R(\vec{x}, \varphi\vec{y})\vec{p}\}^v.$$

$$\tilde{N}_J(\vec{x}^h, \vec{\xi}^h) = \{-P(\vec{x}, \vec{p}) - \varphi P(\varphi\vec{x}, \vec{p})\}^v,$$

$$\tilde{N}_J(\vec{x}^h, \vec{y}^v) = \tilde{N}_J(\vec{x}^v, \vec{\xi}^h) = 0.$$

Известно, что обращение в нуль тензора Схоутена влечет равенство $P(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Таким образом, продолженная структура является нормальной почти контактной метрической структурой. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Букушева А.В. О геометрии многообразий Кенмоцу с N -связностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2019. №50. С. 48-60.
2. Букушева А.В. Связности над распределением и геодезические пульверизации / А.В. Букушева, С.В. Галаев // Изв. вузов. Математика. 2013. №4. С. 10-18.
3. Букушева А.В. Геометрия почти контактных гиперкелеровых многообразий / А.В. Букушева, С.В. Галаев // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2017. №48. С. 32-41.
4. Букушева А.В. О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию / А.В. Букушева, С.В. Галаев // Математика. Механика. 2005. №7. С. 12-14.
5. Букушева А.В. Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой / А.В. Букушева, С.В. Галаев // Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, №. 3. С. 17-22.
6. Галаев С.В. Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, №3(59). С. 53-63.

7. Галаев С.В. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, №3. С. 263-272.
8. Галаев С.В. N -продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Изв. вузов. Математика. 2017. №3. С. 15-23.
9. Гордеева И.А. Многообразия Римана-Картана / И.А. Гордеева, В.И. Паньженский, С.Е. Степанов // Итоги науки и техники (совр. математика и ее приложения). 2009. Т. 123. С. 110-141.
10. Bukusheva A.V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution / A.V. Bukusheva, S.V. Galaev // Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53), №2. P. 13-22.
11. Kenmotsu K. A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1972. V. 24. P. 93-103.
12. Pitis G. Geometry of Kenmotsu manifolds. Publishing House of Transilvania University of Brasov, Brasov, 2007. 160 pp.

УДК 514.76

С. В. Галаев

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, г. Саратов, e-mail: sgalaev@mail.ru

К-КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ, ОСНАЩЕННЫЕ КОСОСИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Доказывается, что если M - K -контактное метрическое многообразие, то метрическая кососимметрическая N -связность является плоской тогда и только тогда, когда M – многообразие Сасаки с нулевым тензором кривизны Схоутена.

Ключевые слова: многообразие Сасаки, внутренняя связность, плоская связность с кососимметрическим кручением, тензор Схоутена.

S. V. Galaev

G.N. Chernyshevsky National Research Saratov State University
Russia, Saratov, e-mail: sgalaev@mail.ru

K-CONTACT METRIC MANIFOLD WITH SKEW-SYMMETRIC CONNECTION

It is proved that if M is a K -contact metric manifold, then the metric skew-symmetric N -connection is flat if and only if it is a Sasaki manifold with zero Schouten curvature tensor.

Keywords: Sasaki manifold, interior connection, plane connection with skew-symmetric torsion, Schouten tensor.

Введение. Кососимметрической N -связностью на почти контактном метрическом многообразии M называется полу-метрическая N -связность ∇^N с кососимметрическим кручением. Задание на многообразии M полу-метрической N -связности эквивалентно заданию пары (∇, N) , где ∇ - внутренняя метрическая связность, $N: D \rightarrow D$ - эндоморфизм распределения D . Полу-метрическая N -связность с кососимметрическим кручением на почти контактном метрическом многообразии определена однозначно и является метрической тогда и только тогда, когда структурное поле $\vec{\xi}$ киллингово.

Особый интерес в контексте приложения римановой геометрии к теоретической физике вызывают римановы многообразия, оснащенные метрической связностью с кручением [1, 2]. Пусть $\tilde{\nabla}$ - связность Леви-Чивита риманова многообразия M , а ∇^N - метрическая связность с кручением $S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - [\vec{x}, \vec{y}]$. Известно [2], что если тензорное поле $\tilde{S}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = g(S(\vec{x}, \vec{y}), \vec{z})$, называемое нами также тензором кручения метрической связности, кососимметрично по всем аргументам, то многообразия $(M, \tilde{\nabla})$ и (M, ∇^N) находятся в проективном соответствии. Подробному описанию положения дел в области исследования (псевдо) римановых многообразий, оснащенных связностью (метрической или нет) приведено в работе [1]. Там же указано на то, что в случае почти контактных метрических многообразий основным объектом исследования являлись конкретные классы связностей с кручением – полусимметрические и четверть-симметрические связности.

В работе [3] автором настоящей статьи исследовались связности, определяемые на субримановом многообразии M контактного типа. Многообразии M оснащено субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g)$, где η и $\vec{\xi}$ 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и D^\perp . Указанные связности ассоциируются с парой (∇, N) , где ∇ - внутренняя метрическая связность, а $N: D \rightarrow D$ - эндоморфизм распределения D , названный в работе [3] структурным эндоморфизмом. Субриманово многообразии нечетной размерности, оснащенное дополнительно эндоморфизмом $\varphi: D \rightarrow D$ таким, что $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}$, называется почти контактными метрическими многообразиями. Для почти контактных метрических многообразий, образующих специальный класс римановых многообразий, естественным является выбор связности Леви-Чивита. Однако, в ряде случаев, больший интерес представляют связности, обеспечивающие параллельный перенос допустимых векторов (принадлежащих распределению D) вдоль допустимых кривых (касающихся распределения D).

В работе [3] было доказано, что на субримановом многообразии существует единственная N -связность ∇^N с ненулевым кососимметриче-

ским кручением S , которая является метрической тогда и только тогда, когда выполняется равенство $L_{\vec{\xi}}g = 0$. Там же была доказана теорема, утверждающая, что полу-метрическая N -связность с кососимметрическим кручением, заданная на субримановом многообразии контактного типа, является плоской тогда и только тогда, когда тензор Схоутена субриманова многообразия обращается в нуль и $\nabla N = 0$. В настоящей работе указанные выше результаты уточняются для случая K -контактного метрического многообразия. А именно, доказывается, что если M - K -контактное метрическое многообразие, то метрическая кососимметрическая N -связность является плоской тогда и только тогда, когда M – многообразии Сасаки с нулевым тензором кривизны Схоутена.

Свойства полу-метрической N -связности с кососимметрическим кручением, определяемой на многообразии Сасаки

Пусть M - гладкое многообразие размерности $n = 2m + 1, m \geq 1$ с заданной на нем структурой K -контактного метрического многообразия $(M, \vec{\xi}, \eta, g, \varphi, D)$, где η и $\vec{\xi}$ - 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и D^\perp .

Внутренней линейной связностью ∇ [8] на почти контактном метрическом многообразии называется отображение $\nabla: \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{f_1\vec{x} + f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$,
- 2) $\nabla_{\vec{x}}f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$,
- 3) $\nabla_{\vec{x}}(\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$,

где $\Gamma(D)$ - модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

Внутренняя связность определяет дифференцирование допустимых тензорных полей [8]. Вот так, например, определяется ковариантная производная эндоморфизма φ :

$$(\nabla_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = \nabla_{\vec{x}}(\varphi\vec{y}) - \varphi(\nabla_{\vec{x}}\vec{y}), \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D).$$

Известно [4, 5], что на почти контактном метрическом многообразии существует единственная внутренняя связность ∇ с нулевым кручением, такая, что $\nabla_{\vec{x}}g(\vec{y}, \vec{z}) = 0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$. Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}],$$

где $P: TM \rightarrow D$ - проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$.

Пусть $k(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n; a, b, c = 1, \dots, n - 1$) - карта многообразия M , адаптированная к распределению D [6]. Векторные поля

$P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ порождают систему $D: D = \text{Span}(\vec{e}_a)$. На многообразии M , таким образом, мы получаем неголономное поле базисов $(\vec{e}_a) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и сопряженное ему поле кобазисов $(dx^a, \eta = \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$.

Пусть $k(x^a)$ и $k'(x^{a'})$ - адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат:

$$x^a = x^a(x^{a'}), \quad x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'}).$$

Преобразование компонент допустимого тензорного поля t в адаптированных координатах подчиняется следующему закону [7]:

$$t_b^a = A_a^a A_b^{b'} t_{b'}^{a'}, \quad \text{где } A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}.$$

Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид:

$$t = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}.$$

Из определения почти контактной структуры следует, что аффинор φ является допустимым тензорным полем типа $(1,1)$. Поле аффинора φ , учитывая его свойства, мы называем допустимой почти комплексной структурой. Допустимую замкнутую внешнюю дифференциальную 2-форму максимального ранга будем называть допустимой симплектической 2-формой. Таким образом, в контактном случае форма $\omega = d\eta$ представляет собой естественный пример допустимой симплектической формы.

Пусть ω - произвольная допустимая внешняя 2-форма максимального ранга. В адаптированных координатах ненулевые компоненты ее внешнего дифференциала имеют следующий вид:

$$d\omega_{abc} = \frac{1}{3}(\vec{e}_a \omega_{bc} + \vec{e}_b \omega_{ca} + \vec{e}_c \omega_{ab}),$$

$$d\omega_{nab} = \frac{1}{3} \partial_n \omega_{ab}.$$

Пусть $\tilde{\nabla}$ - связность Леви-Чивита и $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ - ее коэффициенты. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 1. Коэффициенты связности Леви-Чивита K -контактного метрического многообразия в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba}, \quad \tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = -\varphi_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{na}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^a = 0,$$

где $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$.

Известно [3], что если $N: TM \rightarrow TM$ - эндоморфизм касательного расслоения многообразия M такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$, то на многооб-

рации M существует единственная линейная связность ∇^N с кручением $S(\vec{x}, \vec{y})$, однозначно определяемая следующими условиями:

- 1) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$;
- 2) $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{y} = \nabla_{\vec{x}} \vec{y}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$;
- 3) $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{\xi} = \vec{0}$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$.

В адаптированных координатах отличными от нуля коэффициентами связности $\nabla_{\vec{x}}^N$ являются

$$G_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}), \quad G_{na}^b = N_a^b.$$

Связность ∇^N названа нами полу-метрической связностью, поскольку $\nabla_{\vec{x}}^N g(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$.

Положим

$$\tilde{S}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = g(S(\vec{x}, \vec{y}), \vec{z}), \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM).$$

В адаптированных координатах возможно ненулевые компоненты тензора $\tilde{S}(\vec{e}_a, \vec{y}, \vec{z})$ будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\vec{e}_a, \vec{e}_b, \partial_n) &= 2\omega_{ab}, \\ \tilde{S}(\vec{e}_a, \partial_n, \vec{e}_b) &= -g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b), \\ \tilde{S}(\partial_n, \vec{e}_a, \vec{e}_b) &= g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b). \end{aligned}$$

Как видно из полученных равенств, тензор $\tilde{S}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ кососимметричен тогда и только тогда, когда $2\omega_{ab} = g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b)$ или $2\omega_{ab} = g_{bc}N_a^c$. Отсюда получаем $N_a^c = 2g^{cb}\omega_{ab}$. Таким образом, в силу равенства $\varphi_a^b = g^{bc}\omega_{ca}$ окончательно получаем $N_a^c = -2\varphi_a^c$. Тем самым, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Линейная связность ∇^N , заданная на K -контактном метрическом многообразии, кососимметрична тогда и только тогда, когда $N = -2\varphi$.*

В дальнейшем будем полагать, что для связности ∇^N выполняется условие $N = -2\varphi$.

Теорема 2. *Линейная связность ∇^N с эндоморфизмом $N = -2\varphi$, заданная на K -контактном метрическом многообразии, является метрической связностью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения связности ∇^N следует, что $\nabla_{\vec{c}}^N g_{ab} = 0$. Вычислим $\nabla_n^N g_{ab}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \nabla_n^N g_{ab} &= \partial_n g_{ab} - 2\varphi_a^c g_{cb} + 2\varphi_b^c g_{ac} = \partial_n g_{ab} + 2g^{cd}\omega_{da}g_{cb} + \\ & 2g^{cd}\omega_{db}g_{ac} = \partial_n g_{ab} + 2\omega_{ab} + 2\omega_{ba} = \partial_n g_{ab}. \end{aligned}$$

Учитывая, что для K -контактного метрического многообразия $\partial_n g_{ab} = 0$, убеждаемся в справедливости теоремы.

Пусть $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$, тензор кривизны связности ∇^N . Вычислим ненулевые компоненты тензора $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$. Имеем:

$$K_{abc}^d = R_{abc}^d \quad K_{anc}^d = \nabla_a N_c^d.$$

Здесь $R_{abc}^d = 2\vec{z}_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a||e||}^d\Gamma_{b]c}^e$ - компоненты тензора кривизны Схоутена [6], определяемого равенством

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]\vec{z}} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}], \quad Q = 1 - P.$$

Инвариантное представление тензора $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$ имеет вид

$$K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{y})(\nabla_{\vec{x}}N)\vec{z} - \eta(\vec{x})(\nabla_{\vec{y}}N)\vec{z}, \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM).$$

Известно [6], что так как многообразие Сасаки является нормальным многообразием, то имеет место равенство $\nabla\varphi = 0$ и, следовательно, $\nabla N = 0$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Полу-метрическая N-связность с кососимметрическим кручением, заданная на K-контактном метрическом многообразии M, является плоской тогда и только тогда, когда многообразии M есть многообразии Сасаки с нулевым тензором Схоутена.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гордеева И.А. Многообразия Римана-Картана / И.А. Гордеева, В.И. Паньженский, С.Е. Степанов // Итоги науки и техники (совр. математика и ее приложения). 2009. Т. 123. С. 110-141.
2. Agricola I. On the holonomy of connections with skew-symmetric torsion / I. Agricola, Th. Friedrich // Math. Ann. 2004. Vol. 328. P. 711-748.
3. Галаев С.В. Плоские полу-метрические кососимметрические связности на субримановых многообразиях // Современная геометрия и ее приложения: сб. тр. Междунар. науч. конф. (Казань, 4-7 сентября 2019 г.). Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2019. С. 46-49.
4. Букушева А.В. Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий / А.В. Букушева, С.В. Галаев // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2017. №48. С. 32-41.
5. Букушева А.В. Классификация почти контактных метрических структур на распределениях с внутренней симплектической связностью // Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2019. Т. 51, №1. С. 20-24.
6. Букушева А.В. Изометрические преобразования продолженных почти контактных метрических структур с метрикой полного лифта // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2016. №47. С. 39-47.
7. Галаев С.В. Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, №. 2. С. 138-147.
8. Bukusheva A.V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution / A.V. Bukusheva, S.V. Galaev // Bulletin of the Transilvania University of Braşov Series III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53), no.2. P. 13-22.

УДК 512.83

А. Б. Назимов¹, М. А. Очилова²

¹Вологодский государственный университет
Россия, г. Вологда, e-mail: n.akbar54@mail.ru

²Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова
Таджикистан, г. Худжанд, e-mail: maruff6686@mail.ru

О ЦИКЛИЧЕСКОМ БАЗИСЕ И КРАТНОМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ ВАНДЕРМОНДА

Рассматривается задача существования циклического базиса для данной квадратной матрицы. Существование такого базиса эквивалентно тому, что геометрическая кратность каждого собственного значения данной матрицы равнялась единице. Найдена формула для вычисления значения кратного определителя Вандермонда. Установлена связь между циклическим базисом и кратным определителем Вандермонда.

Ключевые слова: циклический базис, кратный определитель Вандермонда, жорданова форма матрицы, собственное значение, алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения.

A. B. Nazimov¹, M. A. Ochilova²

¹Vologda State University
Russia, Vologda, e-mail: n.akbar54@mail.ru

²B. Gafurov Khujand State University
Tajikistan, Khujand, e-mail: maruff6686@mail.ru

ON THE CYCLIC BASIS AND MULTIPLE VANDERMOND DETERMINANT

The problem of existence of a cyclic basis for a given square matrix is considered. The existence of such basis is equivalent to the fact that the geometric multiplicity of each eigenvalue of the given matrix was equal to one. The formula for calculating the value of the multiple of the Vandermonde determinant is found. The connection between the cyclic basis and the multiple of the Vandermonde determinant is established.

Keywords: cyclic basis, multiple Vandermonde determinant, Jordan form of the matrix, eigenvalue, algebraic and geometric multiplicity of eigenvalue.

1. Циклический базис. Пусть A – произвольная квадратная матрица порядка N , а $u \in \mathbb{C}^N$ – произвольный ненулевой вектор. Составим последовательность векторов

$$u, Au, A^2u, \dots \quad (1)$$

Так как рассматриваемое пространство конечномерное, то существует такое натуральное число $n : 1 \leq n \leq N$, что векторы

$$u, Au, \dots A^{n-1}u \quad (2)$$

линейно независимы, а вектор $A^n u$ есть линейная комбинация векторов системы (2).

В этой статье изучается следующая задача: какими свойствами должна обладать матрица A , чтобы существовал вектор $u \in \mathbb{C}^N$ такой, что первые N векторов системы (1)

$$u, Au, \dots A^{N-1}u \quad (3)$$

являются линейно независимыми.

Если система векторов (3) является линейно независимой, то она называется *циклическим базисом* [1].

Теорема 1. Для того чтобы система векторов (3) для некоторого вектора $u \in \mathbb{C}^N$ образовала циклический базис, необходимо и достаточно, чтобы геометрическая кратность каждого собственного значения матрицы A равнялась единице.

Доказательство теоремы 1 приведено в пункте 5.

Через $B = J(A)$ обозначим жорданову форму матрицы A . Невырожденную матрицу, приводящую матрицу A к жордановой форме, обозначим Q :

$$QAQ^{-1} = B, \quad (4)$$

где

$$B = J(A) = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_m \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad (5)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{k_i \times k_i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6)$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = N. \quad (7)$$

Наряду с системой (2) рассмотрим систему векторов

$$v, Bv, \dots B^{n-1}v, \quad (8)$$

где $v = Qu$. Нам понадобятся следующие два утверждения.

Достаточность. Пусть система векторов (9) является линейно независимой для любых значений $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, $0 \leq j < i \leq n-1$. При $\alpha_{ij} = 0$, $0 \leq j < i \leq n-1$ она совпадает с системой (2). Поэтому система (2) – линейно независимая. Достаточность доказана.

2. Кратный определитель Вандермонда. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ – произвольные числа. Определитель N -го порядка

$$W_N = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_N & \dots & \lambda_N^{N-1} \\ 1 & \lambda_{N-1} & \dots & \lambda_{N-1}^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{N-1} \end{vmatrix} \quad (11)$$

называется *определителем Вандермонда*. Для этого определителя справедливо рекуррентное соотношение

$$W_N = \prod_{1 \leq i \leq N-1} (\lambda_i - \lambda_N) \cdot W_{N-1} \quad (12)$$

и его значение вычисляется по формуле

$$W_N = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_i - \lambda_j). \quad (13)$$

Из равенства (13) следует, что если числа $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ – попарно различные, то определитель Вандермонда (11) не равен нулю.

Через $w_N(\lambda, k)$, где $1 \leq k \leq N$, обозначим матрицу размера $k \times N$ с первой строкой $(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{N-1})$, все последующие строки получают-ся из предыдущих почленным дифференцированием. Тогда

$$w_N(\lambda, k) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda^{k-2} & \lambda^{k-1} & \dots & \lambda^{N-1} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{(k-2)!}{(k-3)!} \lambda^{k-3} & \frac{(k-1)!}{(k-2)!} \lambda^{k-2} & \dots & \frac{(N-1)!}{(N-2)!} \lambda^{N-2} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{(k-2)!}{(k-4)!} \lambda^{k-4} & \frac{(k-1)!}{(k-3)!} \lambda^{k-3} & \dots & \frac{(N-1)!}{(N-3)!} \lambda^{N-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{(k-2)!}{0!} & \frac{(k-1)!}{1!} \lambda & \dots & \frac{(N-1)!}{(N-k+1)!} \lambda^{N-k+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{(k-1)!}{0!} & \dots & \frac{(N-1)!}{(N-k)!} \lambda^{N-k} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$, $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ – произвольные числа, причем $k_1 + \dots + k_m = N$, $1 \leq m \leq N$. Кратным определителем Вандермонда назовем определитель N -го порядка

$$W_N \begin{pmatrix} \lambda_1, \dots, \lambda_m \\ k_1, \dots, k_m \end{pmatrix} = \det \begin{bmatrix} w_N(\lambda_m, k_m) \\ w_N(\lambda_{m-1}, k_{m-1}) \\ \text{M} \\ w_N(\lambda_1, k_1) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Если $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 1$, то кратный определитель Вандермонда представляет классический определитель Вандермонда. Так же, как и сам определитель Вандермонда, кратный определитель Вандермонда не равен нулю, если $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ суть различные числа.

Для кратного определителя Вандермонда порядка N справедливы следующие рекуррентные соотношения:

1) если $k_2 = \dots = k_m = 1$, то

$$W_N \begin{pmatrix} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \\ k_1, 1, \dots, 1 \end{pmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_m)^{k_1} \prod_{i=1}^{m-1} (\lambda_i - \lambda_m) \cdot W_{N-1} \begin{pmatrix} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1} \\ k_1, 1, \dots, 1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

2) если $k_m \leq \min\{k_1, \dots, k_{m-1}\}$, то

$$W_N \begin{pmatrix} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \\ k_1, k_2, \dots, k_m \end{pmatrix} = 0!1!\dots(k_m - 1)! \cdot \prod_{i=1}^{m-1} (\lambda_i - \lambda_m)^{k_i k_m} W_{N-k_m} \begin{pmatrix} \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1} \\ k_1, \dots, k_{m-1} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Справедливость равенств (16) и (17) проверяется непосредственным вычислением.

Используя рекуррентные соотношения (16) и (17), можно получить формулу для вычисления значения кратного определителя Вандермонда. Пусть $\lambda_i, i = \overline{1, m}$ – произвольные комплексные числа, $k_i, i = \overline{1, m}$ – произвольные натуральные числа, $N = k_1 + \dots + k_m$. Тогда имеет место формула

$$W_N \begin{pmatrix} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \\ k_1, k_2, \dots, k_m \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^m 0!1!\dots(k_i - 1)! \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_i - \lambda_j)^{k_i k_j}. \quad (18)$$

3. Связь между циклическим базисом и кратным определителем Вандермонда. Цикличность базиса (3) означает существование вектора $u \in \mathbb{C}^N$ такого, что из равенства $\sum_{i=1}^{N-1} x_i A^i u = 0$ следует, что $x_i = 0$,

Для того чтобы однородная СЛАУ (21) имела только тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель СЛАУ (21) не равнялся нулю. Определителем СЛАУ (21) является определитель Вандермонда. Он не равен нулю тогда и только тогда, когда числа c_1, c_2, \dots, c_m являются попарно различными. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Уравнение

$$x_0E + x_1D + x_2D^2 + \dots + x_{m-1}D^{m-1} = 0, \quad (22)$$

где

$$D = \begin{bmatrix} d & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & d \end{bmatrix}_{m \times m}$$

имеет только нулевое решение.

Доказательство. Поэлементная запись первой строки уравнения (22) имеет вид

$$\begin{cases} x_0 + x_1d + x_2d^2 + \dots + x_{m-1}d^{m-1} = 0, \\ x_1 + 2x_2d + \dots + (m-1)x_{m-1}d^{m-2} = 0, \\ x_2 + \dots + \frac{1}{2}(m-1)(m-1)x_{m-1}d^{m-3} = 0, \\ \dots \\ x_{m-1} = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Из (23) получаем $x_0 = x_1 = \dots = x_{m-1} = 0$, что и требовалось установить.

4. Доказательство теоремы 2. Необходимость. Если геометрическая кратность каждого собственного значения матрицы B равна единице, то числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ являются попарно различными. Тогда, в силу формулы (18), кратный определитель Вандермонда не равен нулю. Необходимость доказана.

Достаточность. Если кратный определитель Вандермонда не равен нулю, то из равенства (18) следует, что числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ являются попарно различными. Отсюда и из лемм 3 и 4 следует, что ни одно из ненулевых собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ не может быть единственным ненулевым диагональным элементом в своей строке более одного раза, так как в этом случае размерность собственного подпространства этого собственного значения будет больше единицы. Если это наблюдается для нулевого собственного значения, то размерность ядра матрицы B будет больше едини-

цы. Тогда геометрическая кратность нулевого собственного значения будет больше единицы. Достаточность доказана.

Теорема 2 доказана.

5. Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть система векторов (3) линейно независимая. Докажем простоту каждого собственного значения матрицы A .

Действительно, из линейной независимости системы векторов (3) и леммы 1 вытекает линейная независимость системы векторов (19) для некоторого вектора $v \in \mathbb{C}^N$. Отсюда следует, что линейная комбинация $\sum_{i=0}^{N-1} x_i B^i v$ равна нулю только при $x_i = 0, i = \overline{0, N-1}$. Будем смотреть на ра-

венство $\sum_{i=0}^{N-1} x_i B^i v = 0$ как на однородную систему линейных уравнений от-

носительно неизвестных $x_i, i = \overline{0, N-1}$. Из тривиальности решения однородной системы вытекает, что определитель этой системы (кратный опреде-

литель Вандермонда $W_N \begin{pmatrix} \lambda_1, \dots, \lambda_m \\ k_1, \dots, k_m \end{pmatrix}$, составленный из собственных значений матрицы A) не равен нулю. Тогда из теоремы 2 следует, что геометрическая кратность каждого собственного значения матрицы B (а также и матрицы A) равна единице. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть геометрическая кратность каждого собственного значения матрицы A равна единице. Докажем существование вектора $u \in \mathbb{C}^N$, для которого система векторов (3) образует базис в \mathbb{C}^N .

Действительно, из теоремы 2, в силу простоты собственных значений матрицы A (а также и матрицы B), вытекает, что кратный определитель Вандермонда $W_N \begin{pmatrix} \lambda_1, \dots, \lambda_m \\ k_1, \dots, k_m \end{pmatrix}$, составленный из собственных значений матрицы A , не равен нулю. Если системы векторов (3) линейно зависи-

ма для любого вектора $u \in \mathbb{C}^N$, то и система векторов (19) линейно зависима. Тогда существует ненулевой набор $x_i, i = \overline{0, N-1}$ такой, что $\sum_{i=0}^{N-1} x_i B^i v = 0$. Следовательно, однородная система $\sum_{i=0}^{N-1} x_i B^i v = 0$ имеет не-

тривиальное решение. Но определитель этой системы $W_N \begin{pmatrix} \lambda_1, \dots, \lambda_m \\ k_1, \dots, k_m \end{pmatrix} \neq 0$

и потому система имеет только тривиальное решение. Полученное проти-

$$u_{01}, \left(A_1 - \lambda_1 E_{k_1}\right)u_{01}, \dots, \left(A_1 - \lambda_1 E_{k_1}\right)^{k_1-1} u_{01} \quad (31)$$

является линейно независимой. В силу леммы 2 и система векторов

$$u_{01}, A_1 u_{01}, \dots, A_1^{k_1-1} u_{01} \quad (32)$$

является линейно независимой.

С учетом (25) и (26) первое из уравнений системы (29) примет вид

$$\alpha_0 e_{k_1}^{(k_1)} + \alpha_1 e_{k_1-1}^{(k_1)} + \dots + \alpha_{k_1-1} e_1^{(k_1)} = 0. \quad (33)$$

Так как $e_1^{(k_1)}, \dots, e_{k_1}^{(k_1)}$ - линейно независимая система векторов, то из равенства (33) вытекают равенства $\alpha_0=0, \alpha_1=0, \dots, \alpha_{k_1-1}=0$.

Отсюда следует, что второе из равенств (29) можно записать в виде

$$\alpha_{k_1} A_2^{k_1} u_{02} + \alpha_{k_1+1} A_2^{k_1+1} u_{02} + \dots + \alpha_{n-1} A_2^{n-1} u_{02} = 0. \quad (34)$$

Из неравенства (30) следует, что уравнение (34) эквивалентно уравнению

$$\alpha_{k_1} u_{02} + \alpha_{k_1+1} A_2 u_{02} + \dots + \alpha_{n-1} A_2^{n-k_1-1} u_{02} = 0.$$

Повторив рассуждение, приведенное для первого из уравнений (29), получим $\alpha_{k_1}=0, \alpha_{k_1+1}=0, \dots, \alpha_{k_1+k_2-1}=0$. Продолжая это рассуждение, будем иметь $\alpha_{k_1+k_2}=0, \alpha_{k_1+k_2+1}=0, \dots, \alpha_{k_1+k_2+\dots+k_m-1}=0$. Согласно равенству (7) $k_1+k_2+\dots+k_m=n$. Поэтому равенство (28) имеет место только при условии $\alpha_0=\alpha_1=\dots=\alpha_{n-1}=0$. Это означает линейную независимость системы векторов (27). Отсюда и из леммы 1 вытекает, что система векторов (1) при $u=Q^{-1}u_0$ является линейно независимой. Здесь Q - матрица, приводящая A к жордановой форме B (см. (4)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.

УДК 517.925

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

О ГРУБОСТИ И БИФУРКАЦИЯХ УРАВНЕНИЙ БЕРНУЛЛИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Для уравнений Бернулли с периодическими коэффициентами рассматриваются фазовые портреты на компактификации цилиндрического фазового пространства. Описаны грубые уравнения – уравнения, топологическая структура фазовых портретов которых не меняется при малых возмущениях уравнения. Во множестве негрубых уравнений выделено открытое всюду плотное подмножество. Оно является подмногообразием коразмерности один в банаховом пространстве рассматриваемых уравнений и состоит из уравнений первой степени негрубости – уравнений, топологическая структура фазовых портретов которых не меняется при малых возмущениях во множестве всех негрубых уравнений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Бернулли с периодическими коэффициентами, цилиндрическое фазовое пространство, грубое уравнение, уравнение первой степени негрубости, бифуркационное многообразие.

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

ON STRUCTURAL STABILITY AND BIFURCATIONS FOR BERNOULLI EQUATIONS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

For Bernoulli equations with periodic coefficients, phase portraits on the compactification of a cylindrical phase space are considered. We describe structurally stable equations – the equations whose topological structure of phase portraits does not change with small perturbations of the equation. In the set of structurally unstable equations, an open everywhere dense subset is distinguished. This set is a submanifold of codimension one in the Banach space of the equations under consideration. It consists of first order structurally unstable equations – equations whose topological structure of phase portraits does not change under small perturbations in the set of all structurally unstable equations.

Keywords: Bernoulli differential equation with periodic coefficients, cylindrical phase space, structurally stable equation, first order structurally unstable equation, bifurcation manifold.

Будем рассматривать уравнение Бернулли

$$b : \dot{x} = b_1(t)x + b_2(t)x^\nu, \quad (1)$$

где $b_1(t)$ и $b_2(t)$ – ω -периодические C^r -функции ($r \geq 1$). Множество таких уравнений с фиксированным параметром $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ обозначим $B^r(\omega, \nu)$. Пусть C_ω^r – банахово пространство ω -периодических C^r -функций с C^r -нормой. Биекция $C_\omega^r \oplus C_\omega^r \rightarrow B^r(\omega, \nu)$, ставящая в соответствие элементу $(b_1, b_2) \in C_\omega^r \oplus C_\omega^r$ уравнение b , вводит в $B^r(\omega, \nu)$ структуру банахова пространства.

Обозначим

$$m_1(b) := \int_0^\omega b_1(t) dt, \quad m_2(b) := \int_0^\omega b_2(t) \exp \int_t^0 b_1(s) ds dt.$$

1. Фазовое пространство и траектории уравнения Бернулли

С уравнением (1) связано векторное поле

$$(b_1(s)x + b_2(s)x^\nu) \partial / \partial x + \partial / \partial s, \quad (2)$$

заданное на фазовом пространстве $\Phi_\nu := (0, \infty) \times \mathbb{R} / \omega\mathbb{Z}$. Будем его обозначать также b . Это векторное поле можно продолжить до векторного поля \bar{b} на фазовом пространстве $[0, \infty] \times \mathbb{R} / \omega\mathbb{Z}$, где $[0, \infty]$ – компактификация интервала $(0, \infty)$ [1]. Напомним, как это делается.

Сначала рассмотрим случай $\nu \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$. Превратим $[0, \infty]$ в одномерное C^∞ -многообразие с краем, взяв в качестве карт (U_k, h_k) , $k = 1, 2$, где $U_1 = [0, \infty)$, $h_1(x) = x^{1-\nu}$, $U_2 = (0, \infty]$, $h_2(x) = 1/x$ при $x \in (0, \infty)$ и $h_2(x) = 0$ при $x = \infty$. За новое фазовое пространство возьмем $\bar{\Phi}_\nu := [0, \infty] \times \mathbb{R} / \omega\mathbb{Z}$. Обозначим $\Gamma_0 := \{0\} \times \mathbb{R} / \omega\mathbb{Z}$ и $\Gamma_\infty := \{\infty\} \times \mathbb{R} / \omega\mathbb{Z}$.

Векторное поле (2) в координатах (y, s) , $y = h_1(x)$, $x \in (0, \infty)$ имеет вид

$$((1-\nu)b_1(s)y + (1-\nu)b_2(s)) \partial / \partial y + \partial / \partial s, \quad (3)$$

а в координатах (z, s) , $z = h_2(x)$, $x \in (0, \infty)$ – вид

$$(-b_1(s)z - b_2(s)z^{2-\nu}) \partial / \partial z + \partial / \partial s. \quad (4)$$

Продолжим теперь векторное поле b до C^1 -векторного поля \bar{b} на $\bar{\Phi}_\nu$, определив \bar{b} равенством (3) в координатах (y, s) в карте (U_1, h_1) и

равенством (4) в координатах (z, s) в карте (U_2, h_2) . Траектории поля \bar{b} будем называть *траекториями уравнения b на $\bar{\Phi}_v$* .

В точках Γ_0 поле \bar{b} имеет вид $(1-v)b_2(s)\partial/\partial y + \partial/\partial s$. Поэтому поле \bar{b} в точке $S_0 = (0, s_0)$ при $b_2(s_0) \neq 0$ трансверсально Γ_0 , а при $b_2(s_0) = 0$ касается Γ_0 . Точку $S_0 = (0, s_0)$ при $b_2(s_0) = 0$ будем называть *особой точкой* поля \bar{b} . Если при этом $b'_2(s_0) \neq 0$, то S_0 – *простая особая точка*.

Кривая Γ_∞ является периодической траекторией поля \bar{b} , устойчивой при $m_1(b) > 0$ и неустойчивой при $m_1(b) < 0$.

Векторное поле (3), рассматриваемое на $\mathbb{R} \times \mathbb{R} / \omega\mathbb{Z}$, в случае $m_1(b) \neq 0$ имеет единственную периодическую траекторию $y = Y(t)$, $s = t \bmod \omega$, являющуюся устойчивой (неустойчивой) гиперболической траекторией при $m_1(b) < 0$ ($m_1(b) > 0$). Если $\forall t \in [0, \omega] Y(t) \geq 0$, то уравнения $y = Y(t)$, $s = t \bmod \omega$ задают и периодическую траекторию уравнения b в $\bar{\Phi}_v$.

Замечание. При $v \in (0, 1)$ векторное поле b определено на $[0, \infty) \times \mathbb{R} / \omega\mathbb{Z}$, и Γ_0 – его периодическая траектория. На первый взгляд в этом случае на $[0, \infty]$ естественно рассматривать и другую гладкую структуру, взяв в качестве карт $(\tilde{U}_1, \tilde{h}_1)$ и (U_2, h_2) , где $\tilde{U}_1 = [0, \infty)$, $\tilde{h}_2(x) = x$, а (U_2, h_2) определена так же, как и выше. Продолжим векторное поле b до непрерывного векторного поля \bar{b}_* на $[0, \infty) \times \mathbb{R} / \omega\mathbb{Z}$, определив \bar{b}_* равенством (2) в координатах (x, s) в карте $(\tilde{U}_1, \tilde{h}_1)$ и равенством (4) в координатах (z, s) в карте (U_2, h_2) . Поскольку переход от координат (y, s) к координатам (x, s) имеет вид $x = y^{1/(1-v)}$, где показатель $1/(1-v) > 1$, то дуги всех траекторий поля \bar{b} , отличных от точки, проходящие через точки Γ_0 , преобразуются в дуги траектории поля \bar{b}_* , проходящие через точки Γ_0 и касающиеся Γ_0 . Таким образом, через каждую точку Γ_0 проходит более одной траектории поля \bar{b}_* . Этими обстоятельствами и объясняется выбор фазового пространства $\bar{\Phi}_v$ и поля \bar{b} .

Пусть теперь $v \in (1, \infty)$. Структуру гладкого многообразия на $[0, \infty]$ определим, взяв в качестве локальных карт (U_k, h_k) , $k = 1, 2$, где $U_1 = [0, \infty)$, $h_1(x) = x$, $U_2 = (0, \infty]$, $h_2(x) = x^{1-v}$ при $x \in (0, \infty)$ и $h_3(x) = 0$ при $x = \infty$. Тогда в карте (U_1, h_1) векторное поле \bar{b} имеет вид (2), а в карте (U_2, h_2) вид (3).

Кривая Γ_0 является периодической траекторией поля \bar{b} , устойчивой при $m_1(b) < 0$ и неустойчивой при $m_1(b) > 0$. Нулям s_0 функции b_2 , соответствуют особые точки $S_0 = (\infty, s_0) \in \Gamma_\infty$, в которых поле \bar{b} касается Γ_∞ . Уравнения $y = Y(t)$, $s = t \bmod \omega$, задающие периодическую траекторию поля (3) на $\mathbb{R} \times \mathbb{R} / \omega\mathbb{Z}$, задают при условии $\forall t \in [0, \omega]$ $Y(t) \geq 0$ и периодическую траекторию поля \bar{b} , устойчивую, если $m_1(b) > 0$ и неустойчивую, если $m_1(b) < 0$.

2. Грубость в пространстве $V^r(\omega, v)$

Будем говорить, что уравнения b и b_* из $V^r(\omega, v)$ топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм $h: \bar{\Phi}_v \rightarrow \bar{\Phi}_v$, переводящий траектории уравнения b в $\bar{\Phi}_v$ в траектории уравнения b_* в $\bar{\Phi}_v$ с сохранением ориентации на них.

Уравнение $b \in V^r(\omega, v)$ назовем *грубым*, если существует такая его окрестность V в $V^r(\omega, v)$, что b и любое уравнение $b_* \in V$ топологически эквивалентны.

Если s_0 – простой нуль функции b_2 ($b_2'(s_0) \neq 0$), то $S_0 = (0, s_0) \in \Gamma_0$ при $v \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ и $S_0 = (\infty, s_0) \in \Gamma_\infty$ при $v \in (1, \infty)$ будем называть *простой особой точкой*.

Особую точку S_0 уравнения b назовем *существенной*, если она является внутренней точкой траектории, проходящей через S_0 , или эта траектория состоит из единственной точки S_0 . Простые особые точки являются существенными. При гомеоморфизме фазового пространства, переводящего траектории в траектории, существенные особые точки и только они переходят в существенные особые точки, а любая дуга траектории, идущая из существенной особой точки в существенную особую точку, переходит в дугу траектории, идущую из существенной особой точки в существенную особую точку.

Обозначим $\Sigma^0 B^r(\omega, \nu)$ множество уравнений $b \in B^r(\omega, \nu)$, для которых: 1) $m_1(b) \neq 0$, 2) все особые точки простые, 3) не существует траектории, идущей из особой точки в особую точку.

Как и в работе [1], где рассматривался случай $r = 1$, доказывается

Теорема 1. *Множество $\Sigma^0 B^r(\omega, \nu)$ открыто и всюду плотно в $B^r(\omega, \nu)$. Уравнение Бернулли $b \in B^r(\omega, \nu)$ является грубым тогда и только тогда, когда $b \in \Sigma^0 B^r(\omega, \nu)$.*

3. Уравнения первой степени негрубости.

Бифуркационные многообразия коразмерности один

3.1. Формулировка результатов. Пусть $r \geq 2$.

Будем говорить, что уравнение $b \in B^r(\omega, \nu)$ имеет *первую степень негрубости*, если оно негрубое и существует такая его окрестность V в $B^r(\omega, \nu)$, что b и любое негрубое уравнение из V топологически эквивалентны.

Определим подмножества $\Sigma_i^1 B^r(\omega, \nu)$, $i = 1, 2, 3, 4$, в $B^r(\omega, \nu)$ следующим образом.

$\Sigma_1^1 B^r(\omega, \nu)$ состоит из уравнений b , для которых $m_1(b) = 0$, $m_2(b) \neq 0$; все особые точки простые; не существует траектории, идущей из особой точки в особую точку.

$\Sigma_2^1 B^r(\omega, \nu)$ состоит из уравнений b , для которых $m_1(b) \neq 0$; все особые точки простые, за исключением одной точки $S_0 = (0, s_0) \in \Gamma_0$ при $\nu \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ и $S_0 = (\infty, s_0) \in \Gamma_\infty$ при $\nu \in (1, \infty)$, для которой $b_2(s_0) = b_2'(s_0) = 0$, а $b_2''(s_0) \neq 0$; не существует траекторий, идущих из особой точки в особую точку.

$\Sigma_3^1 B^r(\omega, \nu)$ состоит из уравнений b , для которых $m_1(b) \neq 0$; все особые точки простые; не существует траекторий, идущих из особой точки в особую точку, за исключением периодической траектории, содержащей единственную особую точку.

$\Sigma_4^1 B^r(\omega, \nu)$ состоит из уравнений b , для которых $m_1(b) \neq 0$; все особые точки простые; не существует траекторий, идущих из особой точки в особую точку, за исключением неперидической траектории, проходящей ровно через две особых точки.

Пусть $\Sigma^1 B^r(\omega, \nu) := \bigcup_{i=1}^4 \Sigma_i^1 B^r(\omega, \nu)$.

При $r \geq 3$ обозначим $\Sigma_*^2 B^r(\omega, \nu)$ множество уравнений $b \in B^r(\omega, \nu)$, для которых $m_1(b) \neq 0$; все особые точки простые, за исключением одной точки $S_0 = (0, s_0) \in \Gamma_0$ при $\nu \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ и $S_0 = (\infty, s_0) \in \Gamma_\infty$ при $\nu \in (1, \infty)$, для которой $b_2(s_0) = b_2'(s_0) = b_2''(s_0) = 0$, а $b_2'''(s_0) \neq 0$; не существует траекторий, идущих из особой точки в особую точку. Нетрудно убедиться, что $\Sigma_*^2 B^r(\omega, \nu)$ содержится в замыкании множества $\Sigma^1 B^r(\omega, \nu)$.

Теорема 2. 1) Множества $\Sigma_i^1 B^r(\omega, \nu)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, и $\Sigma_*^2 B^r(\omega, \nu)$ непустые.

2) $\Sigma^1 B^r(\omega, \nu)$ открыто и всюду плотно в $B^r(\omega, \nu) \setminus \Sigma^0 B^r(\omega, \nu)$.

3) $\Sigma^1 B^r(\omega, \nu)$ – вложенное C^{r-1} -подмногообразие $B^r(\omega, \nu)$ коразмерности один.

4) При $r = 2$ уравнение $b \in B^r(\omega, \nu)$ имеет первую степень негрубости тогда и только тогда, когда $b \in \Sigma^1 B^r(\omega, \nu)$.

При $r \geq 3$ уравнение $b \in B^r(\omega, \nu)$ имеет первую степень негрубости тогда и только тогда, когда $b \in \Sigma^1 B^r(\omega, \nu) \cup \Sigma_*^2 B^r(\omega, \nu)$.

Доказательство приводится далее в пунктах 3.2–3.4. Ограничимся случаем $\nu \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$. При $\nu \in (1, \infty)$ доказательство аналогично.

3.2. Открытость и плотность $\Sigma^1 B^r(\omega, \nu)$. Открытость множества $\Sigma^1 B^r(\omega, \nu)$ в $B^r(\omega, \nu) \setminus \Sigma^0 B^r(\omega, \nu)$ очевидна. Докажем плотность.

Пусть $b \in B^r(\omega, \nu) \setminus \Sigma^0 B^r(\omega, \nu) \setminus \Sigma^1 B^r(\omega, \nu)$, V – его произвольная окрестность в $B^r(\omega, \nu)$. Надо доказать, что $V \cap \Sigma^1 B^r(\omega, \nu) \neq \emptyset$.

Для уравнения b имеем один из следующих вариантов:

А) У уравнения есть особая точка, не являющаяся простой.

Б) Все особые точки уравнения простые, $m_1(b) = 0$.

В) Все особые точки уравнения простые, $m_1(b) \neq 0$.

В варианте А) пусть $S_0 = (0, s_0) = (0, t_0 \bmod \omega)$ – непростая особая точка: $b_2(t_0) = b_2'(t_0) = 0$. Возможны два случая: А1) $b_2''(t_0) \neq 0$ и А2) $b_2''(t_0) = 0$.

В случае А1) существует такое число $\varepsilon \in (0, \omega/3)$, что $\text{sgn } b_2(t) = \text{sgn } b_2''(t_0)$ при $0 < |t - t_0| \leq \varepsilon$. Рассмотрим семейство уравнений $b^{\alpha, \beta} \in B^r(\omega, \nu)$: $\dot{x} = (b_1(t) + \beta)x + b_2^\alpha(t)x^\nu$, где

$$b_2^\alpha(t) = b_2(t) - \alpha \text{sgn } b_2''(t_0) \lambda(t),$$

а $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ – такая ω -периодическая C^∞ -функция, что $\lambda(t) = 0$ для $t_0 - \varepsilon/3 \leq t \leq t_0 + \varepsilon/3$ и $\lambda(t) = 1$ для $t_0 + 2\varepsilon/3 \leq t \leq t_0 + \omega - 2\varepsilon/3$. При достаточно малом $\delta > 0$ для любых $\alpha, \beta \in (0, \delta)$ $b^{\alpha, \beta} \in V$, $m_1(b^{\alpha, \beta}) \neq 0$, $b_2^\alpha(t)$ имеет на $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ единственный нуль t_0 , причем $b_2^\alpha(t_0) = (b_2^\alpha)'(t_0) = 0$, $(b_2^\alpha)''(t_0) \neq 0$. Из теоремы Сарда [2], примененной к функции $b_2(t) / (\text{sgn } b_2''(t_0) \lambda(t))$, следует, что найдется $\alpha_0 \in (0, \delta)$, при котором функция $b_2^{\alpha_0}(t)$ имеет на интервале $(t_0 + \varepsilon, t_0 + \omega - \varepsilon)$ только простые нули. Как и в [1], доказывается, что при некотором $\beta_0 \in (0, \delta)$ уравнение b^{α_0, β_0} не имеет траекторий, идущих из особой точки в особую точку. Таким образом, $b^{\alpha_0, \beta_0} \in V \cap \Sigma_2^1 B^r(\omega, \nu)$, и потому $V \cap \Sigma^1 B^r(\omega, \nu) \neq \emptyset$.

В случае А2) рассмотрим семейство уравнений

$$b^\mu \in B^r(\omega, \nu) : \dot{x} = (b_1(t) + \mu)x + b_2^\mu(t)x^\nu,$$

где $b_2^\mu(t) = b_2(t) + \mu \sin^2(2\pi(t - t_0)/\omega)$. При достаточно малом $\mu > 0$ $b^\mu \in V$, $m_1(b^\mu) \neq 0$, $b_2^\mu(t_0) = (b_2^\mu)'(t_0) = 0$, $(b_2^\mu)''(t_0) \neq 0$, то есть для уравнения b^μ имеем случай А1). Выбрав окрестность V_* уравнения b^μ так, чтобы $V_* \subset V$, согласно доказанному выше получим, что $V_* \cap \Sigma^1 B^r(\omega, \nu)$, а потому и $V \cap \Sigma^1 B^r(\omega, \nu)$ – непустое множество.

В варианте Б) рассмотрим семейство уравнений

$$b^\mu \in B^r(\omega, \nu) : \dot{x} = b_1(t)x + b_2^\mu(t)x^\nu, \quad b_2^\mu(t) = b_2(t) + \mu\gamma(t),$$

где $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ – такая ω -периодическая C^∞ -функция, что $\gamma(t) = 0$ в непересекающихся между собой окрестностях нулей функции $b_2(t)$, а между любыми последовательными нулями $t_1 < t_2$ функции $b_2(t)$ существует такое число t_* , что $\gamma(t_*) = 1$. При достаточно малом $\delta > 0$ для всех $\mu \in (0, \delta)$ $b^\mu \in V$, $m_1(b^\mu) = m_1(b) = 0$, $m_2(b^\mu) \neq 0$, и все особые точки уравнения b^μ совпадают с особыми точками уравнения b .

Пусть $S_0 = (0, s_0 = t_0 \bmod \omega)$ и $S_1 = (0, s_1 = t_1 \bmod \omega)$, $t_0 < t_1 \leq t_0 + \omega$, – особые точки. Уравнение

$$\dot{y} = (1 - \nu)b_1(t)y + (1 - \nu)(b_2(t) + \mu\gamma(t))$$

имеет решение

$$Y(t, \mu) = (1 - \nu) \int_{t_0}^t (b_2(\tau) + \mu \gamma(\tau)) \exp \int_{\tau}^t (1 - \nu) b_1(\xi) d\xi d\tau,$$

удовлетворяющее начальному условию $Y(t_0, \mu) = 0$. Предположим, что при некотором $\mu_0 \in (0, \delta)$ имеется дуга траектории уравнения b^{μ_0} , идущая из S_0 в S_1 . Тогда эта дуга задается в координатах y, s уравнениями $y = Y(t, \mu_0)$, $s = t \bmod \omega$, $t_0 \leq t \leq t_1$. Поскольку при $t > t_0$ $Y(t, \mu)$ – возрастающая функция от μ , то при $\mu \neq \mu_0$ $Y(t_1, \mu) \neq 0$, и потому траектория уравнения b^μ , начинающаяся в точке S_0 , не идет в точку S_1 . Так как особых точек конечное число, то найдется $\mu_* \in (0, \delta)$, при котором b^{μ_*} не имеет траекторий, идущих из особой точки в особую точку, и потому $b^{\mu_*} \in V \cap \Sigma_3^1 B^r(\omega, \nu)$.

В варианте В) существуют, по меньшей мере, две дуги траекторий, концы которых – особые точки. Выберем дугу, соединяющую особые точки $S_0 = (0, s_0 = t_0 \bmod \omega)$ и $S_1 = (0, s_1 = t_1 \bmod \omega)$, $t_0 < t_1 < t_0 + \omega$, между которыми не существует особой точки $S_* = (0, s_* = t_* \bmod \omega)$, $t_0 < t_* < t_1$, для которой траектория уравнения b , начинающаяся в этой точке идет в особую точку. Аналогично варианту Б) рассмотрим семейство уравнений b^μ , где теперь $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ – такая ω -периодическая C^∞ -функция, что $\gamma(t) = 0$ для $t \in [t_0, t_1]$ и $\gamma(t) > 0$ для $t \in (t_1, t_0 + \omega)$. Тогда при всех $\mu \in (0, \delta)$ траектория уравнение b^μ имеет дугу траектории, идущую из S_0 в S_1 , и найдется $\mu_* \in (0, \delta)$, при котором b^{μ_*} не имеет других дуг траекторий, идущих из особой точки в особую точку. Потому $b^{\mu_*} \in V \cap \Sigma_4^1 B^r(\omega, \nu)$.

Таким образом, плотность $\Sigma^1 B^r(\omega, \nu)$ в $B^r(\omega, \nu) \setminus \Sigma^0 B^r(\omega, \nu)$ доказана.

3.3. Необходимость условий первой степени негрубости. Пусть уравнение $b \in B^r(\omega, \nu)$ имеет первую степень негрубости и V – его окрестность, о которой говорится в определении первой степени негрубости. Покажем, что при $r = 2$ $b \in \Sigma^1 B^r(\omega, \nu)$, а при $r \geq 3$ $b \in \Sigma^1 B^r(\omega, \nu) \cup \Sigma_*^2 B^r(\omega, \nu)$.

Для уравнения b рассмотрим возможные варианты:

- (а) Все особые точки уравнения простые, $m_1(b) \neq 0$.
- (б) Все особые точки уравнения простые, $m_1(b) = 0$.
- (в) Уравнение имеет непростую особую точку.

Рассмотрим вариант (а). Поскольку $\Sigma^1 B^r(\omega, \nu)$ всюду плотно в $B^r(\omega, \nu)$, то в окрестности V имеется уравнение $b_* \in \Sigma^1 B^r(\omega, \nu)$. Мы можем считать V столь малой, что все особые точки уравнения b_* простые, $m_1(b_*) \neq 0$, то есть $b_* \in \Sigma_3^1 B^r(\omega, \nu) \cup \Sigma_4^1 B^r(\omega, \nu)$. Так как уравнения b и b_* топологически эквивалентны, то b имеет единственную траекторию, замкнутую или незамкнутую, идущую из особой точки в особую точку, то есть b принадлежит или $\Sigma_3^1 B^r(\omega, \nu)$, или $\Sigma_4^1 B^r(\omega, \nu)$.

В варианте (б) покажем, что у b нет траекторий, идущих из особой точки в особую точку. Для этого предположим на время, что такая траектория L , идущая из особой точки S_0 в особую точку S_1 , имеется. Как следует из п. 3.2, в окрестности V найдется уравнение $b_0 \in V$, с $m_1(b_0) = 0$, и потому негрубое, не имеющее траекторий, идущих из особой точки в особую точку. С другой стороны, так как уравнение b_0 – негрубое, то существует гомеоморфизм $h: \bar{\Phi}_\nu \rightarrow \bar{\Phi}_\nu$, переводящий траектории уравнения b в траектории уравнения b_0 . Тогда $h(L)$ – траектория уравнения b_0 , идущая из особой точки $h(S_0)$ в особую точку $h(S_1)$. Получили противоречие, из которого следует, что сделанное предположение неверно и, на самом деле, у b нет траекторий, идущих из особой точки в особую точку.

Покажем, что $m_2(b) \neq 0$, и потому $b \in \Sigma_1^1 B^r(\omega, \nu)$. Предположим, что $m_2(b) = 0$. Рассмотрим семейство уравнений

$$b^\mu \in B^r(\omega, \nu) : \dot{x} = b_1(t)x + (b_2(t) + \mu)x^\nu.$$

При достаточно малом $\bar{\mu} > 0$ $b^\mu \in V$, если $\mu \in [-\bar{\mu}, \bar{\mu}]$. Так как $m_1(b^\mu) = m_1(b) = 0$, то при всех $\mu \in [-\bar{\mu}, \bar{\mu}]$ уравнения b^μ являются негрубыми и потому $b^{\bar{\mu}}$ и $b^{-\bar{\mu}}$ топологически эквивалентны. В координатах y, s траектории b^μ задаются уравнениями

$$y = Y(t, y_0, \mu) = \exp \int_0^t (1-\nu) b_1(\xi) d\xi \left[y_0 + (1-\nu) \int_0^t (b_2(\tau) + \mu) l(\tau) d\tau \right],$$

$$s = t \bmod \omega,$$

где обозначено $l(\tau) = \exp \int_\tau^0 (1-\nu) b_1(\xi) d\xi$. Поэтому функция последования на дуге $s = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 P(y_0, \mu) &= Y(\omega, y_0, \mu) = y_0 + (1-\nu) \int_0^{\omega} (b_2(\tau) + \mu) l(\tau) d\tau = \\
 &= y_0 + (1-\nu) m_2(b) + \mu(1-\nu) \int_0^{\omega} l(\tau) d\tau = y_0 + \mu(1-\nu) \int_0^{\omega} l(\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для достаточно большого $y_0 > 0$ $P(y_0, \bar{\mu}) > y_0$, а $P(y_0, -\bar{\mu}) < y_0$. Тем самым, Γ_{∞} для уравнения $b^{\bar{\mu}}$ устойчивая, а для уравнения $b^{-\bar{\mu}}$ это неустойчивая периодическая траектория. Но это противоречит топологической эквивалентности $b^{\bar{\mu}}$ и $b^{-\bar{\mu}}$. Из полученного противоречия следует, что $m_2(b) \neq 0$.

Рассмотрим теперь вариант (в). Так как при гомеоморфизме фазового пространства, переводящего траектории в траектории, существенные особые точки и только они переходят в существенные особые точки, то любое негрубое уравнение из окрестности V имеет одинаковое (конечное) число существенных особых точек. Обозначим его N .

Покажем, что справедлива

Лемма. В варианте (в) все особые точки уравнения b простые, за исключением точки $S_0 = (0, s_0 = t_0 \bmod \omega)$, для которой при $r = 2$

$$b_2'(t_0) = 0, \quad b_2''(t_0) \neq 0, \quad (5)$$

а при $r \geq 3$ либо выполняется (5), либо

$$b_2'(t_0) = b_2''(t_0) = 0, \quad b_2'''(t_0) \neq 0. \quad (6)$$

Доказательство леммы. Рассмотрим случай $r = 2$. Предположим на время, что утверждение леммы неверно. Тогда либо (i) существуют особые точки $S_k = (0, s_k = t_k \bmod \omega)$, $k = 0, 1$, для которых $b_2'(t_k) = 0, b_2''(t_k) \neq 0$, либо (ii) существует особая точка $S_0 = (0, s_0 = t_0 \bmod \omega)$, для которой $b_2'(t_0) = b_2''(t_0) = 0$.

В случае (i) выберем число $\varepsilon \in (0, \omega/3)$ так, чтобы $\operatorname{sgn} b_2(t) = \operatorname{sgn} b_2''(t_0)$ при $0 < |t - t_0| < \varepsilon$. Тогда S_0 – единственная особая точка в своей ε -окрестности на Γ_0 .

Для уравнения $\dot{y} = (1-\nu)b_1(t)y + (1-\nu)b_2(t)$ функция

$$Y(t) = (1-\nu) \int_{t_0}^t b_2(\tau) \exp \int_{\tau}^t (1-\nu)b_1(\xi) d\xi d\tau$$

– решение, удовлетворяющее начальному условию $Y(t_0) = 0$. Поэтому $\forall t \in (0, t_0 + \varepsilon) \operatorname{sgn} Y(t) = \operatorname{sgn} b_2''(t_0)$, а $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0) \operatorname{sgn} Y(t) = -\operatorname{sgn} b_2''(t_0)$, то есть S_0 не является существенной особой точкой.

Пусть $\chi: [t_0 - \omega/2, t_0 + \omega/2] \rightarrow [0, 1]$ – такая C^∞ -функция, что $\chi(t) = 1$ при $|t - t_0| \leq \varepsilon/2$, $\chi(t) = 0$ при $|t - t_0| \geq \varepsilon$. Рассмотрим семейство уравнений $b^\mu \in V^2(\omega, \nu) : \dot{x} = b_1(t)x + b_2^\mu(t)x^\nu$, где $b_2^\mu(t)$ – такая ω -периодическая C^2 -функция, что $b_2^\mu(t) = b_2(t) - \mu(t - t_0)\chi(t)$ для $t \in [t_0 - \omega/2, t_0 + \omega/2]$. При достаточно малом $\mu > 0$ уравнение $b^\mu \in V \setminus \Sigma^0 V^2(\omega, \nu)$. Для уравнения b^μ S_0 – простая особая точка, а все существенные особые точки уравнения b , лежащие вне ε -окрестности S_0 на Γ_0 , являются и существенными особыми точками уравнения b^μ . Поэтому b^μ имеет больше существенных особых точек, чем b . Получили противоречие.

В случае (ii) выберем $\varepsilon \in (0, \omega/3)$ так, чтобы ε -окрестность точки S_0 на Γ_0 не содержала существенных особых точек, кроме возможно самой точки S_0 . Пусть $\gamma: (t_0, t_0 + \varepsilon) \rightarrow [0, 1]$ – такая C^2 -функция, что $\gamma(t) = 1$ при $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon/2]$, а $\gamma(t) = 0$ при $t \in [t_0 + 2\varepsilon/3, t_0 + \varepsilon)$. Согласно [3, с. 20, лемма 2] для любого $\delta > 0$ можно найти такую C^2 -функцию $\psi_\delta: (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, что на интервале $(t_0, t_0 + \varepsilon/2)$ она имеет по крайней мере два простых нуля, $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0] \psi_\delta(t) = b_2(t)$, $\forall n \in \{0, 1, 2\} \forall t \in [t_0, t_0 + \varepsilon) |\psi_\delta^{(n)}(t) - b_2^{(n)}(t)| < \delta$. Рассмотрим семейство уравнений $b^\delta \in V^2(\omega, \nu) : \dot{x} = b_1(t)x + b_2^\delta(t)x^\nu$, где $b_2^\delta(t)$ – такая ω -периодическая C^2 -функция, что $b_2^\delta(t) = (1 - \gamma(t))b_2(t) + \gamma(t)\psi_\delta(t)$ для $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$ и $b_2^\delta(t) = b_2(t)$ для $t \in [t_0 + \varepsilon, t_0 + \omega]$. При достаточно малом δ уравнение $b^\delta \in V$ и имеет больше существенных особых точек, чем уравнение b . Так как $b_2^\delta(t_0) = b_2(t_0) = 0$, $(b_2^\delta)'(t_0) = b_2'(t_0) = 0$, то $b^\delta \in V \setminus \Sigma^0 V^2(\omega, \nu)$. И в этом случае получили противоречие.

Таким образом, утверждение леммы при $r = 2$ справедливо.

Рассмотрим случай $r \geq 3$. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда имеет место один из двух вариантов:

(B1) Существуют особые точки $S_k = (0, s_k = t_k \bmod \omega)$, $k = 0, 1$, для которых либо

$$b_2'(t_k) = 0, \quad b_2''(t_k) \neq 0, \quad (7)$$

либо

$$b_2'(t_k) = b_2''(t_k) = 0, \quad b_2'''(t_k) \neq 0. \quad (8)$$

(B2) Существует особая точка $S_0 = (0, s_0 = t_0 \bmod \omega)$, для которой $b_2'(t_0) = b_2''(t_0) = b_2'''(t_0) = 0$.

Рассмотрим вариант (B1). Если при $k = 0$ имеет место (7), то, как и в случае (i), приходим к противоречию. Пусть при $k = 0$ имеем (8). Выберем число $\varepsilon \in (0, \omega/3)$ так, чтобы $\text{sgn } b_2(t) = \text{sgn}[b_2'''(t_0)(t - t_0)]$ при всех $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$.

Тогда S_0 – единственная существенная особая точка в своей ε -окрестности на Γ_0 . Пусть $\chi : [t_0 - \omega/2, t_0 + \omega/2] \rightarrow [0, 1]$ – функция, определенная выше. Рассмотрим семейство уравнений

$$b^\mu \in V^r(\omega, \nu) : \dot{x} = b_1(t)x + b_2^\mu(t)x^\nu, \quad (9)$$

где $b_2^\mu(t)$ – такая ω -периодическая C^r -функция, что

$$b_2^\mu(t) = b_2(t) - \mu(\text{sgn } b_2'''(t_0))(t - t_0)\chi(t) \text{ при } t \in [t_0 - \omega/2, t_0 + \omega/2].$$

При достаточно малом $\mu > 0$ уравнение $b^\mu \in V$, t_0 – простой нуль функции $b_2^\mu(t)$, найдется такое число $t_* \in (0, t_0 + \varepsilon)$, что $b_2^\mu(-t_*)b_2^\mu(t_0 - \varepsilon) < 0$, $b_2^\mu(t_*)b_2^\mu(t_0 + \varepsilon) < 0$. Аналогично случаю A1) из п.3.2 мы можем выбрать уравнение $b^* \in V^r(\omega, \nu) : \dot{x} = b_1(t)x + b_2^*(t)x^\nu$ так, чтобы $b_2^*(t) = b_2(t)$ при $t \in [-t_*, t_*] \cup [t_0 + \varepsilon, t_0 + \omega - \varepsilon]$, функция $b_2^*(t)$ имела на интервалах $(t_0 - \varepsilon, -t_*)$ и $(t_*, t_0 + \varepsilon)$ только простые нули, и столь близкое к b^μ , что $b^* \in V$, $b_2^*(-t_*)b_2^*(t_0 - \varepsilon) < 0$, $b_2^*(t_*)b_2^*(t_0 + \varepsilon) < 0$. Тогда b^* имеет в ε -окрестности S_0 на Γ_0 по крайней мере три простые особые точки, а все существенные особые точки уравнения b , лежащие вне указанной окрестности, являются и существенными особыми точками уравнения b^* . Таким образом, b^* имеет больше существенных особых точек, чем b . Поскольку S_1 непростая особая точка и для уравнения b^* , то $b^* \in V \setminus \Sigma^0 V^r(\omega, \nu)$. Получили противоречие.

В варианте (B2) возможны следующие случаи:

$$(B2-1) \quad b_2'(t_0) = \dots = b_2^{(2m-1)}(t_0) = 0, \quad b_2^{(2m)}(t_0) \neq 0, \quad 4 \leq 2m \leq r;$$

$$(B2-2) \quad b_2'(t_0) = \dots = b_2^{(2m)}(t_0) = 0, \quad b_2^{(2m+1)}(t_0) \neq 0 \quad 5 \leq 2m+1 \leq r;$$

$$(B2-3) \quad b_2'(t_0) = \dots = b_2^{(r)}(t_0) = 0.$$

В случае (B2-1) выберем $\varepsilon \in (0, \omega/3)$ так, чтобы

$$\operatorname{sgn} b_2(t) = \operatorname{sgn} b^{(2m)}(t_0) \text{ при } 0 < |t - t_0| < \varepsilon.$$

Тогда в ε -окрестности S_0 на Γ_0 нет существенных особых точек. Пусть $\chi(t)$ – та же функция, что и выше. Рассмотрим семейство уравнений (9), где $b_2''(t)$ – такая ω -периодическая C^r -функция, что

$$b_2''(t) = b_2(t) - \mu(\operatorname{sgn} b^{(2m)}(t_0))(t - t_0)^2 \chi(t) \text{ при } t \in [t_0 - \omega/2, t_0 + \omega/2].$$

При достаточно малом $\mu > 0$ уравнение $b'' \in V \setminus \Sigma^0 V^r(\omega, \nu)$, t_0 – непустой нуль функции $b_2''(t)$, найдется такое число $t_* \in (0, t_0 + \varepsilon)$, что $b_2''(-t_*)b_2''(t_0 - \varepsilon) < 0$, $b_2''(t_*)b_2''(t_0 + \varepsilon) < 0$. Выберем уравнение $b^* \in V$ так же, как и в варианте (B1). Оно имеет в ε -окрестности S_0 на Γ_0 по крайней мере две простые особые точки, а все существенные особые точки уравнения b , лежащие вне указанной окрестности, являются и существенными особыми точками уравнения b^* . Следовательно, b^* имеет больше существенных особых точек, чем b . Поскольку S_0 – непустая особая точка и для уравнения b^* , то $b^* \in V \setminus \Sigma^0 V^r(\omega, \nu)$. Получили противоречие.

В случае (B2-2) выберем $\varepsilon \in (0, \omega/3)$ так, чтобы

$$\operatorname{sgn} b_2(t) = \operatorname{sgn}[b^{(2m+1)}(t_0)(t - t_0)] \text{ при всех } t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon].$$

Тогда S_0 – единственная существенная особая точка в своей ε -окрестности на Γ_0 . Далее, взяв в уравнении (9)

$$b_2''(t) = b_2(t) - \mu(\operatorname{sgn} b^{(2m+1)}(t_0))(t - t_0)^3 \chi(t) \text{ при } t \in [t_0 - \omega/2, t_0 + \omega/2],$$

как и в случае (B2-1), находим уравнение $b^* \in V \setminus \Sigma^0 V^r(\omega, \nu)$ с большим числом существенных особых точек, чем у b .

В случае (B2-3) противоречие получаем аналогично случаю (ii) для $r = 2$.

Таким образом, и при $r \geq 3$ предположение о том, что утверждение леммы неверно, приводит к противоречию. Лемма доказана.

Докажем, что в варианте (в) нет траекторий уравнения b , идущих из особой точки в особую точку. Предположим противное, то есть существование траектории, идущей из особой точки в особую точку. Пусть одна из этих точек простая, а другая тоже простая или (при $r \geq 3$) точка $S_0 = (0, t_0 \bmod \omega)$, удовлетворяющая условиям (6) и потому являющаяся существенной особой точкой. Тогда, как и в варианте (б), получаем противоречие. Следовательно, либо положительная, либо отрицательная полу-

траектория, начинающаяся в простой особой точке S_1 , идет в несущественную особую точку $S_0 = (0, t_0 \bmod \omega)$, для которой имеем (5). Для определенности, пусть эта полутраектория положительная. Тогда $b_2''(t_0) < 0$. Выберем $\varepsilon \in (0, \omega/3)$ так, чтобы $\forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] b_2''(t) < b_2''(t_0)/2$. Тогда $b_2(t) < 0$, если $0 < |t - t_0| < \varepsilon$, и S_0 – единственная особая точка в своей ε -окрестности на Γ_0 . Рассмотрим семейство уравнений

$$b^{\alpha,\beta} \in V^r(\omega, v) : \dot{x} = (b_1(t) + \alpha)x + b_2^\beta(t)x^v, \text{ где } b_2^\beta(t) = b_2(t) + \beta.$$

По теореме о неявной функции существует такое $\delta > 0$, что при $|\alpha| < \delta$, $|\beta| < \delta$ уравнение $b^{\alpha,\beta}$ имеет простую особую точку $\hat{S}_1(\beta)$, непрерывно зависящую от β и совпадающую с S_1 при $\beta = 0$. Мы можем также считать, что при $|\alpha| < \delta$, $|\beta| < \delta$ $b^{\alpha,\beta} \in V$.

Обозначим $L^{\alpha,\beta}$ траекторию уравнения $b^{\alpha,\beta}$, начинающуюся в точке $\hat{S}_1(\beta)$. При достаточно малом $\alpha_0 \in (0, \delta)$ траектория $L^{-\alpha_0, 0}$ (соответственно, $L^{\alpha_0, 0}$) трансверсально пересекает Γ_0 в точке $(0, t_- \bmod \omega)$ (соответственно, в точке $(0, t_+ \bmod \omega)$), где $t_0 - \varepsilon < t_-^0 < t_+^0 < t_0 + \varepsilon$. Фиксируем α_0 . При достаточно малом $\beta \in (0, \delta)$ все нули $b_2^\beta(t)$ на $(t_0 + \varepsilon, t_0 + \omega - \varepsilon)$ простые и их там столько же, как у $b_2(t)$; траектория $L^{-\alpha_0, \beta}$ (соответственно, $L^{\alpha_0, \beta}$) трансверсально пересекает Γ_0 в точке $(0, t_-(\beta) \bmod \omega)$ (соответственно, в точке $(0, t_+(\beta) \bmod \omega)$), где $t_\pm(\beta)$ непрерывно зависят от β , и потому можно считать, что $t_0 - \varepsilon < t_-(\beta) < t_0 < t_+(\beta) < t_0 + \varepsilon$. Так как $b_2(t_\pm^0) < 0$, то β можно выбрать так, что и $b_2^\beta(t_\pm(\beta)) < 0$. Фиксируем такое β . При выбранном β функция $b_2^\beta(t)$ имеет на промежутке $(t_-(\beta), t_0)$ простой нуль, который обозначим t_-^* .

Предположим, что траектория $L^{\alpha,\beta}$ трансверсально пересекает Γ_0 при всех $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$. Тогда она пересекает Γ_0 в точке $(0, T(\alpha) \bmod \omega)$, где $T(\alpha)$ – непрерывная функция на $[-\alpha_0, \alpha_0]$, $T(\pm\alpha_0) = t_\pm(\beta)$. Следовательно, при некотором $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ $T(\alpha) = t_-^*$, что противоречит предположению. Поэтому найдется такое $\alpha \in (-\alpha_0, \alpha_0)$, что $L^{\alpha,\beta}$ идет в простую особую точку, и потому $b^{\alpha,\beta}$ негрубое уравнение. Так как число существ-

венных особых точек у $b^{\alpha, \beta}$ больше, чем у b , то эти уравнения не могут быть топологически эквивалентны. Получаем противоречие. Таким образом, в варианте (в) нет траекторий уравнения b , идущих из особой точки в особую точку.

Покажем, что, кроме того, $m_1(b) \neq 0$ и потому $b \in \Sigma_2^1 B^r(\omega, \nu)$. Рассмотрим семейство уравнений $b^\mu \in B^r(\omega, \nu) : \dot{x} = (b_1(t) + \mu)x + b_2(t)x^\nu$. При достаточно малом $\bar{\mu} > 0 \forall \mu \in [-\bar{\mu}, \bar{\mu}] b^\mu \in V \setminus \Sigma^0 B^r(\omega, \nu)$. Если $m_1(b) = 0$, то $m_1(b^{\bar{\mu}}) = \bar{\mu}\omega > 0$, а $m_1(b^{-\bar{\mu}}) = -\bar{\mu}\omega < 0$. Отсюда и из (4) следует, что Γ_∞ – устойчивая траектория уравнения $b^{\bar{\mu}}$ и неустойчивая траектория уравнения $b^{-\bar{\mu}}$, что противоречит топологической эквивалентности этих уравнений. Следовательно, $m_1(b) \neq 0$.

Таким образом, необходимость условия $b \in \Sigma^1 B^r(\omega, \nu)$ для первой степени негрубости уравнения $b \in B^r(\omega, \nu)$ доказана.

3.4. Бифуркационные многообразия. Достаточность условий первой степени негрубости. Сначала покажем, что множества $\Sigma_k^1 B^r(\omega, \nu)$, $k = 1, 2, 3, 4$, и $\Sigma_*^2 B^r(\omega, \nu)$ непустые. Зададим $r \geq 2$.

Уравнения $\dot{x} = \pm x^\nu$ принадлежат $\Sigma_1^1 B^r(\omega, \nu)$.

Уравнение $\dot{x} = \pm x + (\sin^3 2\pi t / \omega)x^\nu$ принадлежит $B^r(\omega, \nu)$. Из пункта 3.2 следует, что в любой его окрестности есть уравнение из $\Sigma_2^1 B^r(\omega, \nu)$, а также из $\Sigma_*^2 B^r(\omega, \nu)$ при $r \geq 3$.

Уравнение

$$b : \dot{x} = x + \left(\frac{2\pi}{(1-\nu)\omega} \sin \frac{2\pi t}{\omega} + \cos \frac{2\pi t}{\omega} - 1 \right) x^\nu$$

принадлежит $B^r(\omega, \nu)$, а $m_1(b) = \omega \neq 0$. При $\nu < 1$ ($\nu > 1$) оно имеет простые особые точки $S_0(0, 0)$ и $S_1(0, t_1 \bmod \omega)$ ($S_0(\infty, 0)$ и $S_1(\infty, t_1 \bmod \omega)$), где

$$t_1 = \omega \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\sqrt{\pi^2 + \omega^2(1-\nu)^2}}{\omega(1-\nu)} \right),$$

и периодическую траекторию, проходящую через точку S_0 и задаваемую в координатах y, s уравнениями $y = 1 - \cos 2\pi t / \omega$, $s = t \bmod \omega$. Поэтому $b \in \Sigma_3^1 B^r(\omega, \nu)$.

Уравнение

$$b : \dot{x} = x + \left(\frac{4\pi}{(1-\nu)\omega} \sin \frac{4\pi t}{\omega} + \cos \frac{4\pi t}{\omega} - 1 \right) x^\nu$$

принадлежит $V^r(\omega, \nu)$, а $m_1(b) = \omega \neq 0$. При $\nu < 1$ ($\nu > 1$) оно имеет периодическую траекторию, проходящую через простые особые точки $S_0(0, 0)$ и $S_1(0, \omega/2 \bmod \omega)$ ($S_0(\infty, 0)$ и $S_1(\infty, \omega/2 \bmod \omega)$) и задаваемую в координатах y, s уравнениями $y = 1 - \cos 4\pi t / \omega$, $s = t \bmod \omega$. Из п. 3.2 следует, что в любой его окрестности есть уравнение из $\Sigma_4^1 V^r(\omega, \nu)$.

Функция $m_1 : V^r(\omega, \nu) \rightarrow \mathbb{R}$ – линейная и ненулевая. Множество $\Sigma_1^1 V^r(\omega, \nu)$ является открытым подмножеством линейного подпространства $\ker m_1$ в $V^r(\omega, \nu)$, а потому и C^n -подмногообразием коразмерности один пространства $V^r(\omega, \nu)$ для любого $n \geq 1$.

Покажем, что $\Sigma_k^1 V^r(\omega, \nu)$ ($k = 2, 3, 4$) – вложенные C^{r-1} -подмногообразия коразмерности один пространства $V^r(\omega, \nu)$. Достаточно доказать, что для любого уравнения $b^0 \in \Sigma_k^1 V^r(\omega, \nu)$ существует такая его окрестность U и невырожденная C^{r-1} -функция $f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$, что $U \cap \Sigma_k^1 V^r(\omega, \nu) = f_k^{-1}(0)$.

Определим C^r -функции $\hat{b}_k : \mathbb{R} \times \Sigma^1 V^r(\omega, \nu) \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 1, 2$) положив для $t \in \mathbb{R}$ и уравнения (1) $\hat{b}_k(t, b) := b_k(t)$.

Пусть уравнение $b^0 \in \Sigma_2^1 V^r(\omega, \nu)$, а $S_0 = (0, t_0 \bmod \omega)$ – его особая точка, о которой идет речь в определении $\Sigma_2^1 V^r(\omega, \nu)$. Так как $\hat{b}_2(t_0, b^0) = 0$, $(\hat{b}_2)'_t(t_0, b^0) = 0$, $(\hat{b}_2)''_{tt}(t_0, b^0) \neq 0$, то можно выбрать число $\varepsilon_1 > 0$ и окрестность U_1 уравнения b^0 в $V^r(\omega, \nu)$ так, чтобы

$$\forall t \in [t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1] \forall b \in U_1 \operatorname{sgn} \hat{b}_2(t_0 \pm \varepsilon_1, b) = \operatorname{sgn} (\hat{b}_2)''_{tt}(t, b) = \sigma \neq 0,$$

где обозначено $\sigma := \operatorname{sgn} (\hat{b}_2)''_{tt}(t_0, b^0)$. Уменьшив при необходимости окрестность U_1 , мы можем считать, что $\forall b \in U_1$ все особые точки, не лежащие в ε_1 -окрестности точки S_0 на Γ_0 , простые и нет траекторий уравнения b , идущих из особой точки в особую точку.

По теореме о неявной функции существуют число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, окрестность $U \subset U_1$ уравнения b и C^{r-1} -функция $T : U \rightarrow (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ такие, что $T(b^0) = t_0$ и для любого уравнения $b \in U$ $(\hat{b}_2)'_t(T(b), b) = 0$. Определим C^{r-1} -функцию $f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$, положив $f_2(b) := -\sigma \hat{b}_2(T(b), b)$. Для $h \in V^r(\omega, \nu) : \dot{x} = x^\nu$ получаем

$$f_2'(b^0)h = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} f(b^0 + \tau h) = -\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \sigma \hat{b}_2(T(b^0), b) = -\sigma \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \tau = -\sigma,$$

и потому $f_2'(b^0) \neq 0$. Мы можем считать, что окрестность U выбрана так, что $\forall b \in U \ f_2'(b) \neq 0$.

Если $f_2(b) = 0$, то $T(b)$ – двукратный нуль функции $\hat{b}_2(\cdot, b)$, при этом других нулей $\hat{b}_2(\cdot, b)$ на $(t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1)$ не имеет. Учитывая выбор окрестности U_1 , получаем, что $b \in \Sigma_2^1 B^r(\omega, \nu)$.

Если $f_2(b) < 0$, то $\hat{b}_2(\cdot, b)$ не имеет нулей на $(t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1)$, если $f_2(b) > 0$, то $\hat{b}_2(\cdot, b)$ имеет на $(t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1)$ два простых нуля. Поэтому $b \in \Sigma^0 B^r(\omega, \nu)$, если $f_2(b) \neq 0$.

Итак, $U \cap \Sigma_2^1 B^r(\omega, \nu) = f_2^{-1}(0)$. Тем самым, $\Sigma_2^1 B^r(\omega, \nu)$ – вложенное C^{r-1} -подмногообразие коразмерности один пространства $B^r(\omega, \nu)$.

Пусть периодическая траектория уравнения $b^0 \in \Sigma_3^1 B^r(\omega, \nu)$ ($i = 3, 4$) проходит через особую точку $S_0 = (0, t_0 \bmod \omega)$. Так как все особые точки уравнения b^0 простые, а $m_1(b^0) \neq 0$, то можно выбрать окрестность U_1 так, чтобы уравнения $b \in U_1$ имели только простые особые точки, C^r -гладко зависящие от $b \in U_1$, а $m_1(b) \neq 0$. В частности, $b \in U_1$ имеет простую особую точку $(0, T(b) \bmod \omega)$, где $T: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ такая C^r -функция, что $T(b^0) = t_0$. Обозначим $Y_+(t, b)$ и $Y_-(t, b)$ – решения уравнения

$$\dot{y} = (1-\nu)\hat{b}_1(t, b)y + (1-\nu)\hat{b}_2(t, b),$$

удовлетворяющие соответственно начальным условиям $Y_+(t_0, b) = 0$ и $Y_-(t_0 + \omega, b) = 0$. Функции

$$Y_+(t, b) = (1-\nu) \int_{T(b)}^t \hat{b}_2(\tau, b) \exp \int_{\tau}^t (1-\nu)\hat{b}_1(\xi, b) d\xi d\tau \quad \text{и}$$

$$Y_-(t, b) = (1-\nu) \int_{T(b)+\omega}^t \hat{b}_2(\tau, b) \exp \int_{\tau}^t (1-\nu)\hat{b}_1(\xi, b) d\xi d\tau$$

– решения уравнения $\dot{y} = (1-\nu)\hat{b}_1(t, b)y + (1-\nu)\hat{b}_2(t, b)$, удовлетворяющие начальным условиям $Y_+(T(b), b) = 0$ и $Y_-(T(b) + \omega, b) = 0$. Нетрудно убедиться, что окрестность $U \subset U_1$ уравнения b^0 можно выбрать так, что

$\forall b \in U \ Y_+(t, b) > 0$ для $T(b) < t \leq t_0 + \omega/2$ и $Y_-(t, b) > 0$ для $t_0 + \omega/2 \leq t < T(b) + \omega$. Определим C^r -функцию $f_3 : U \rightarrow \mathbb{R}$, положив $f_3(b) := Y_+(t_0 + \omega/2, b) - Y_-(t_0 + \omega/2, b)$.

Ясно, что уравнение $b \in U$ имеет траекторию, идущую из особой точки $(0, T(b) \bmod \omega)$ в нее же, тогда и только тогда, когда $f_3(b) = 0$. Положительные и отрицательные полутраектории уравнения b^0 , начинающиеся в особых точках, отличных от S_0 , либо предельны к замкнутой траектории Γ_∞ , либо кончаются в точке, принадлежащей Γ_0 , в которой они трансверсальны Γ_0 . Поэтому окрестность U можно выбрать столь малой, что так же будут вести и полутраектории уравнения $b \in U$, начинающиеся в особых точках, отличных от особой точки $(0, T(b) \bmod \omega)$. Следовательно, $f_3^{-1}(0) = U \cap \Sigma_3^1 B^r(\omega, \nu)$, то есть $\Sigma_3^1 B^r(\omega, \nu)$ – вложенное C^r -подмногообразии коразмерности один пространства $B^r(\omega, \nu)$.

Если $m_1(b^0)f_3(b) < 0$, то уравнение b имеет периодическую траекторию, принадлежащую $(0, \infty) \times \mathbb{R} / \omega\mathbb{Z}$, устойчивую (неустойчивую) при $m_1(b^0) < 0$ ($m_1(b^0) > 0$), если $m_1(b^0)f_3(b) > 0$, то уравнение b не имеет периодических траекторий в $[0, \infty) \times \mathbb{R} / \omega\mathbb{Z}$.

Для уравнения $b^0 \in \Sigma_4^1 B^r(\omega, \nu)$ аналогично определяется функция $f_4 : U \rightarrow \mathbb{R}$ и доказывается, что и $\Sigma_4^1 B^r(\omega, \nu)$ – вложенное C^r -подмногообразие коразмерности один пространства $B^r(\omega, \nu)$.

Так как в некоторой окрестности любого уравнения из $\Sigma_k^1 B^r(\omega, \nu)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) нет уравнений из $\Sigma_j^1 B^r(\omega, \nu)$ для $j = 1, 2, 3, 4$, $j \neq k$, то и $\Sigma^1 B^r(\omega, \nu)$ – вложенное C^{r-1} -подмногообразие коразмерности один пространства $B^r(\omega, \nu)$.

Доказательство первой степени негрубости уравнений из $\Sigma^1 B^r(\omega, \nu)$ и $\Sigma_k^2 B^r(\omega, \nu)$ аналогично доказательствам из [4 – 5]. Мы его опустим.

3.5. Бифуркации. Опишем бифуркации фазовых портретов при переходе уравнений через бифуркационные многообразия $\Sigma_k^1 B^r(\omega, \nu)$. Ограничимся случаем $\nu < 1$. При $\nu > 1$ Γ_0 и Γ_∞ меняются ролями. Фазовое пространство $\bar{\Phi}_\nu = [0, \infty] \times \mathbb{R} / \omega\mathbb{Z}$ на рисунках будем изображать прямоугольником с двумя отождествленными «боковыми» сторонами.

Если $b^0 \in \Sigma_1^1 B^r(\omega, \nu)$, то для любой окрестности $U(\Gamma_\infty)$ кривой Γ_∞ существует окрестность U уравнения b^0 со следующими свойствами. Пусть $m_2(b^0) > 0$ ($m_2(b^0) < 0$). Тогда для уравнения $b \in U$ с $m_1(b) \geq 0$ ($m_1(b) \leq 0$) Γ_∞ – единственная периодическая траектория, она устойчива (неустойчива); для уравнения $b \in V$ с $m_1(b) < 0$ ($m_1(b) > 0$) Γ_∞ – неустойчивая (устойчивая) периодическая траектория, а кроме нее в $U(\Gamma_\infty)$ имеется еще устойчивая (неустойчивая) периодическая траектория, «родившаяся из Γ_∞ » (рис. 1).

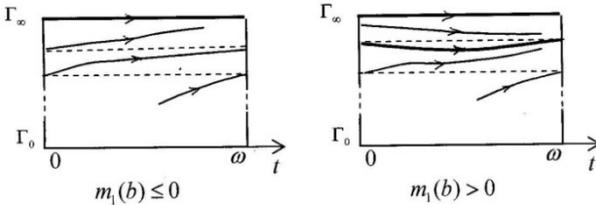


Рис. 1. Бифуркации уравнения $b^0 \in \Sigma_1^1 B^r(\omega, \nu)$ с $m_2(b^0) > 0$

Если $b^0 \in \Sigma_2^1 B^r(\omega, \nu)$, S_0 – ее непрямая особая точка, а $\sigma = (\hat{b}_2)''_u(t_0, b^0)$, то для любой окрестности $U(S_0)$ точки S_0 окрестность U уравнения b^0 , определенную в п. 3.4, можно выбрать следующим образом. Для уравнения $b \in U$ с $\sigma f_2(b) < 0$ в $U(S_0)$ нет особых точек, а с $\sigma f_2(b) > 0$ имеется ровно две (простые) особые точки (рис. 2).

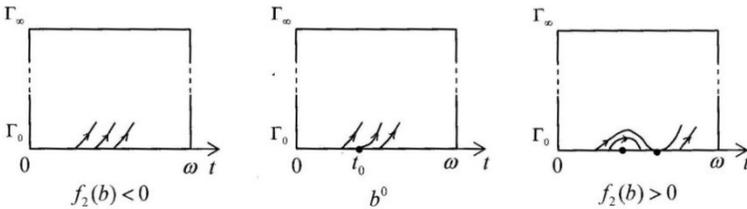


Рис. 2. Бифуркации уравнения $b^0 \in \Sigma_2^1 B^r(\omega, \nu)$ в случае $(\hat{b}_2)''_u(t_0, b^0) > 0$

Если $b^0 \in \Sigma_3^1 B^r(\omega, \nu)$, L^0 – периодическая траектория уравнения b^0 , проходящая через особую точку, и для определенности $m_1(b^0) < 0$, то для любой окрестности $U(L^0)$ этой траектории окрестность U уравнения b^0 , определенную в п. 3.4, можно выбрать следующим образом. Уравнение

$b \in U$ с $f_2(b) < 0$ не имеет периодической траектории, а для уравнения с $f_3(b) > 0$ (рис. 3) периодическая траектория есть, она принадлежит $U(L^0)$ и не содержит особых точек (см. рис. 3).

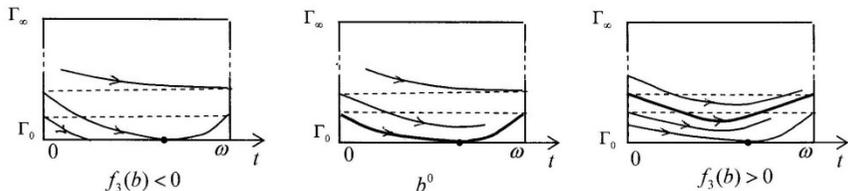


Рис. 3. Бифуркации уравнения $b^0 \in \Sigma_3^1 B^r(\omega, \nu)$ в случае $m_1(b^0) < 0$

Если $b^0 \in \Sigma_4^1 B^r(\omega, \nu)$, L^0 – траектория уравнения b^0 , идущая из особой точки в особую точку, то окрестность V уравнения b^0 , определенную в п. 3.4, можно выбрать так, что для уравнения $b \in U$ с $f_4(b) \neq 0$ нет траекторий, идущих из особой точки в особую точку (рис. 4).

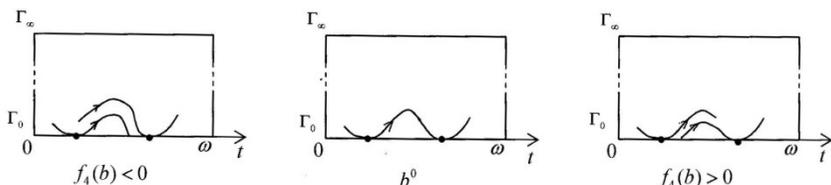


Рис. 4. Бифуркации уравнения $b^0 \in \Sigma_4^1 B^r(\omega, \nu)$

4. Специальные случаи уравнений Бернулли

Если коэффициент $b_2(t)$ имеет постоянный знак, а $m_1(b) \neq 0$, то можно описать фазовый портрет уравнения на $\bar{\Phi}_\nu$ и в случае, когда $b_1(t)$ и $b_2(t)$ только непрерывны.

В случае $\nu \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ траектории трансверсальны Γ_0 и возможны только следующие 4 топологически различных типа фазовых портретов: 1) при $m_1(b) > 0, b_2(t) > 0$ Γ_∞ – устойчивый предельный цикл, для всех остальных траекторий их положительные (отрицательные) полутраектории ω -предельны к Γ_∞ (кончатся в точках Γ_0), 2) при $m_1(b) < 0, b_2(t) < 0$ фазовый портрет получается из описанного в случае 1) сменой направления времени на траекториях, 3) при $m < 0, b_2(t) > 0$ Γ_∞ – неустойчивый предельный цикл, кроме того уравнение имеет устойчивый

предельный цикл Γ , траектории, начинающиеся в точках между Γ и Γ_∞ , ω -предельны к Γ и α -предельны к Γ_∞ , а положительные (отрицательные) полутраектории, начинающиеся в точках между Γ и Γ_0 ω -предельны к Γ (кончатся в точках Γ_0), 4) при $m > 0, b_2(t) < 0$ фазовый портрет получается из описанного в случае 3) сменой направления времени на траекториях.

В случае $\nu \in (1, \infty)$ траектории трансверсальны Γ_∞ . Топологически различные типы фазовых портретов получаются из описанных выше сменой ролей Γ_0 и Γ_∞ .

Ясно, что в рассмотренных случаях топологическая структура фазовых портретов не меняется при переходе к уравнениям с коэффициентами, близкими в C^0 -норме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ройтенберг В.Ш.* О дифференциальных уравнениях Бернулли с периодически коэффициентами // Научно-технический вестник Поволжья. 2019. № 3. С. 12–15.
2. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979. 280 с.
3. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер М.: Наука. 1967. 488 с.
4. *Андронов А.А.* Достаточные условия для негрубости первой степени динамической системы на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6, № 12. С. 221-2134.
5. *Teixeira M.A.* Generic bifurcation in manifold with boundary // Journal of Differential Equations. 1977. V. 25, no.1. P. 65–89.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УДК 517

Л. В. Березина, А. И. Бурцев, А. В. Васильева

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: berezina_lv@pisem.net, byrzev@rsatu.ru,
vasileva@rsatu.ru

ОЦЕНКА СООТВЕТСТВИЯ СЛОЖНОСТИ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПРАКТИЧЕСКИМ РЕЗУЛЬТАТАМ

В статье рассматриваются методические аспекты подготовки и проверки олимпиадных задач по математике. Проведен анализ задач IV Межрегиональной студенческой олимпиады по математике (II этап Всероссийской студенческой олимпиады), которая проводилась на базе РГАТУ имени П. А. Соловьева в декабре 2018 года.

Ключевые слова: олимпиадные задачи, научное творчество студентов, математическая подготовка.

L. V. Berezina, A. I. Burzev, A. V. Vasileva

P. A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: berezina_lv@pisem.net, byrzev@rsatu.ru,
vasileva@rsatu.ru

ASSESSMENT OF COMPLIANCE OF COMPLEXITY OF OLYMPIAD TASKS WITH PRACTICAL RESULTS

The article deals with methodological aspects of preparation and verification of Olympiad problems in mathematics. The analysis of the requirements of the task IV International Student Mathematics Olympiad (II stage of all-Russian student Olympiad) which was held on the basis of RSATU named after P. A. Soloviev in December 2018.

Keywords: olympiad problems, the scientific creativity of students, mathematical training.

При составлении олимпиадных задач приходится учитывать множество факторов, влияющих на их содержание, сложность и набор заданий, предложенных для решения. Одним из важных аспектов является также прогноз возможных результатов решения, зависящих и от уровня

подготовки участников, и от их специализации, курса, вуза-участника. В своем исследовании мы попытались оценить соответствие уровня сложности, запланированного авторами заданий, реальным результатам решений. Для проведения анализа олимпиадные задачи были условно разделены на четыре группы: стандартные простые, стандартные сложные, нестандартные простые, нестандартные сложные.

Стандартные задачи преследуют цель оценить имеющиеся у участников олимпиады базовые знания по математике и умение применять эти знания на практике. Простые стандартные задачи носят, так называемый, «утешительный» характер. Предполагается, что с ними должны справляться практически все участники. Такие задачи обычно относятся к одному разделу математики. Они предполагают проверку знания методики решения определенного класса задач. Например, решение неравенств или алгебраические действия с числами и выражениями. Конечно же, такие задания не являются тривиальными школьными задачами, но для участников олимпиады не представляют больших затруднений.

Сложные стандартные задачи чаще всего относятся к нескольким разделам математики и проверяют умение объединить свои знания в одну модель и реализовать ее в решении.

С нестандартными задачами дело обстоит несколько сложнее. Разделение на простые и сложные очень субъективно. Бывает, что составителям задача представляется достаточно простой, а большинство участников не могут ее решить. Или наоборот, составители относят задачу к сложным, а для многих участникам олимпиады она оказывается по силам. И все же, градация на простые и сложные задачи имеет место быть, так как для решения некоторых нестандартных задач нужен лишь особый взгляд на условие, а для других еще и глубокие и обширные математические знания. В целом, нестандартные задачи призваны выявить участников с творческим мышлением, умеющих выйти за рамки классических подходов и формулировок, способных посмотреть на задание под другим углом и найти верное решение.

Рассмотрим, как соотносится градация задач по уровням сложности. Градация составлена до проведения интеллектуального соревнования с распределением по степени решаемости и после проверки работ IV Межрегиональной студенческой олимпиады по математике, которая проводилась на базе РГАТУ им. П.А. Соловьева в декабре 2018 года.

Первоначально задачи в варианте были расставлены в порядке возрастания уровня сложности (по мнению составителей). После проверки и подведения итогов задачи были проранжированны по величине обратной среднему баллу (максимальный балл за задачу 10). Чем выше средний

балл, тем большее число участников решило задачу на более высокий балл и тем ниже ранг сложности. Результаты представлены в табл. 1.

Таблица 1

Номер задачи	Средний балл	Ранг по версии составителей (1)	Ранг по среднему баллу (2)
1	3,06	1	4
2	8,17	2	1
3	2,40	3	5
4	3,56	4	3
5	7,05	5	2
6	2,10	6	6
7	1,06	7	9
8	1,27	8	7
9	1,25	9	8
10	0,40	10	10

Коэффициент ранговой корреляции Спирмена для полученного распределения равен 0,82. Он статистически значим на уровне 0,01 (расчетное значение критерия Стьюдента 4,023, табличное 3,355). Что свидетельствует о высокой корреляции между первоначальным распределением по уровню сложности и распределением по уровню решаемости.

Рассмотрим несколько задач, для которых расхождение рангов больше двух.

Задача 1

Пастух, которому вчера исполнилось m лет, пасёт n коров. Он сосчитал в уме, что $3n(2n + 5) - m(n + 4) = 1$. Сколько лет пастуху?

Распределение относительной частоты набранных баллов представлено в табл. 2 и на диаграмме рис. 1.

Таблица 2

Балл	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Частота	26	12	3	2	3	1	3	1	0	3	10
Отн. частота	0,41	0,19	0,05	0,03	0,05	0,02	0,05	0,02	0,00	0,05	0,16

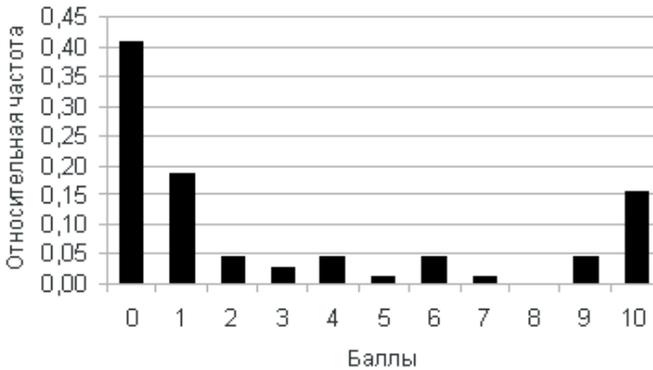


Рис 1. Диаграмма распределения набранных баллов при решении задачи 1

Задача 1 первоначально бала отнесена к стандартным, так как в ней производятся несложные преобразования алгебраического выражения и анализируется, при каком значении переменной выражение примет натуральное значение. При составлении задача казалась простой. Но лишь 16% участников полностью справилось с этой задачей. А 60% или не решали задачу совсем, или набрали всего 1 балл. Возможно, одной из причин этого является тот факт, что понятие натуральных чисел рассматривается в 6-м классе, и в дальнейшем используется мало. Так же в заданиях ЕГЭ эта тема может встретиться только в 19-й задаче с развернутым ответом.

Задача 5

Известны уравнения двух сторон ромба $3x - 4y + 7 = 0$, $4y - 3x - 10 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $x - y + 2 = 0$. Составить уравнение вписанной в ромб окружности.

Распределение относительной частоты набранных баллов представлено в табл. 3 и на диаграмме рис. 2.

Таблица 3

Балл	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Частота	8	1	2	1	1	6	2	5	11	3	24
Отн. частота	0,13	0,02	0,03	0,02	0,02	0,09	0,03	0,08	0,17	0,05	0,38

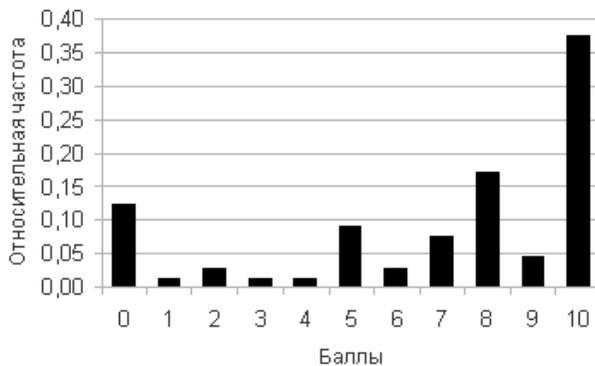


Рис 2. Диаграмма распределения набранных баллов при решении задачи 5

При подготовке олимпиадных заданий эта задача была отнесена к стандартным сложным. При решении задачи нужно было проанализировать взаимное расположение прямых, сделать вывод об их параллельности, оценить положение диагонали и найти координаты центра. А также вычислить величину радиуса окружности. Сами действия стандартные, но их нужно было объединить в одну методику решения задачи. С задачей полностью справились 38% участников. Еще 30% набрали от 7 до 9 баллов, то есть нашли правильный путь решения, но сделали некоторые ошибки.

Рассмотрим задачу 10, которую большинство участников не смогли решить.

Задача 10

Точки плоскости раскрашены в два цвета – синий и красный. Доказать, что для любого $d \in [0, 2018]$, найдется бесконечное множество точек плоскости одного цвета такое, что из него можно выбрать бесконечное множество различных пар точек, причем расстояние между точками в каждой паре равно d .

Распределение относительной частоты набранных баллов представлено в табл. 4 и на диаграмме рис. 3.

Таблица 4

Балл	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Частота	60	0	0	0	0	2	0	1	1	0	0
Отн. частота	0,94	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,00	0,02	0,02	0,00	0,00

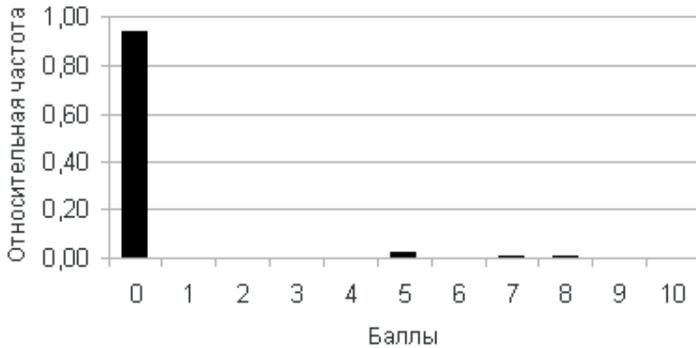


Рис 3. Диаграмма распределения набранных баллов при решении задачи 10

Задача 10 представляет собой классический пример олимпиадной задач. При ее решении не требовалось каких-либо специфических знаний по математике. Необходимо было нестандартно мыслить. А также уметь представлять свои мысли в виде доказательства. Эта задача вызвала наибольшие трудности у участников олимпиады, 94% набрали 0 баллов. Это свидетельствует о том, что среди студентов с хорошей математической подготовкой, участвовавших в олимпиаде, немного творческих и креативных людей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Задачи IV межрегиональной студенческой олимпиады по математике (II этап Всероссийский студенческой олимпиады) / М.А. Башкин, А.И. Бурцев, А.В. Васильева, Л.В. Березина // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 14. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2019. С. 61–72.

УДК 378

М. А. Башкин, А. И. Бурцев

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: vmat@rsatu.ru

О ПОСТЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОМ КОНТРОЛЕ ЗНАНИЙ

Предлагается использовать постзаклучительный контроль знаний для корректировки рабочих программ.

Ключевые слова: *постзаклучительный контроль знаний, эффективность обучения, корректировка рабочих программ.*

M. A. Bashkin, A. I. Burtsev

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: vmat@rsatu.ru

ABOUT POST-FINAL KNOWLEDGE CONTROL

It is proposed to use post-final knowledge control to adjust work programs.

Keywords: *post-final knowledge control, learning efficiency, adjustment work programs.*

Хорошо известно, что в современной педагогической практике используют четыре вида контроля знаний: текущий, тематический, периодический и заключительный. Под постзаклучительным контролем знаний мы будем понимать проверку знаний, осуществляемую после завершения обучения, и проводимую спустя не менее полгода после успешной сдачи экзамена. Основной целью такого контроля является установление уровня подготовки по рассматриваемой дисциплине с целью повышения эффективности обучения. Актуальной является задача мониторинга освоенности материала, позволяющая расставить акценты при обучении, увидеть, что является сложным, на что нужно обращать больше внимания. С некоторыми идеями в этом направлении кафедры высшей математики Рыбинского государственного авиационного технического университета имени П.А. Соловьева можно ознакомиться в работах [1–4].

В сентябре 2019 года на кафедре был проведён эксперимент по использованию постзаклучительного контроля знаний для корректировки рабочей программы по курсу «Математический анализ». Эта дисциплина полностью изучается в течение первого года обучения и содержит четыре раздела:

- 1) дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной;
- 2) дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных;
- 3) обыкновенные дифференциальные уравнения;
- 4) ряды.

Студентам 2-го и 3-го курсов факультета радиотехники, электроники и информатики, сдавшим в своё время «Математический анализ» на «хорошо» и «отлично», было предложено решить 5 задач: три задачи по первому разделу и по одной задаче по третьему и четвёртому разделам. При их решении требовалось проявить знание и понимание пройденного материала. Приведём формулировки заданий:

1. При каких $a \in \mathbf{R}$ функция $f(x) = (a + a^2x + x^2 / 2 + x^3 / 6)e^{-x}$ имеет экстремум при $x = 0$? Что это будет: максимум или минимум?

2. Найти решения уравнения $\int_1^x \frac{xdx}{x^4 + 1} = \frac{\pi}{24}$.

3. При каком значении параметра a интеграл $\int_0^3 |x - a| dx$ имеет наименьшее значение?

4. Найти все интегральные кривые уравнения $y' + x(y')^2 - y = 0$, являющиеся прямыми линиями.

5. Исследовать на сходимость ряд

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^9 + \left(\frac{3}{4}\right)^{16} + \left(\frac{4}{5}\right)^{25} + \dots$$

Использовать справочники и другую литературу, телефоны и прочую электронику было запрещено. Результат оказался следующим. Никто не решил все задачи. С первой задачей справились 67% учащихся, продемонстрировавших умение дифференцировать. Для определения экстремума все они использовали смену знака первой производной. Вторую задачу сделали 2% учащихся. Достаточно много испытуемых забыли таблицу интегралов и поэтому не смогли правильно проинтегрировать. Третью задачу сделали 30% участников. Если с интегралом здесь проблем не было, то с раскрытием модуля не справилось довольно много студентов. Были попытки сделать четвёртую задачу, однако ни у кого решением они не завершились. Пятую задачу решили 6% студентов. Большинство не смогли вспомнить признак Коши.

По результатам проведенного исследования были скорректированы рабочие программы. К сожалению, увеличить время на аудиторную работу не удастся, так как здесь есть жесткое ограничение по времени (36 часов лекций и 54 часа на практические занятия за весь год). Кроме того, не допускается изменение объема часов, отводимых на изучение раздела (темы) из рабочей программы. Поэтому было решено (с учетом специфики факультета):

1) усилить самостоятельную работу учащихся по темам «Исследование поведения функций и построение их графиков», «Неопределённый интеграл» и «Ряды». Для этого необходимо переработать домашние задания и задания типового расчета по указанным темам. Ввести обязательный контроль выполнения домашних заданий;

2) активизировать проведение консультаций преподавателей со студентами;

3) увеличить долю использования информационных технологий на занятиях, провести проверку знаний таблиц производных и интегралов основных элементарных функций с помощью университетской системы TESTOR;

4) провести мониторинг освоенности знаний в следующем году.

На наш взгляд, рассмотренная идея проведения постзаключительного контроля знаний может оказаться весьма эффективной при улучшении качества методик проведения курсов по математике в технических вузах, выбора оптимальных методов обучения. Так как спецификой технических вузов является сравнительно небольшой объем времени, отведенный на изучение курса математики и отсутствие возможности изменять количество часов по каждому разделу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башкин М.А.* Активизация познавательной деятельности студентов на основе использования информационных технологий при проведении лекционных занятий по дискретной математике в техническом вузе // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика: сб. науч. тр. по материалам междунар. науч.-практ. конф. Воронеж: ВГЛТУ, 2015. № 8. Ч. 4 (19-4). С. 403–405.
2. *Башкин М.А.* Об основных понятиях курса высшей математики // Наука. Образование. Общество: Материалы Всерос. науч.-техн. конф. 2017. С.109–112.
3. *Гусарова Н.И.* Совершенствование междисциплинарных связей при изучении математики в техническом вузе / Н.И. Гусарова, Е.В. Олейникова // Наука. Образование. Общество: Материалы Всерос. науч.-техн. конф. 2017. С. 121–125.
4. *Гусаров А.В.* Реализация компетентностного подхода при преподавании дисциплин естественнонаучного цикла в техническом вузе/ А.В. Гусаров, Н.И. Гусарова, Е.В. Олейникова // Математика и естественные науки. Теория и практика. Межвуз. сб. науч. тр. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 300–305.

УДК 51:378.147

Я. В. Войтишек

Санкт-Петербургский государственный экономический университет
Россия, г. Санкт-Петербург, *e-mail*: yan_voytishek@rambler.ru

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН НА ПЕРВОМ КУРСЕ
(ПРИМЕР ЭКОНОМИЧЕСКОГО ВУЗА)**

Анализируются ошибки, сделанные студентами-экономистами во время тестирования по математическим дисциплинам. Даются предложения по их исправлению.

Ключевые слова: *смысл заданий, математический анализ, линейная алгебра.*

Y. V. Voytishek

Sankt-Petersburg State University of Economics
Russia, Sankt-Petersburg, *e-mail*: yan_voytishek@rambler.ru

**MODERN PROBLEMS OF TEACHING MATHEMATICAL
DISCIPLINES IN THE FIRST YEAR
(EXAMPLE OF AN ECONOMIC UNIVERSITY)**

We analyze the errors made by students-economists during testing in mathematical disciplines. Suggestions for correcting them are given.

Keywords: *sense of tasks, mathematical analysis, linear algebra.*

После введения Единого Государственного Экзамена по математике в средней школе не осталось испытаний, проверяющих обученность выпускников формальной логике (до этого во многих, хотя не во всех, школах проводился устный экзамен по геометрии). В результате на первый курс приходят студенты, которых надо «с нуля» учить: чем необходимые условия отличаются от достаточных, свойство от признака и т.д. В этой связи представляется, что в ЕГЭ по математике должна быть устная часть, организованная аналогично устной части ЕГЭ по иностранному языку (под видеозапись). Но пока мы имеем то, что имеем.

Сегодняшний первокурсник, как правило, может решать по образцу, но не рассуждать логически. Ситуация усугубляется тем, что во времена малых зарплат в вузах «расцвели» коррупционные проявления (для полу-

чения достойной оценки нужно было позаниматься за деньги с экзаменатором), в результате чего Министерство (время от времени меняющее название) попыталось минимизировать количество устных экзаменов, предлагая заменить их письменным тестированием, т.е. аналогом ЕГЭ для 19-20-летних людей. Причем не многочасовым, как ЕГЭ в школе, а 45- или 90-минутным. Вузы, которые брали задания для таких тестов в Йошкар-Оле, получили «новый» для Министерства контракт: студенты приходили на это тестирование с распечатками заданий и правильных ответов, купленных в Интернете. Автор, будучи сотрудником СПбГТИ(ТУ), сам отнимал эти распечатки.

Санкт-Петербургский государственный экономический университет (место нынешней работы автора) делит экзамены по математическим дисциплинам 1- и 2-х курсов на три части: 2 письменные контрольные точки, на каждой из которых студент может набрать до 30 баллов, и устный экзамен во время сессии, где у преподавателя в распоряжении до 40 баллов. Достоинством такой системы является «тройная» сессия: на 8-й и 15-й неделях семестра и собственно в сессию студенты интенсивно занимаются, приводя в порядок знание теории. При этом в некоторых группах тренерами являются студенты 3- и 4-х курсов, которые поддерживают таким образом и свои собственные знания: у экономистов 3-4-х курсов нет математических дисциплин. В то же время один из недостатков нынешней системы оценки знаний – невозможность поставить плохо подготовившемуся к экзамену студенту «тройку» - если он набрал больше 48 баллов по контрольным точкам.

Нужно отдать должное составителям тестов СПбГЭУ по математическому анализу и линейной алгебре – включающей и аналитическую геометрию (частично опубликованных в [1–5]), в них немало теоретических вопросов, проверяющих знание и понимание формулировок теорем и определений. Эти вопросы и вызывают у студентов наибольшие проблемы. Например, не все студенты нынешнего 1-го курса смогли верно ответить на вопрос 1-й контрольной точки по математическому анализу «Правда ли, что любая убывающая последовательность ограничена сверху?»: нужно было сообразить, что в убывающей последовательности все члены не превосходят первого.

Автор постарался проанализировать наиболее характерные ошибки, допущенные студентами вверенных ему групп за последние 3 года.

В задачах по линейной алгебре неожиданные проблемы вызвали задачи, где нужно было аккуратно применить определения и простейшие свойства.

Задача. Найти собственное число матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ко-

торому соответствует собственный вектор $X = \begin{pmatrix} 29 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Задача решается устно, если помнить определение собственного вектора. Достаточно вычислить всего один элемент вектора $AX = \lambda X$ (проще – третий, равный 18), откуда $\lambda = 3$. Тем не менее многие студенты не поняли, что предлагается не «решать по образцу» задачу нахождения собственного числа и собственного вектора, а воспользоваться их определением.

Вызвала проблемы и следующая

Задача. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти

сумму элементов матрицы X , удовлетворяющей уравнению $|A^{-1}| \cdot X^T = B$, где $|A^{-1}|$ – определитель матрицы, обратной к A .

Здесь нужно: знать, что данное уравнение равносильно уравнению $X^T = |A|B$, уметь вычислять определитель матрицы A и понимать, что сумма элементов транспонированной матрицы равна сумме элементов исходной. Но и в этом случае примерно четверть студентов не смогла преодолеть нестандартную формулировку задачи. Поэтому нынешним преподавателям приходится готовить студентов к адекватному восприятию нестандартно поставленных стандартных задач.

В задачах математического анализа о приращениях и дифференциалах составители предложили неожиданно большие для студентов значения приращения аргумента, и это тоже вызвало у них проблемы.

Пример. Дана функция $y = ax^2 + bx + c$. Известно, что в точке $x_0 = -4$ при $\Delta x = -1$ приращение и дифференциал соответственно равны $\Delta y = 1$ и $dy = 0,5$. Найти $a + b$.

Здесь как раз задача, которая «решается по образцу»: поскольку ни приращение, ни дифференциал не зависят от вертикального сдвига c , то получим два уравнения с двумя неизвестными a и b . Тем не менее и здесь многие не справились (подвели арифметические навыки?).

Некоторые задачи можно решить 2-3 способами, и студенты, которые такими способами владеют, успевают прорешать их по-разному.

Пример. Функция $f(x) = \sin^2 2x$ задана на отрезке $[0, \pi/4]$. Вычислить значение производной функции, обратной к данной, в точке $y_0 = 0,5$.

Эту задачу можно решить непосредственно: получить обратную функцию $x = 0,5 \arcsin \sqrt{y}$, продифференцировать её и подставить $y = 0,5$. Но первокурсники побаиваются арксинуса, поскольку в нынешней средней школе обсуждают арксинус как число, но не как элементарную функцию. Здесь лучше использовать производную исходной функции, предварительно найдя точку $x_0 = \pi/8$, в которой $f(x) = 0,5$; её проще подставить в производную $f'(x) = 2 \sin 4x$. Получится 2, значит, производная обратной функции равна 0,5. Обошлись без арксинуса. Но и так смогли решить не все.

Вызвали проблемы и задачи с рациональными ответами (задач с иррациональными ответами не бывает – их не умеет распознавать проверяющий компьютер).

Пример. Функция $y = \frac{2kx - 3b}{x^2}$ имеет точку экстремума (2,1). Найти $k+b$.

Типовая задача, решение которой приводит к значению искомой суммы, равной 10/3. К таким ответам, оказывается, приучены не все первокурсники. Они сами так и говорят: мы не готовы к нецелым ответам.

Есть задачи, в которых правильность ответа очевидна после его получения.

Пример. Функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x) = \frac{2x - 3}{5 + 3x - x^2}$, причём $F(4) = 2/3$. Найти $F(-1)$.

Здесь нужно увидеть возможность подведения знаменателя под знак дифференциала, но если при этом сразу заметить, что не только заданная функция симметрична относительно точки $x = 1,5$, а ещё и абсциссы заданной и искомой точек, то ответ сразу ясен: значение первообразной в точке -1 такое же, как в точке 4. Задача преподавателя – постараться научить студентов видеть это (даже если они первоначально не заметили симметрии абсцисс точек).

Наибольшие же проблемы вызвали задачи на анализ непрерывности функций.

Пример. Дана функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ($f(x) = -1$ при $x < 0$; $f(x) = 0$ при $x = 0$; $f(x) = 1$ при $x > 0$). Из четырех функций, $g_1(x) = f(x) - f(-x)$, $g_2(x) = \cos(\pi f(x))$, $g_3(x) = f^2(x)$ и $g_4(x) = x^2 f(x)$, нужно было выбрать ту, которая при $x = 0$ не имеет разрыва.

Здесь многие указали вторую функцию вместо четвертой, и это связано с плохим знанием тригонометрических функций: это знание уменьшается из года в год.

Таким образом, у преподавателя математических дисциплин появились новые задачи:

- показать и объяснить студентам 1-го курса не только неизвестные им графики обратных тригонометрических функций, но и известные (как выясняется, не всем) – тригонометрические, показательные и логарифмические, знание которых не требуется при подготовке к Единому государственному экзамену по математике;

- показать все способы в задачах, которые могут быть решены не одним способом, и убедиться, что студенты их усвоили;

- проверять, что студент понимает формулировки утверждений и смысл условий задач, т.е. много общаться устно (роль устного общения возрастает, в то время как роль лекций уменьшается, поскольку в нынешнее «информационное» время несложно добыть как лекции лучших преподавателей, так и ответы к любым задачам).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математический анализ. Подготовка к тестированию: учебное пособие / Г.В. Савинов [и др.]. СПб.: Изд-во СПбГЭУ, 2018.
2. Математический анализ (2): методические указания для подготовки к тестированию. СПб: Изд-во СПбГУЭФ, 2011.
3. Аналитическая геометрия: методические указания для подготовки к тестированию. СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2011.
4. Практикум по аналитической геометрии: учебное пособие / С.Е. Игнатова, В.С. Итенберг. СПб.: Изд-во СПбГЭУ, 2016.
5. Основы линейной алгебры: учебное пособие / С.Е. Игнатова, В.С. Итенберг. СПб.: Изд-во СПбГЭУ, 2017.

УДК 51

И. В. Войтко, Н. М. Гулевич, В. О. Кузнецов

Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: voytko.irina@yandex.ru,
gulevich.nikolay@gmail.com, kvo_kuz@mail.ru

О НЕРАВЕНСТВАХ В ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ

Даны некоторые применения неравенств из векторной алгебры для решения олимпиадных задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функций нескольких переменных.

Ключевые слова: вектор, наибольшее и наименьшее значения функции, неравенство треугольника.

I. V. Voytko, N. M. Gulevich, V. O. Kuznetsov

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Russia, Saint Petersburg, e-mail: voytko.irina@yandex.ru,
gulevich.nikolay@gmail.com, kvo_kuz@mail.ru

ON THE INEQUALITIES IN VECTOR ALGEBRA

The application of vector algebra inequalities for solving the olympiad problems of finding the global maximum and minimum of functions of several variables are given.

Keywords: vector, the global maximum and minimum of the function, the triangle inequality.

Пусть $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ – векторы в \mathbb{R}^3 . Справедливы неравенства:

$$||\bar{x}| - |\bar{y}|| \leq |\bar{x} \pm \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}| \quad (1)$$

– неравенство треугольника (здесь $|\bar{x}|, |\bar{y}|$ – длины векторов \bar{x}, \bar{y});

$$\left| \sum_{k=1}^n \bar{x}_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |\bar{x}_k| \quad (1.1)$$

– обобщение неравенства треугольника на случай n векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ из \mathbb{R}^3 (или \mathbb{R}^2), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, при этом равенство в формуле (1.1) достигается

ся только в том случае, когда любые два вектора из совокупности векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ одинаково направлены или хотя бы один из этих двух векторов нулевой (два ненулевых вектора \bar{x} и \bar{y} называются одинаково направленными, если $\bar{y} = \alpha\bar{x}$, где $\alpha > 0$);

$$|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \quad (2)$$

– неравенство для скалярного произведения векторов \bar{x} и \bar{y} , причём равенство в (2) достигается только в том случае, когда векторы \bar{x} и \bar{y} коллинеарны;

$$|\bar{x} \times \bar{y}| \leq |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \quad (3)$$

– неравенство для векторного произведения векторов, в (3) равенство достигается только в том случае, когда векторы \bar{x} и \bar{y} ортогональны;

$$|\bar{x} \cdot (\bar{y} \times \bar{z})| \leq |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \cdot |\bar{z}| \quad (4)$$

– неравенство для смешанного произведения векторов $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, причём равенство достигается только в том случае, когда векторы $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ попарно ортогональны.

Для векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\bar{z} = (z_1, z_2, z_3)$ перепишем неравенства (2) – (4) в координатной форме:

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}; \quad (2.1)$$

$$\sqrt{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}; \quad (3.1)$$

$$abs \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad (4.1)$$

где $abs(t) = |t|$, $t \in \mathbb{R}$.

Покажем, как при помощи этих неравенств решаются некоторые олимпиадные задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функций нескольких переменных.

Задача 1 ([3, с.15]). Найти наименьшее значение функции

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 + (x - a)^2} + \sqrt{1 + (y - x)^2} + \sqrt{1 + (z - y)^2} + \sqrt{1 + (b - z)^2}$$

в области $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq y \leq z \leq b\}$.

Решение. Рассмотрим на координатной плоскости точки

$$M_0(0, a), M_1(1, x), M_2(2, y), M_3(3, z), M_4(4, b)$$

и векторы

$$\vec{u} = \overline{M_0M_1} = (1, x - a), \quad \vec{v} = \overline{M_1M_2} = (1, y - x), \quad \vec{w} = \overline{M_2M_3} = (1, z - y),$$

$$\vec{t} = \overline{M_3M_4} = (1, b - z).$$

По неравенству (1.1) имеем

$$f(x, y, z) = |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| + |\vec{t}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t}| = |(4, b - a)| = \sqrt{16 + (b - a)^2},$$

причём равенство достигается в том случае, когда векторы $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ и \vec{t} лежат на одной прямой. Значит, у каждой пары этих векторов соответствующие координаты пропорциональны, и, следовательно,

$$\frac{1}{1} = \frac{y - x}{x - a} = \frac{z - y}{y - x} = \frac{b - z}{z - y}.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$x = \frac{3a + b}{4}; \quad y = \frac{a + b}{2}; \quad z = \frac{a + 3b}{4}.$$

Так как точка $\left(\frac{3a + b}{4}, \frac{a + b}{2}, \frac{a + 3b}{4}\right)$ принадлежит области $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq y \leq z \leq b\}$, то $\sqrt{16 + (b - a)^2}$ – наименьшее значение функции $f(x, y, z)$ в этой области.

Замечание. В [3] решение задачи 1 неполное. Кроме того, использование методов векторной алгебры позволило получить более общий результат, а именно, найден глобальный минимум функции $f(x, y, z)$ на \mathbb{R}^3 .

Задача 2 (II Межвузовский конкурс КаПИ решения нестандартных задач по физике и математике 2018 г.).

Точка $M(x, y, z)$ принадлежит эллипсоиду $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{5/9} + \frac{z^2}{5} = 1$. Какие значения может принимать сумма $x + 3y + z$?

Решение. Рассмотрим векторы: $\vec{a} = (1, 1, 1)$ и $\vec{b} = (x, 3y, z)$, где x, y, z – координаты точки M . Тогда по неравенству (2.1) получаем:

$$|x + 3y + z| = |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |1 \cdot x + 1 \cdot 3y + 1 \cdot z| \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{x^2 + 9y^2 + z^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15},$$

причём равенство здесь достигается, когда векторы \bar{a} и \bar{b} коллинеарны, то есть при условии, что соответствующие координаты векторов \bar{a} и \bar{b} пропорциональны:

$$\frac{x}{1} = \frac{3y}{1} = \frac{z}{1}.$$

Решая систему уравнений $\begin{cases} x = 3y = z, \\ x^2 + 9y^2 + z^2 = 5 \end{cases}$, находим

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}, \quad y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}, \quad z = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Поскольку эллипсоид – связное множество, то непрерывная функция $f(x, y, z) = x + 3y + z$ принимает на нём все значения из отрезка $[-\sqrt{15}; \sqrt{15}]$.

Задача 3 ([3, с. 32]). Доказать, что для любых $x_k, y_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} & (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leq \\ & \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2). \end{aligned}$$

Решение. Заметим, что для векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ левая часть неравенства из условия задачи равна $|\bar{x} \times \bar{y}|^2$, и по неравенству (3) или (3.1)

$$|\bar{x} \times \bar{y}|^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2),$$

причём равенство будет достигаться, когда \bar{x} и \bar{y} ортогональны:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0.$$

Задача 4 (Межвузовская математическая студенческая олимпиада БГАРФ 2018 г.). Доказать, что координаты (x, y) всех точек линии $x^2 + y^2 + 2y - 7 = 0$ удовлетворяют неравенству

$$|(x + y + 2)(x(y + 2) + y - 8)| \leq 27.$$

Решение. Для векторов $\bar{a} = (x, y + 1, 1)$, $\bar{b} = (y + 1, 1, x)$, $\bar{c} = (1, x, y + 1)$, где $x^2 + y^2 + 2y - 7 = 0$, смешанное произведение

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} x & y+1 & 1 \\ y+1 & 1 & x \\ 1 & x & y+1 \end{vmatrix} = (x+y+2)(x(y+2)+y-8).$$

Тогда по неравенству (4.1) получаем

$$|(x+y+2)(x(y+2)+y-8)| \leq \left(\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}\right)^3 = 27,$$

поскольку $x^2+(y+1)^2+1 = x^2+y^2+2y+2 = 9$.

Если векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ попарно ортогональны, что равносильно условию $x+x(y+1)+y+1=0$, то получаем равенство. Осталось только проверить, что система уравнений

$$\begin{cases} x+x(y+1)+y+1=0, \\ x^2+y^2+2y-7=0 \end{cases}$$

совместна. Действительно, система имеет решения $x_1 = -2, y_1 = -3$
 $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}, y_{2,3} = \mp \sqrt{3}$, причём

$$(x+y+2)(x(y+2)+y-8) = \begin{cases} 27 & \text{при } x = -2, y = -3, \\ -27 & \text{при } x = 1 \pm \sqrt{3}, y = \mp \sqrt{3}. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельной работы

Задача 5 ([3, с.14]). В какой точке плоскости функция

$$f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2-8x+16} + \sqrt{x^2+y^2-8y+16} + \sqrt{x^2+y^2-18x-6y+90}$$

достигает наименьшего значения?

Задача 6. Найти наименьшее значение $|\bar{x}|$, если $|\bar{x} + \bar{a}| - |\bar{x} - \bar{a}| = \frac{|\bar{a}|}{2}$,

где \bar{a} – данный вектор в \mathbb{R}^3 .

Задача 7 ([2, с.12]). Доказать, что $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0,5 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & -\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 & 2 \end{vmatrix} \leq 20.$$

При каких α достигается равенство?

Задача 8 ([1], с.176). Докажите, что координаты любой точки

$$M(x, y, z) \text{ кривой } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \text{ удовлетворяют неравенству } \begin{vmatrix} 0 & -y & z \\ y & x & 0 \\ z & 0 & y \end{vmatrix} \leq 8.$$

Выполняется ли знак равенства?

Задача 9 ([2], с.12]). Докажите, что координаты любой точки

$M(x, y)$ окружности $x^2 + y^2 = \frac{5}{4}$ удовлетворяют неравенству

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ y & x & 1 \\ 1 & y & x \end{vmatrix} \leq \frac{27}{8}.$$

При каких x и y выполняется равенство?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беркович Ф.Д. Задачи студенческих олимпиад по математике с указаниями и решениями / Ф.Д. Беркович, В.С. Федий. Ростов-на-Дону: Феникс, 2008. 262 с.
2. Беркович Ф.Д. Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями / Ф.Д. Беркович, В.С. Федий, В.И. Шлыков. Новочеркасск: ЮРГТУ (НПИ), 2001. 192 с.
3. Попов И.Ю. Задачи студенческих математических олимпиад. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2006. 154 с.

УДК 51

Н. М. Гулевич¹, В. О. Кузнецов¹, С. А. Старостина²

¹Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: gulevich.nikolay@gmail.com,
kvo_kuz@mail.ru

²Военный институт (Железнодорожных войск и военных сообщений)
Военной академии материально-технического обеспечения
им. генерала армии А.В. Хрулёва
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: sardana-starostina@mail.ru

О МАТРИЦЕ ИЗ ЕДИНИЦ

Приведены некоторые свойства квадратной матрицы из единиц и представлено несколько олимпиадных задач, решаемых с использованием этих

свойств. Данный материал можно использовать на занятиях студенческого математического кружка.

Ключевые слова: матрица, определитель, алгебраическое дополнение.

N. M. Gulevich¹, V. O. Kuznetsov¹, S. A. Starostina²

¹Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Russia, Saint Petersburg, e-mail: kvo_kuz@mail.ru

²Military Institute (of railway Troops and Military Transport)
of Khrulev Military Academy of Logistics
Russia, Saint Petersburg, e-mail: sardana-starostina@mail.ru

ON THE MATRIX OF UNITS

Some properties of a square matrix of units are presented, and several olympiad problems are solved that are connected with these properties. This material can be used in the work of the student mathematical olympiad lesson.

Keywords: matrix, determinant, algebraic complement.

В этой работе матрицей из единиц называется такая квадратная матрица $I = I_n$ порядка $n \geq 2$, все элементы которой равны единице; $E = E_n$ – единичная матрица порядка n .

Приведем некоторые свойства матрицы I .

1. $I^2 = nI$, $I^k = nI^{k-1} = n^{k-1}I$, $k = 2, 3, \dots$

2. Если $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ – многочлен степени $m \geq 1$, то

$$P(I) = \sum_{k=0}^m a_k I^k = a_0 E + \left(\sum_{k=1}^m a_k n^{k-1} \right) I = P(0)E + \frac{1}{n}(P(n) - P(0))I, \quad (1)$$

где $I^0 = E$.

3. Для перестановочных матриц A и B справедлива формула матричного бинома: $(A+B)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k A^{m-k} B^k$. Поскольку $EI = IE = I$, то из (1), в частности, получаем

$$(E + \alpha I)^m = E + \frac{1}{n}((1 + \alpha n)^m - 1)I; \quad (2)$$

$$(I + \beta E)^m = \beta^m E + \frac{1}{n}((\beta + n)^m - \beta^m)I;$$

$$(\alpha I + \beta E)^m = \beta^m E + \frac{1}{n}((\beta + \alpha n)^m - \beta^m)I.$$

4. Для любой матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\det(A + \alpha I) = \det A + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}, \quad (3)$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} .

Доказательство. Используя первую строку, представим $\det(A + \alpha I)$ в виде суммы двух определителей:

$$\det(A + \alpha I) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} + \alpha & \cdots & a_{2n} + \alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + \alpha & \cdots & a_{nn} + \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \cdots & \alpha \\ a_{21} + \alpha & \cdots & a_{2n} + \alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + \alpha & \cdots & a_{nn} + \alpha \end{vmatrix}.$$

Обозначим первый из этих определителей через Δ и преобразуем второй, вычитая первую его строку из всех остальных:

$$\det(A + \alpha I) = \Delta + \begin{vmatrix} \alpha & \cdots & \alpha \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta + \alpha \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta + \alpha \sum_{j=1}^n A_{1j}.$$

Аналогично, представляя определитель Δ с помощью второй его строки в виде суммы двух определителей и преобразуя второй из получившихся определителей, получим:

$$\Delta = \Delta' + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \alpha & \cdots & \alpha \\ a_{31} + \alpha & \cdots & a_{3n} + \alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + \alpha & \cdots & a_{nn} + \alpha \end{vmatrix} = \Delta' + \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & \cdots & 1 \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta' + \alpha \sum_{j=1}^n A_{2j},$$

где

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} + \alpha & \cdots & a_{3n} + \alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + \alpha & \cdots & a_{nn} + \alpha \end{vmatrix}.$$

Продолжая этот процесс по индукции, окончательно получим

$$\det(A + \alpha I) = \det A + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}. \blacksquare$$

Если $A = E$, то $A_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ и, следовательно, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = n$.

Поэтому справедливо равенство

$$5. \det(E + \alpha I) = 1 + \alpha n.$$

6. Суммы алгебраических дополнений всех элементов матрицы A и $A + \alpha I$ равны при любом $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть, B_{ij} – алгебраические дополнения элементов матрицы $B = A + \alpha I$. Из формулы (3) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} &= \det(B + I) - \det B = \det(A + (\alpha + 1)I) - \det(A + \alpha I) = \\ &= \det A + (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} - \left(\det A + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7. Если $\lambda \neq 0$, то используя свойство 5, получаем

$$\det(I - \lambda E) = (-\lambda)^n \det(E - \lambda^{-1}I) = (-\lambda)^n (1 - n\lambda^{-1}) = (-\lambda)^{n-1} (n - \lambda).$$

Поскольку все строки матрицы I одинаковы, то $\det I = 0$ и, значит, равенство

$$\det(I - \lambda E) = (-\lambda)^{n-1} (n - \lambda)$$

справедливо при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Поэтому у матрицы I всего два собственных числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = n$ и, соответственно, два инвариантных подпространства: $(n-1)$ -мерное (гиперплоскость) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$ и одномерное $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \dots = x_n\}$.

8. Из свойства 5 вытекает, что при $\alpha \neq -\frac{1}{n}$ матрица $E + \alpha I$ обратима. Справедлива формула

$$(E + \alpha I)^{-1} = E - \frac{\alpha}{n\alpha + 1} I. \quad (4)$$

Доказательство.

$$(E + \alpha I) \left(E - \frac{\alpha}{n\alpha + 1} I \right) = E + \alpha I - \frac{\alpha}{n\alpha + 1} I - \frac{\alpha^2}{n\alpha + 1} I^2 = E + \frac{n\alpha^2}{n\alpha + 1} I - \frac{\alpha^2}{n\alpha + 1} nI = E. \quad \blacksquare$$

9. Для $m \in \mathbb{N}$ из (2) и (3) получаем

$$\begin{aligned} (E + \alpha I)^{-m} &= \left(E - \frac{\alpha}{n\alpha + 1} I \right)^m = E + \frac{1}{n} \left((1 + \alpha n)^{-m} - 1 \right) I, \quad \alpha \neq -\frac{1}{n}; \\ (\alpha I + \beta E)^{-m} &= \beta^{-m} E + \frac{1}{n} \left((\beta + \alpha n)^{-m} - \beta^{-m} \right) I, \quad \beta \neq 0, \alpha \neq -\frac{\beta}{n}. \end{aligned}$$

10. Используя свойство 1, нетрудно подобрать α так, чтобы $(\alpha I)^k = I$:

$$(\alpha I)^k = I \Leftrightarrow \alpha^k n^{k-1} I = I \Leftrightarrow \alpha = n^{-1+1/k}.$$

Поэтому матрица $n^{-1+1/k} I$ является корнем k -й степени из матрицы I . В частности, матрица $\frac{1}{\sqrt{n}} I$ – квадратный корень из I .

Рассмотрим несколько олимпиадных задач, в которых можно применить свойства матрицы I .

1. (Ярославская областная открытая студенческая олимпиада по математике 2013 года) Найти матрицу, обратную к квадратной матрице n -го порядка A с элементами $a_{ij} = 3$ при $i = j$ и $a_{ij} = 2$ при $i \neq j$.

Решение. $A = E + 2I$. Из формулы (4) получаем

$$A^{-1} = E - \frac{2}{2n+1} I.$$

2. (Всероссийская студенческая олимпиада по математике. Ярославль, ЯГТУ, 2014 г.) Найти хотя бы одно решение матричного уравнения $X^2 - 2X - Q = O$, где Q – квадратная матрица 2014 порядка, на главной диагонали которой стоят нули, а вне нее – единицы, O – нулевая матрица.

Решение. Поскольку $Q = I - E$, где $I = I_{2014}$, то

$$X^2 - 2X - Q = O \Leftrightarrow X^2 - 2X + E = I \Leftrightarrow (X - E)^2 = I.$$

В силу свойства 10 матрицы $X = E \pm \frac{1}{\sqrt{2014}} I$ являются корнями этого уравнения.

3. (Открытая математическая олимпиада Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов, 2006 г.) Пусть A – квадратная матрица порядка $n = 2006$, все элементы которой равны единице, E – единичная матрица такого же порядка. Найти матрицу $(E - A)^{-2006}$.

Решение. По условию задачи $A = I_{2006}$. Используя свойство 9, находим

$$(E - I)^{-2006} = E + \frac{1}{2006} (2005^{-2006} - 1) I.$$

4. (Региональная студенческая математическая олимпиада Санкт-Петербурга 2010 г.) Пусть $a, b > 0$, $A = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$. Найти такую квадратную матрицу B , что $B^8 = A$.

Решение. По условию задачи $A = (a - b)I + 2bE$, $n = 2$. Ищем искомую матрицу в виде $B = \alpha I + \beta E$. В силу свойства 3 должно выполняться равенство

$$B^8 = \beta^8 E + \frac{1}{2}((\beta + 2\alpha)^8 - \beta^8)I = (a - b)I + 2bE.$$

Находя α и β из системы уравнений

$$\begin{cases} \beta^8 = 2b, \\ (\beta + 2\alpha)^8 - \beta^8 = 2(a - b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta^8 = 2b, \\ (\beta + 2\alpha)^8 = 2a \end{cases}, \quad (5)$$

получим $\beta = \sqrt[8]{2b}$, $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt[8]{2a} - \sqrt[8]{2b})$. Откуда

$$B = \frac{1}{2}(\sqrt[8]{2a} - \sqrt[8]{2b})I + \sqrt[8]{2b}E = \frac{\sqrt[8]{2}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt[8]{a} + \sqrt[8]{b} & \sqrt[8]{a} - \sqrt[8]{b} \\ \sqrt[8]{a} - \sqrt[8]{b} & \sqrt[8]{a} + \sqrt[8]{b} \end{pmatrix}$$

(система (5) имеет четыре решения, мы ограничились здесь случаем $\beta > 0$, $2\alpha + \beta > 0$).

Задачи для самостоятельной работы

1. Покажите, что матричное уравнение $X^2 = I_2$ имеет ровно два решения.

2. Покажите, что матричное уравнение $X^2 = E_2$ имеет бесконечно много решений.

3. Найти 4 различных решения матричного уравнения $X^4 = A$, где $A = (a_{ij})_{i,j=1}^4$, $a_{ij} = \begin{cases} 21, & i = j, \\ 20, & i \neq j. \end{cases}$

4. Показать, что для любой квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ справедливо равенство $|AI| = \lambda I$, где $\lambda = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$.

5. Матрица A называется *кососимметрической*, если $A^T = -A$. Показать, что для любой кососимметрической матрицы A порядка $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, и произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\det(A + \alpha I) = \det A$.

6. Найти аналоги описанных выше свойств для матриц $I' = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i + j \equiv 0 \pmod{2}, \\ 0, & i + j \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$ и $I'' = (b_{ij})_{i,j=1}^n$, $b_{ij} = \begin{cases} 0, & i + j \equiv 0 \pmod{2}, \\ 1, & i + j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гулевич Н.М. Об одном методе вычисления определителей n -го порядка / Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов // Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе: сб. докл. семинара. Вып. 7. СПб.: ВИТУ, 2005. С.38–42.

УДК 66.047.37

В. К. Леонтьев, О. Н. Кorableва, О. В. Малышкина

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: leontievvk@ystu.ru,
korablevaon@yandex.ru, studebaker-us6@yandex.ru

О ДВИЖУЩЕЙ СИЛЕ ПРОЦЕССА СУШКИ

Представлен подход к определению движущей силы процесса сушки при изучении дисциплины «Процессы и аппараты химической технологии». Рассмотрены способы определения движущей силы и средней движущей силы. Отмечены факторы, влияющие на величину движущей силы. Приведен порядок определения движущей силы процесса сушки.

Ключевые слова: движущая сила, процесс сушки, кинетический закон, коэффициент массоотдачи.

V. K. Leontiev, O. N. Korableva, O. V. Malyskina

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: leontievvk@ystu.ru,
korablevaon@yandex.ru, studebaker-us6@yandex.ru

ABOUT THE DRIVING FORCE OF THE DRYING PROCESS

We give an approach to determining the driving force of the drying process in the study of the discipline "Processes and apparatus of chemical technology." The methods of determining the driving force and the average driving force are considered. The factors influencing the magnitude of the driving force are noted. The procedure for determining the actual driving force of the drying process is given.

Keywords: driving force, drying process, kinetic law, mass transfer coefficient.

В курсе «Процессы и аппараты химической технологии» рассматриваются принципы устройства и методы расчета аппаратов и машин на основе анализа закономерностей протекающих в них процессов. Многие материалы (исходные, промежуточные или конечные) в различных химических производствах часто содержат избыточное количество жидкости. Для удаления влаги, частичного или полного, используется процесс сушки [1].

По своей физической сущности сушка является сложным диффузионным и тепловым процессом, причем скорость процесса определяется скоростью диффузии влаги из глубины высушиваемого материала в окружающую среду или скоростью распространения тепла внутрь материала.

Кинетический закон для первого периода процесса сушки в общем виде можно записать [2]:

$$W = \beta \cdot S \cdot \Delta \cdot \tau,$$

где W - количество испаряемой влаги, кг;

β - коэффициент массоотдачи;

S - поверхность контакта фаз, m^2 ;

Δ - средняя движущая сила процесса сушки;

τ - время первого периода процесса сушки, с.

В представленном выше уравнении наибольшую сложность представляет определение средней движущей силы процесса сушки, поскольку в учебной литературе нет четкого подхода к определению величин, входящих в выражение для определения Δ .

В зависимости от того, как рассматривается процесс, среднюю движущую силу определяют по-разному.

1. Если рассматривать процесс сушки, как тепловой, то движущая сила может быть определена равенством (рис. 1, а):

$$\Delta t = t_{ca} - t_m,$$

где t_{ca} - температура сушильного агента, градус;

t_m - температура мокрого термометра, градус.

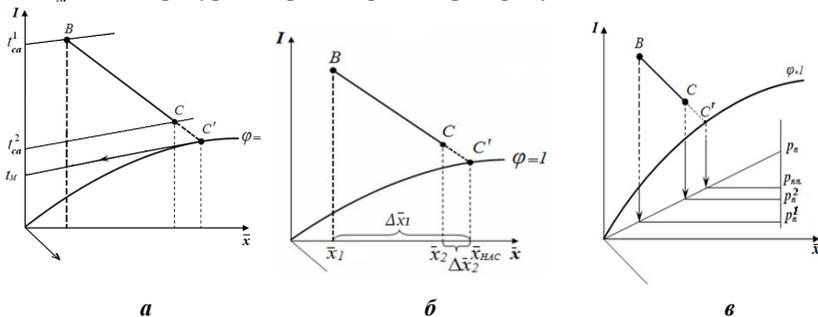


Рис 1. Определение движущей силы процесса сушки

В процессе сушки эта движущая сила изменяется, поэтому в случае равномерного удаления влаги с поверхности высушиваемого материала, средняя движущая сила рассчитывается по формуле

$$\Delta t_{cp} = \frac{(t_{ca}^1 - t_m) - (t_{ca}^2 - t_m)}{\ln \frac{(t_{ca}^1 - t_m)}{(t_{ca}^2 - t_m)}}.$$

При этом для определения величин, входящих в это выражение на диаграмме Рамзина по двум известным параметрам влажного воздуха находят точку B (начало процесса) и точку C (окончание процесса). Температуры сушильного агента в этих точках обозначаются t_{ca}^1 , t_{ca}^2 . Отрезок BC отображает действительный процесс сушки на диаграмме Рамзина, продлевая эту линию до пересечения с линией насыщения ($\varphi=100\%$), получаем точку C' . Температура сушильного агента в этой точке – температура мокрого термометра t_m .

В этом случае коэффициент массоотдачи β_i имеет размерность $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot ^\circ\text{C})$.

2. Если рассматривать процесс сушки как массообменный (диффузионный), то движущая сила может быть выражена (рис. 1, б)

$$\Delta \bar{x} = \bar{x}_{нас} - \bar{x},$$

где $\bar{x}_{нас}$ - влагосодержание насыщенного воздуха при температуре поверхности материала, $\text{кг}/\text{кг}$ сухого воздуха;

\bar{x} - действительное влагосодержание воздуха, $\text{кг}/\text{кг}$ сухого воздуха.

При этом средняя движущая сила может быть рассчитана по формуле

$$\Delta \bar{x}_{cp} = \frac{(\bar{x}_{нас} - \bar{x}_1) - (\bar{x}_{нас} - \bar{x}_2)}{\ln \frac{(\bar{x}_{нас} - \bar{x}_1)}{(\bar{x}_{нас} - \bar{x}_2)}}.$$

Значения \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , $\bar{x}_{нас}$ определяются по точкам B , C и C' , как показано на рис. 1, б.

В этом случае коэффициент массоотдачи β_x имеет размерность $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{кг}/\text{кг}$ сухого воздуха).

3. Можно движущую силу процесса сушки представить как разность давлений насыщенного пара у поверхности материала и парциального давления паров в воздухе (рис. 1, в):

$$\Delta p = p_{nn} - p_n,$$

При этом средняя движущая сила может быть рассчитана:

$$\Delta p = \frac{(p_{nn} - p_n^1) - (p_{nn} - p_n^2)}{\ln \frac{(p_{nn} - p_n^1)}{(p_{nn} - p_n^2)}}.$$

Для определения движущей силы в начале и конце процесса на диаграмме Рамзина в правом нижнем углу имеется номограмма, позволяющая

определить парциальное давление водяного пара. Для точек B и C парциальное давление (p_n^1 и p_n^2) находят, опуская перпендикуляр до пересечения с вышеуказанной линией. Парциальное давление для точки C' соответствует давлению насыщенного пара (p_{nm}).

В этом случае коэффициент массоотдачи β_p имеет размерность $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{мм рт. ст.})$.

На величину движущей силы оказывают влияние такие факторы, как перемешивание потоков в аппарате, энергия связи влаги с материалом, полидисперсность высушиваемого материала [2].

Для нахождения реальной движущей силы используется выражение [1]:

$$\Delta\chi = \frac{\chi_1 - \chi_2}{\int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{d\chi}{\chi_p - \chi}},$$

где χ_1, χ_2 - параметр сушильного агента в начале и конце процесса;

χ_p - параметр сушильного агента соответствующий насыщению;

$\int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{d\chi}{\chi_p - \chi}$ - число единиц переноса (ЧЕП).

Для определения ЧЕП на практических и лабораторных занятиях широко используется графоаналитический метод расчета (*метод графического интегрирования*). Задаются несколькими значениями параметра (t, \bar{x}, p), для каждого значения определяют величину $(t - t_m)$, $(\bar{x}_{нас} - \bar{x})$, $(p_{nm} - p)$ - разность рабочих и равновесных параметров. Число единиц переноса, которое характеризует изменение рабочих концентраций на единицу движущей силы, определяется через площади под графиками функций

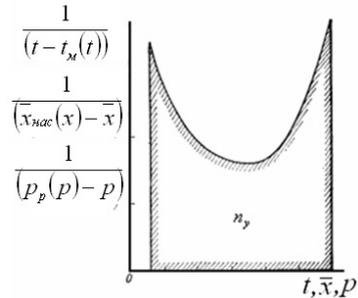
$$f(t) = \frac{1}{(t - t_m(t))}, \quad f(\bar{x}) = \frac{1}{(\bar{x}_{нас}(\bar{x}) - \bar{x})}, \quad f(p) = \frac{1}{(p_p(p) - p)}$$

при известных начальных и конечных параметрах процесса (рис. 2).

Площадь S под кривой определяют методом прямоугольников или методом трапеций. Тогда ЧЕП находят, умножая площадь под кривой на масштаб диаграммы:

$$\text{ЧЕП} = S \cdot m_y \cdot m_x.$$

Рис. 2. Определение числа единиц переноса процесса сушки



Широкое использование методов графического интегрирования в изучении технических дисциплин, таких как «Процессы и аппараты химической технологии», связано не только с наглядностью представленной методики, но позволяет понять суть изучаемого процесса, особенно это важно для визуалистов, коими в основном и являются студенты технических вузов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Касаткин, А. Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. 15-е изд. М.: Альянс, 2009. 759 с.
2. Плановский А.Н. Процессы и аппараты химической и нефтехимической технологии. 2-е изд. М.: Химия, 1972. 469 с.

УДК 66.011

В. К. Леонтьев, М. А. Юровская, Е. Е. Кучина, Е. Е. Зазулина

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: barashevama@ystu.ru

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ПЕРВОГО ПЕРИОДА СУШКИ

Проанализированы существующие математические зависимости, позволяющие рассчитать время первого периода сушки. Предложен способ определения времени первого периода сушки.

Ключевые слова: процесс сушки влажных материалов, свободная влага, критическое влагосодержание, кинетика первого периода сушки, продолжительность сушки.

V. K. Leontiev, M. A. Yurovskaya, E. E. Kuchina, E. E. Zazulina

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: barashevama@ystu.ru

ON THE DETERMINATION OF THE DURATION OF THE FIRST DRYING PERIOD

The paper analyzes existing mathematical dependencies, which allow calculating the time of the first drying period. We propose a method of determining a time of a first drying period.

Keywords: *drying process of wet materials, free moisture, critical moisture content, kinetics of the first drying period, drying duration.*

Процесс сушки является одним из самых сложных процессов химической технологии. В нем происходит перенос и тепла и массы, т.е. это сложный тепло-массообменный процесс.

Различают два вида влаги, содержащейся в материале: свободная и связанная. *Свободная влага* – это влага, которая удерживается механическими силами, для ее испарения необходимо затратить только энергию, необходимую для парообразования (в основном это влага, находящаяся в микро- и макропорах вещества). *Связанная влага* – это влага, для испарения которой необходима дополнительная затрата тепла на преодоление энергии связи. Различают несколько форм связи влаги с материалом: структурная влага; б) осмотическая влага; адсорбционная влага; химическая влага. Последняя форма удерживается наиболее прочно, и ее удаление осуществляют специальной операцией – прокаливанием (при сушке не удаляется). Энергия связи адсорбционной влаги приближается к энергии парообразования, и ее удаление требует значительного времени сушки.

Как установлено экспериментально, наиболее интенсивно испаряется свободная влага, причем, испарение происходит в основном с поверхности материала, а образующийся водяной пар диффундирует через пограничный слой газа в окружающий воздух. В материале возникает разность концентраций влаги между поверхностными и центральными слоями. Под действием этой разности концентраций влага перемещается из внутренних слоев к поверхностным. Пока влага из внутренних слоев подводится в количестве, достаточном для смачивания поверхности, скорость сушки остается постоянной. Этот период сушки получил название первого периода сушки или периода постоянной скорости сушки. В первом периоде скорость сушки определяется внешними условиями (температурой, относительной влажностью, линейной скоростью движения сушильного

агента). Характерной особенностью первого периода является и постоянство температуры высушиваемого материала. Она близка к температуре «мокрого термометра». Первый период сушки далее переходит во второй период или период убывающей скорости сушки. Влажность материала, которая соответствует моменту перехода первого периода сушки во второй, называют *критическим влагосодержанием* (влажностью). Во втором периоде количество подводимой влаги к поверхности испарения в единицу времени уменьшается. Это приводит к понижению скорости сушки, повышению температуры материала. Второй период продолжается до достижения равновесного влагосодержания. Во втором периоде сушки скорость сушки лимитируется внутренними процессами переноса тепла и массы. Следовательно, она зависит от структуры материала, его температуры, формы связи влаги с материалом и др.

При расчете процесса очень важным является определение продолжительности процесса. Особенно вызывает споры определение продолжительности первого периода сушки.

В некоторых источниках продолжительность первого периода сушки T определяют по приближенному уравнению [1]:

$$T = (u_1^0 - u_k^0) / N,$$

где N – скорость сушки в первом периоде, кг влаги/(кг сухого вещества · с); u_1^0 и u_k^0 – начальная и критическая влажность высушиваемого материала, кг влаги/ кг сухого вещества.

Недостатком этого способа является обязательное проведение экспериментальных исследований с построением кривых скорости сушки. Но время, рассчитанное по кривой сушки, всегда меньше требуемого, так как при сушке в реальных условиях разности температур и влагосодержаний ниже, чем в лабораторных условиях. Поэтому для студентов, изучающих курс «Процессы и аппараты химической технологии», предлагается использовать следующий метод.

Пусть в сушилку подается G (кг/с) влажного материала с влажностью u_1^0 и критической влажностью u_k^0 . Расход абсолютно сухого воздуха L , а его начальное и конечное влагосодержание соответственно \bar{x}_n и \bar{x}_k . Количество свободной влаги, удаляемой в сушилке, W (кг влаги/с), выражается через эти характеристики по формулам

$$W = G \frac{u_1^0 - u_k^0}{100 + u_1^0} \quad (1)$$

и

$$W = L(\bar{x}_k - \bar{x}_n). \quad (2)$$

Если бы после процесса сушки воздух уходил насыщенным, то его влагосодержание было бы \bar{x}_m . Пусть $\bar{x} = \bar{x}(t)$ – влагосодержание воздуха в произвольном сечении сушилки (кг влаги/кг сухого воздуха) в момент времени t . Количество dW свободной влаги, испаренной за «бесконечно малое» время dt с поверхности материала S можно считать пропорциональным движущей силе $(\bar{x}_m - \bar{x})$ и промежутку времени dt :

$$dW = K(\bar{x}_m - \bar{x}) \cdot S dt, \quad (3)$$

где K – коэффициент массопередачи, кг влаги/(м²·с·(кг влаги/кг сухого воздуха)).

С другой стороны,

$$-dW = L \cdot \bar{x}(t + dt) - L \cdot \bar{x}(t) = L \cdot d\bar{x}, \quad (4)$$

Из (3) и (4) получаем для $\bar{x} = \bar{x}(t)$ дифференциальное уравнение

$$K(\bar{x}_m - \bar{x}) \cdot S dt = -L d\bar{x},$$

или

$$\frac{d\bar{x}}{\bar{x} - \bar{x}_m} = \frac{K \cdot S}{L} dt. \quad (5)$$

Интегрируем (5) в пределах от 0 до T , где T – время процесса сушки:

$$\int_0^T \frac{d\bar{x}(t)}{\bar{x}(t) - \bar{x}_m} = \frac{K \cdot S}{L} \int_0^T dt$$

или

$$\int_{\bar{x}_m}^{\bar{x}_k} \frac{d\bar{x}}{\bar{x} - \bar{x}_m} = \frac{K \cdot S}{L} \cdot T.$$

Отсюда, учитывая, что $\bar{x}_k < \bar{x}_m$; $\bar{x}_n < \bar{x}_m$, получаем формулу для нахождения времени процесса сушки:

$$T = \frac{L}{K \cdot S} \ln \frac{\bar{x}_m - \bar{x}_k}{\bar{x}_m - \bar{x}_n}.$$

Величину L можно получить из формул (1) и (2). Коэффициент массопередачи K для воздуха и его смеси с топочными газами можно определить по формуле [2]:

$$K = 0,25(\nu \cdot \rho \cdot g)^{0,8},$$

где ν – средняя линейная скорость воздуха, м/с;

ρ – плотность воздуха, кг/м³.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Павлов К.Ф.* Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии. Учебное пособие для вузов / К.Ф. Павлов, П.Г. Романков, А.А. Носков; под ред. чл.-корр. РАН П.Г. Романкова. 12-е изд., стер. М.: ООО ТИД «Альянс», 2005. 576 с.
2. *Гельперин Н.И.* Основные процессы и аппараты химической технологии: в 2 кн. М.: Химия, 1981. 812 с.

УДК 51-7

Е. В. Олейникова, Н. И. Гусарова

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: *ev.olejnikova@yandex.ru*,
gusarova-73@mail.ru

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

В статье обсуждается целесообразность использования методов дискретной математики при изучении разделов теории вероятностей в техническом вузе. Приведены конкретные примеры применения элементов теории множеств при решении задач.

Ключевые слова: междисциплинарные связи, сложение и умножение вероятностей, теория множеств, круги Эйлера, визуализация.

E. V. Oleynikova, N. I. Gusarova

*P. A. Solovyov Rybinsk State University of Aviation Technology
Russia, Rybinsk, e-mail: ev.olejnikova@yandex.ru,
gusarova-73@mail.ru*

**THE USE OF SET THEORY ELEMENTS
TO SOLVE PROBABILITY THEORY PROBLEMS**

The article discusses the feasibility of using the discrete mathematics methods in the study of probability theory sections in a technical University. Specific examples of set theory elements application in solving problems are given.

Keywords: interdisciplinary connections, addition and multiplication of probabilities, set theory, Euler circles, visualization.

В настоящее время в преподавании теории вероятностей сложились два противоположных подхода. Первый из них – классический. Он основан на интуитивных представлениях о случайном эксперименте, элементарных событиях и на определении вероятности как степени достоверности события. Второй подход – теоретико-множественный. В его основе лежат абстрактные понятия теории меры и функционального анализа.

При изучении теории вероятности в техническом вузе имеет смысл брать за основу именно классический подход, в который при необходимости включаются строгие аксиоматические понятия.

Преимущества такого способа построения курса состоят в следующем:

- простейшие базовые понятия и задачи теории вероятности основаны только на знаниях элементарной математики;
- при дальнейшем изучении курса можно активно привлекать материал других дисциплин математического блока, в первую очередь элементы дискретной математики, что способствует укреплению междисциплинарных связей [1];
- теория вероятностей при таком подходе практически без изменения терминологии становится теоретической базой для математической статистики.

Дискретная математика в РГАТУ им. П. А. Соловьева изучается как отдельная дисциплина на трёх специальностях направления подготовки 09.03.00 «Информатика и вычислительная техника». Это 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.03 «Прикладная информатика» и 09.03.04 «Программная инженерия». При преподавании дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» студентам этих направлений активно привлекаются различные методы дискретной математики [2]. Но и для остальных специальностей имеет смысл использовать основы этих разделов при решении задач. В настоящее время только комбинаторика традиционно изучается при введении понятия классической вероятности. На кафедре высшей математики РГАТУ им. П. А. Соловьева разработаны задачи по большинству разделов теории вероятностей, привлекающие методы дискретной математики. Это становится особенно актуально в связи с увеличением доли иностранных студентов, для которых наглядность преподавания зачастую выходит на первое место при усвоении предметов математического цикла.

Раздел «Теоремы сложения и умножения» всегда очень тяжело принимается студентами. В курсе теории вероятностей изучаются следующие понятия – сложение, умножение событий, противоположные события. Здесь важно обратить внимание студентов на полную аналогию между операциями над множествами и над событиями. Объекты и отношения в

этих разделах математики одинаковы. Разница заключается лишь в терминологии. Поэтому приёмы решения задач по теории множеств легко переносятся на теорию вероятностей. Покажем на примерах решение задач на нахождение суммы и произведения событий с использованием кругов Эйлера. Условия для примеров 1 и 2 взяты из [3], а для примера 3 – из [4].

Пример 1

В небольшом магазине работают два продавца – Андрей и Иван. Каждый из них может быть занят с клиентом с вероятностью 0,45. При этом они могут быть заняты одновременно с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный момент времени занят только Иван, а Андрей свободен.

Решение:

Одним из кругов (рис. 1) обозначим событие А – «Андрей занят с клиентом», вторым кругом обозначим событие В – «Иван занят с клиентом». По условию задачи вероятности первого и второго события равны по 0,45, при этом вероятность одновременной работы продавцов с клиентами (АВ) есть 0,3. Вероятность того, что в случайно выбранный момент времени занят только Иван, а Андрей свободен, соответствует разности множеств $(A \setminus B)$ и определяется разностью соответствующих вероятностей $P(B \setminus A) = 0,45 - 0,3 = 0,15$.

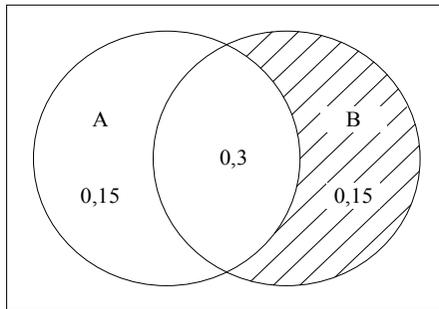


Рис. 1. Круги Эйлера для примера 1

Ответ: вероятность того, что в случайно выбранный момент времени занят только Иван, а Андрей свободен, равна 0,15.

Пример 2

В торговом центре два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится чай, равна 0,4. Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах, равна 0,2. Найдите вероятность того, что к концу дня чай останется в обоих автоматах.

Решение:

Обозначим A_i – событие, состоящее в том, что к концу дня в i -м автомате закончится чай ($i = 1,2$). Тогда $P(A_1) = P(A_2) = 0,4$. Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах ($A_1 \cdot A_2$), равна 0,2. Требуется найти вероятность события B – к концу дня чай останется в обоих автоматах. Изобразим события в виде кругов Эйлера (рис. 2).

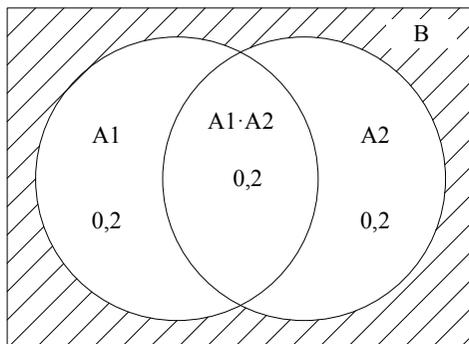


Рис. 2. Круги Эйлера для примера 2

Тогда событию B будет соответствовать множество $U \setminus (A_1 \cup A_2)$, где U – достоверное событие. Согласно формуле включений и исключений для множеств, имеем

$$P(B) = P(U \setminus (A_1 \cup A_2)) = P(U) - (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2)) = \\ = 1 - (0,4 + 0,4 - 0,2) = 0,4.$$

Ответ: вероятность того, что к концу дня чай останется в обоих автоматах, равна 0,4.

Пример 3

По данным переписи населения (в 1891 г.) Англии и Уэльса установлено: темноглазые отцы и темноглазые сыновья составили 5% обследованных лиц, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья – 7,9%, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья составили – 8,9%, светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья – 78,2%. Найти связь между цветом глаз отца и сына.

Решение:

Воспользуемся модификацией кругов Эйлера для визуализации задачи. Множество отцов представлено большим кругом, множество сыновей – малым. Учитывая условие задачи, светлая часть круга – светлоглазые люди, заштрихованная часть круга – темноглазые люди (рис. 3). Ведём события: A_1 – светлоглазый отец, A_2 – темноглазый отец, B_1 – светлоглазый сын, B_2 – темноглазый сын. По условию

$$P(A_1 B_1) = 0,782, P(A_1 B_2) = 0,089, P(A_2 B_1) = 0,079, P(A_2 B_2) = 0,05.$$

Из рисунка видно, что

$$P(A_1) = P(A_1 B_1) + P(A_1 B_2) = 0,089 + 0,782 = 0,871;$$

$$P(A_2) = P(A_2 B_1) + P(A_2 B_2) = 0,079 + 0,05 = 0,129.$$

А требуемые условные вероятности – это части, которые составляют соответствующие малые сектора от больших. Получим

$$P(B_1 | A_1) = P(A_1 B_1)/P(A_1) = 0,782/0,871 = 0,898;$$

$$P(B_2 | A_1) = P(A_1 B_2)/P(A_1) = 0,089/0,871 = 0,102;$$

$$P(B_1 | A_2) = P(A_2 B_1)/P(A_2) = 0,079/0,129 = 0,612;$$

$$P(B_2 | A_2) = P(A_2 B_2)/P(A_2) = 0,05/0,129 = 0,388.$$

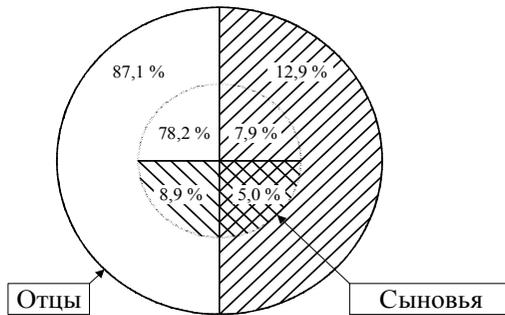


Рис. 3. Модификация кругов Эйлера для примера 3

Ответ: у светлоглазых отцов 89,8% сыновей – светлоглазые и 10,2% сыновей – темноглазые; у темноглазых отцов 61,2% сыновей – светлоглазые и 38,8% сыновей – темноглазые.

Таким образом, привлечение элементов теории множеств значительно упрощает понимание студентами основных разделов теории вероятностей и повышает их заинтересованность в выявлении междисциплинарных связей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башкин М.А. Об основных понятиях курса высшей математики // Наука. Образование. Общество: Материалы Всерос. науч.-техн. конф. 2017. С. 109-112.
2. Башкин М.А. Активизация познавательной деятельности студентов на основе использования информационных технологий при проведении лекционных занятий по дискретной математике в техническом вузе // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. Т. 3, № 8-4 (19-4). С. 403-405.

3. ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 36 вариантов. Типовые тестовые варианты от разработчиков ЕГЭ и 800 заданий части 2 // И.В. Яценко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий [и др.]; под ред. И.В. Яценко. М.: Изд-во «Экзамен», изд-во МНЦМО, 2019. 239 с.
4. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. 6-е изд., доп. М.: Высш. шк., 2002. 405 с.

УДК 51:378

Ю. К. Оленикова

АНАЛИЗ ИТОГОВ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail: olenikovajk@ystu.ru*

Приводятся сведения о межрегиональной студенческой олимпиаде по математике, проходившей на базе Ярославского государственного технического университета в 2019 году, дается анализ ее итогов.

Ключевые слова: студенческая математическая олимпиада, итоги.

Ju. K. Olenikova

ANALYSIS OF THE RESULTS OF THE INTERREGIONAL STUDENT OLYMPIAD IN MATHEMATICS

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, *e-mail: olenikovajk@ystu.ru*

The article gives the information on the interregional student mathematical Olympiads, held on the basis of Yaroslavl State Technical University in 2019, and analyzes its results.

Keywords: student mathematical Olympiad, results.

Олимпиада проводилась 29 ноября – 1 декабря 2019 года Ярославским государственным техническим университетом (ЯГТУ) совместно с Рязанским государственным радиотехническим университетом им. В.Ф. Уткина (РГРТУ) в г. Ярославле на базе ЯГТУ. В ней принимали участие студенты и магистранты вузов, а также курсанты военных академий и училищ без ограничения возраста и направления обучения – всего 153 участ-

ника, среди которых 51 – учащиеся первых курсов и 102 – учащиеся второго и старших курсов. География участников – 23 высших учебных заведения из 13 городов России, входящих в состав 8 регионов и 4 федеральных округов: Центральный, Приволжский, Северо-западный и Сибирский.

Для обсуждения итогов стоит перечислить и вузы-участники. Это университеты, среди которых 2 классических: КГУ (г. Кострома) и ЯрГУ (г. Ярославль); 5 технических: МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва), РГРТУ (г. Рязань), РГАТУ (г. Рыбинск), ЯГТУ (г. Ярославль) и СамГТУ (г. Самара); 1 технологический: РТУ МИРЭА (Москва); 1 педагогический: НГПУ (г. Новосибирск); 3 научно-исследовательских: НИУ МГСУ (Москва), филиал НИУ МГСУ (г. Мытищи) и ИАТЭ НИЯУ МИФИ (г. Обнинск); 2 экономических: СПбГЭУ (Санкт-Петербург) и Ярославский филиал Финуниверситета. Кроме того, 1 сельскохозяйственная академия (г. Ярославль) и 8 военных академий и училищ: Академия ФСО России (г. Орел), ВА РВСН (г. Балашиха), ВА ВКО (г. Тверь), ВА РХБЗ (г. Кострома), ВУНЦ ВМФ ВМА и КА им. А.Ф. Можайского (Санкт-Петербург), ФВА РВСН (г. Серпухов); ЯВВУ ПВО (г. Ярославль).

Олимпиады ЯГТУ вышли за рамки вузовских в 1996 году. Сначала это были областные олимпиады для студентов экономических специальностей. Поводом послужило начало участия сильных в то время студентов-экономистов ЯГТУ во всероссийских студенческих олимпиадах для экономических специальностей вузов в г. Екатеринбурге. Затем в соответствии со статусом вуза стали проводить олимпиады для студентов экономических и технических специальностей, как областные, так и межрегиональные, всероссийские и международные. Уровень и качество олимпиадных задач, составлением которых все эти годы занимается доцент кафедры ВМ ЯГТУ В.Ш. Ройтенберг, «задачный композитор», как принято называть таких людей [1], привлекли к участию в олимпиадах и студентов математических специальностей.

На всероссийских студенческих математических олимпиадах принято: если олимпиада проводится осенью, то к участию в ней приглашаются студенты, начиная со второго курса. Решение о приглашении на настоящую олимпиаду первокурсников было принято по просьбе представителей вузов, постоянных участников олимпиад, проводимых ЯГТУ. Цель понятна – пораньше привлечь молодежь к углубленному изучению математических дисциплин для повышения интереса к фундаментальному образованию и улучшению его качества.

В соответствии с Положением об этой олимпиаде задания для первокурсников предполагали знание элементарной математики, начал анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии. Задания для учащихся второго и старших курсов, кроме того, могли содержать задачи по разде-

лам: дифференциальное и интегральное исчисления функции одной и нескольких переменных; дифференциальные уравнения и ряды.

В статье В.Ш. Ройтенберга [2], опубликованной в настоящем сборнике, представлены тексты олимпиадных заданий и примеры их решений. Задача 2 для первого курса и задача 9 для старших курсов достаточно известны; остальные задачи более или менее оригинальны. При отборе задач для олимпиады, как обычно, пришлось руководствоваться многочисленными соображениями. Во-первых, в традиции наших олимпиад [3], по возможности, представлять все изучаемые темы в рамках объявленных в Положении разделов. Во-вторых, с одной стороны, нужны «простые», но все же не откровенно учебные задачи, а с другой стороны, чтобы были задачи, которые мог бы решить только «лучший» участник. Кроме того, хотелось, чтобы в рамках одной задачи по возможности использовались методы из разных разделов как школьного, так и вузовского курса математики. Как нам представляется, указанные соображения в определенной мере удалось реализовать.

В этой олимпиаде сохранена и еще одна традиция олимпиад ЯГТУ: в олимпиадном задании задачи располагаются не по степени трудности, а в привычном порядке разделов, изучаемых в вузе.

Впервые почти за полувековой опыт проведения ЯГТУ математических олимпиад разного уровня в настоящей статье сделана попытка провести качественный анализ итогов состоявшейся олимпиады. Задача оказалась непростой. Мы привыкли говорить, что уровень математического образования не только в стране, но и в мире падает. А так ли это? Если сравнить задания олимпиады этого года и задания 10-летней давности (что автор и сделал, прежде чем написать эту фразу), то вряд ли они были сложнее. В результате беглого анализа всех олимпиадных заданий ЯГТУ сложилось впечатление, что нижний уровень заданий если и немного ниже, то верхний все-таки не падает. А результаты становятся лучше. Для примера сравним итоги всероссийского этапа ВСО среди участников второго и старших курсов, например, 2014 года (первокурсников тогда не было), и настоящей олимпиады (табл. 1).

Таблица 1. Баллы, полученные обучающимися на втором и старших курсах в олимпиадах 2014 г. и 2019 г.

Год олимпиады	Балл /кол-во получивших			Средний балл	Доля работ с баллом 0, %
	1 место	2 место	3 место		
2014	77/1	43/1	41/1	6,22	23
2019	61/2	57/2	50 /3	23,95	8

Воспользуемся этой таблицей в общих выводах и продолжим обсуждение олимпиады этого года.

Рассматривая всевозможные системы оценок, мы в очередной раз пришли к выводу, что идеальной оценки не существует, и в этом году отказались от предварительной «разбалловки» заданий. И впервые решили проверять все задачи по десятибалльной системе. Оказалось, что ничего страшного в этом нет. Победили все равно сильнейшие, ведь для победы надо было правильно решить максимальное количество задач. То есть пытаться, по крайней мере, решать все задачи.

Жизнь в современном мире и практически во всех сферах человеческой деятельности во многом зависит от умения правильно оценить свои силы, поставить задачи и выбрать стратегию их решения. И это также обсуждалось, когда принималось решение не оценивать задачи данной олимпиады в баллах.

В приведенных ниже таблицах дана качественная оценка решений задач олимпиады.

Уже из первой строки табл. 2 ясно, что первокурсники, вчерашние выпускники, хорошо усвоили стратегию решения задач ЕГЭ «от простого к сложному», где в таком порядке расположены и задания [4]. Практически все взялись за вычисление определителя 6 порядка, простого, но громоздкого, и многие запутались в вычислениях. Надеемся, что этот опыт принесет пользу в дальнейшем и участникам олимпиад, и их тренерам.

Таблица 2. Результаты обучающихся на 1 курсе

Номер задачи	Доля приступивших к решению задачи, %	Доля правильно решивших задачу, %	
		от общего числа участников	от числа приступивших к решению
1.	90	29	33
2.	61	8	13
3.	61	24	39
4.	59	12	20
5.	36	6	17
6.	75	37	50
7.	18	0	0
8.	59	4	7
9.	24	2	8
10.	71	16	22

Еще по попыткам решения задач прослеживается, что при подготовке к ЕГЭ, очевидно, уделяется достаточное внимание исследованию многочленов (по задачам 6 и 10), а в вузах векторной алгебре и аналитиче-

ской геометрии (по задачам 3 и 4). Только с одной из десяти задач, задаче №7 на последовательности, не справился ни один студент. Скорее всего, это свидетельствует о недостаточном внимании к данной теме при обучении в вузе. Кстати, и приступило к решению этой задачи наименьшее количество участников.

Аналогичная таблица для учащихся второго и старших курсов оказалась неинтересной для анализа, несмотря на значительно большее число участников – 102 человека (не с кем и не с чем сравнивать). При внимательном рассмотрении итогов выявилось, что они тесно связаны с курсом обучения (табл. 3).

Таблица 3. Баллы, полученные обучающимися на втором и старших курсах

Курс		2	3	4-5
Количество участников		51	28	23
Баллы	максимальный	61	61	57
	минимальный	0	0	13
	средний	14,74	23,25	33,86

Поскольку для качественного анализа наиболее интересно, какой процент от приступивших к решению задачи довел это решение до конца, то сведем данные в одну таблицу, не рассматривая долю правильно решивших от общего числа участников.

Таблица 4. Результаты обучающихся на втором и старших курсах

	Доля приступивших к решению задачи, %			Доля правильно решивших от числа начавших решение, %		
	2 курс	3 курс	4-5 курсы	2 курс	3 курс	4-5 курсы
1.	57	86	96	59	58	55
2.	67	86	83	9	17	21
3.	37	61	30	0	18	29
4.	75	79	87	18	23	45
5.	55	64	87	32	44	70
6.	31	21	39	0	0	10
7.	43	25	74	14	43	41
8.	31	36	56	6	0	8
9.	37	79	78	57	91	89
10.	51	46	70	8	0	13

Выводы из табл. 4 очевидны и свидетельствуют о том, что к концу обучения в вузе в олимпиадах по математике участвуют только большие

любители математики, что настоящие знания никуда не исчезают, а накопленный опыт позволяет выбрать правильную стратегию.

Из приведенных таблиц также видно, что из приступивших к решению задачи есть хотя бы один студент, который довел решение до конца, и это решение правильное. Исключение составила задача 7 для первокурсников. Этот факт говорит, во-первых, о том, что уровень составленных заданий вполне соответствует олимпиадному. Во-вторых, примененную систему оценивания решения задач можно использовать и в дальнейшем, что освобождает составителей от ненужных мук и сомнений при расстановке баллов, а соревнующихся учит выбирать правильную стратегию. Представленные таблицы могут быть полезны не только готовящимся к участию в олимпиадах и их тренерам, но и преподавателям вузов: из них, кроме отмеченных автором выводов, каждый может извлечь для себя немало нужной ему информации.

В результате анализа сохранившихся документов и более 20 олимпиад разного уровня можно сделать также следующие выводы.

Совсем недавно, когда не было ЕГЭ и на экономических факультетах были бюджетные места, студенты ЯГТУ вполне могли соперничать с такими вузами, как МГТУ им. Н.Э. Баумана, МИРЭА. Например, в олимпиаде 2014 года лучший результат среди студентов МИРЭА был 12 баллов, у МГТУ - 17 баллов, у ЯГТУ - 35 баллов. Теперь же из Ярославля выпускники целыми (лучшими!) классами выезжают на учебу в Москву и Санкт-Петербург. То же самое происходит во всех городах Центрального федерального округа. И среди участников олимпиад из вузов Москвы большая часть – иногородние студенты. Причина оттока молодежи из провинциальных городов в мегаполисы известна и заключается не только в получении лучшего образования. Жизнь и экономика в России такова, что заставляет даже пожилых людей из разных концов страны ехать, например, в Москву, и работать там вахтенным методом консьержами в крупных домах, охранниками в школах, детских садах, магазинах, а молодых людей искать там постоянную работу. К тому же в последние годы прошла крупная акция по объединению и присоединению вузов, что увеличивает количество обучающихся и, соответственно, возможность выбора студентов для участия в олимпиадах. Например, МИРЭА, московский вуз, который не имел общежития, и в который могли поступать только студенты с московской пропиской, благодаря присоединению в 2014 году нескольких институтов с их общежитиями стал Российским технологическим университетом. И уже третий год студенты МИРЭА - победители (причем в этой олимпиаде в обоих конкурсах) не только олимпиад ЯГТУ. Несомненно, немаловажна и роль бессменного руководителя команды Н.В. Белецкой.

Однако автор статьи по себе знает, что хорошо быть руководителем и заниматься кружком, когда есть подготовленный природой и школой материал. Присоединение МГУЛ к МГТУ им. Н.Э. Баумана произошло в 2016 году. Вряд ли именно этот факт повлиял на качество решения задач участниками олимпиады, но в последних олимпиадах мы значительно уступаем им. В этой олимпиаде студенты МГТУ заняли 2 место среди первокурсников и 3 место среди старшекурсников.

Скорее всего, в основном, простые человеческие и экономические причины: после окончания гарантированная работа и жилье, повышение зарплат военным, возможность карьерного роста, возможность раннего выхода на пенсию, очевидно, стали снова привлекать молодых людей в военные академии и училища. В связи с бурным развитием сложной военной техники и оборонной промышленности, от военных вузов требуется повышение качества фундаментального образования специалистов, поэтому они не готовят бакалавров, а только специалистов. Военные вузы поочередно проводят Всеармейскую международную олимпиаду и ежегодно участвуют в ней. Быть на ней победителем – очень престижно. А отсюда и ежегодное повышение количества участников военных вузов в гражданских математических олимпиадах [5]. Так, в настоящей олимпиаде 45,1% участников среди вторых и старших курсов – курсанты военных вузов, их средний балл 24,6, что значительно выше, чем средний балл студентов математических специальностей (16,3) и немного выше, чем общий средний балл в этой номинации (23,8). Ряд лучших результатов также принадлежат курсантам военных вузов (см. табл. 1): 1-е место одновременно с РТУ МИРЭА занял курсант 3 курса ВА ВКО (г. Тверь), 2-е место одновременно с РТУ МИРЭА занял курсант 4 курса ФВА РВСН (г. Серпухов), 3-е место одновременно со студентом МГТУ им. Н.Э. Баумана заняли 2 курсанта (3- и 4-го курса) из ВКА им. А.Ф. Можайского (Санкт-Петербург).

Просматривая коды направлений участников олимпиады, можно только удивляться красоте звучаний некоторых из них. Например, 24.05.01 – Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов. Не исключено, что это тоже один из возможных факторов привлекательности военных вузов для молодежи. Поэтому провинциальным вузам, не желающим терять свои позиции, следует серьезно озаботиться открытием новых специальностей, востребованных в своих регионах, пока в каждом из вузов еще есть специалисты и энтузиасты, готовые тратить на это время, силы и жизнь.

Возвращаясь к вопросу, падает ли уровень математического образования, можно ответить так: «да», у той части молодежи, которой, по видимому, это образование не нужно, и «нет», у тех, кто любит и занимается математикой. И задача математических олимпиад – помогать им.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назар Агаханов о воспитании «задачных композиторов» [Электронный ресурс] Режим доступа: <https://sochisirius.ru/news/1662>
2. *Ройтенберг В.Ш.* О задачах межрегиональной студенческой математической олимпиады (Ярославль-2019) // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 15. Ярославль, 2020. С. 122-132.
3. *Ройтенберг В.Ш.* Задачи студенческих математических олимпиад ЯГТУ: учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова, Л.А. Сидорова. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2015. 151 с.
4. Стратегия сдачи ЕГЭ — правильно распределяем время [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://net-stressu.ru/?p=800>.
5. *Оленикова Ю.К.* О ярославских студенческих математических олимпиадах 2018 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш.Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 14. Ярославль, 2019. С. 99–109.

УДК 373.3/.5+372.016:51.40

А. Ю. Пугач, А. И. Букина, З. Е. Табиханова

Новосибирский государственный педагогический университет
Россия, г. Новосибирск, *e-mail:pugach_an@mail.ru,*
bukina19999@gmail.com, tabikhanovazoya@gmail.com

**АНАЛИЗ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ПЕРВОГО КУРСА
НА ОСНОВЕ РЕЗУЛЬТАТОВ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ**

Рассматриваются результаты проведения математической олимпиады на первом курсе педагогического вуза. Проводится анализ ошибок и уровня подготовки к решению нестандартных задач студентами первого курса института физико-математического и информационно-экономического образования.

Ключевые слова: *математическая олимпиада, олимпиадные задачи, нестандартные математические задачи.*

A. Y. Pugach, A. I. Bukina, Z. E. Tabihanova

Novosibirsk State Pedagogical University
Russia, Novosibirsk, *e-mail:pugach_an@mail.ru,*
bukina19999@gmail.com, tabikhanovazoya@gmail.com

**ANALYSIS OF FIRST-YEAR STUDENTS' KNOWLEDGE BASED
ON THE RESULTS OF A MATHEMATICAL OLYMPIAD**

This article presents an overview of a mathematical olympiad for first-year students of the pedagogical university. It provides analysis of mistakes and level of preparation to solve non-standard tasks by first-year students of institute of physico-mathematical, informatical and economic education.

Keywords: *mathematical olympiad, olympiad tasks, non-standard mathematical tasks.*

В октябре этого года в Институте физико-математического и информационно-экономического образования Новосибирского государственного педагогического университета (ИФМИЭО НГПУ) была проведена ежегодная олимпиада по математике для студентов 1-го курса этого института, в которой приняли участие 101 человек. Организацией и ее проведением под руководством преподавателей занимались студенты старших курсов этого же института.

К целям проведения данной олимпиады относятся отбор студентов, способных и заинтересованных в решении олимпиадных нестандартных задач по математике, повышение мотивации к обучению, развитие методических навыков при подборе и составлении заданий, формирование организаторских способностей будущих педагогов. Олимпиада для первокурсников проводится уже в тринадцатый раз. Как правило, ее проводят спустя месяц после начала первого семестра.

В этом году к решению предлагалось 11 задач разного уровня сложности, среди которых были предложены две задачи на знание свойств чисел, алгебраическое уравнение и алгебраическое неравенство, задача на построение графика, тригонометрическое уравнение, задача на логику и теорию вероятностей, текстовая задача на движение, задача на разрезание и две геометрических задачи. Выбор задач был обусловлен целями олимпиады, в частности – проверкой умения решать задачи, хотя бы частично отличающиеся от рядовых, стандартных задач, а также проверкой наличия математической грамотности первокурсников.

Рассмотрим успешность выполнения и ошибки, допущенные студентами при выполнении заданий олимпиады.

В первой задаче были даны четыре числа: 1, 3, 4, 6. Требовалось переставить их и получить число 24, используя знаки арифметических действий $+$; $-$; \times ; \div и скобки.

Эту задачу решила треть студентов, половина решила неправильно, остальные не брались за задачу. Ошибки были допущены в понимании условия и разницы между понятиями числа и цифры, а также в счете.

Вторая задача была более олимпиадного характера. Требовалось разрезать крест, составленный из пяти одинаковых квадратов, на три прямоугольника, равных по площади и периметру (рис. 1).

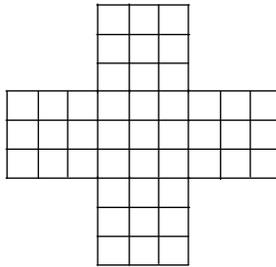


Рис. 1

С этим справились 30% участников олимпиады. Поскольку задача имеет не единственное решение, а бралось за нее большинство, студенты нашли не только те способы разрезания, что были известны организаторам олимпиады, но и другие. Ошибочные решения содержали деление фигуры на части, периметры которых не были равны, что свидетельствует о невнимательной работе с условием задачи.

Третья задача – на построение графика функции $y = x^2 - 4|x| + 3$. Около половины приступивших к решению строили график по точкам, и даже такое построение не всех привело к верному результату. Остальные при построении использовали свойства модуля, либо раскрывая его по определению, либо применяя, не всегда верно, правило построения с помощью симметрии. Только пятая часть первокурсников справилась с этим заданием без нареканий.

Четвертая задача, на доказательство неравенства $2a + \frac{1}{a^2} > 3$ при условии $0 < a < 1$, была решена всего четырьмя участниками олимпиады. Трое из них прибегли к методу интервалов, один применил производную к исследованию функции. Стоит заметить, что этот студент уже учился ранее на первом курсе в этом же институте и, поступив вновь, на олимпиаде этого года показал лучший результат среди первокурсников.

Пятой на олимпиаде была предложена планиметрическая задача: в равнобедренной трапеции известны длины оснований 21 см, 9 см и высоты 8 см; требуется найти радиус описанной окружности около трапеции. Несмотря на то что это задание не относится к олимпиадным, геометрическая задача традиционно вызывает у первокурсников затруднения. Решило ее лишь 10 человек.

Шестой шла текстовая задача: из пунктов А и В одновременно навстречу друг другу выехали велосипедист и мотоциклист. Через 30 минут велосипедисту оставалось проехать 3 км до середины пути. Мотоциклист

же через 20 минут после начала движения уже отъехал на 2 км от середины пути. Через какое время после начала движения произошла их встреча?

На этот вопрос смогли правильно ответить только девять студентов, часть которых составляла и решала уравнение, другие же проводили последовательные рассуждения.

В следующей задаче были совмещены элементы логики и теории вероятностей: В шкафу лежит 4 белых и 6 черных носков. (а) Какое минимальное количество носков надо достать не глядя, чтобы получить пару носков одного цвета? (б) Какова вероятность, что первый носок, взятый не глядя, будет белым?

За эту задачу брались почти все, и многие ее решили хотя бы наполовину верно. На второй вопрос задачи ответило большинство, поскольку подобное задание входит в ЕГЭ и знакомо учащимся. К сожалению, многим из них не хватает привычки обосновывать решения. Формат большей части задач единого государственного экзамена, когда требуется указать лишь ответ, не способствует формированию таких навыков, как обоснование, письменное оформление рассуждений, которые приводят к правильному ответу.

В восьмой задаче требовалось найти наименьшую возможную сумму 10 различных натуральных чисел, таких, что произведения любых 5 из них – чётно, а сумма всех десяти чисел – нечётна. Задачу с обоснованием решило только 6 человек. Кроме нахождения искомого значения в задаче требовалось доказать его минимальность. Многие пытались обосновывать, но допускали ошибки, считая 0 натуральным числом, что говорит о недостаточности рассмотрения темы натуральных чисел в программе школьного обучения. Многие приводили верный или неверный ответ без каких-либо рассуждений, что подчеркивает отсутствие навыков выполнять доказательства при решении алгебраических задач.

В девятой задаче предлагалось найти решение однородного тригонометрического уравнения первого порядка $\sin 3x + \cos 3x = 0$, и с этим справилось 15 студентов. Многие допустили ошибки при нахождении решения простейшего тригонометрического уравнения, некоторые не обосновали правомочность деления на $\cos 3x$. Стоило изменить в типовом уравнении $\sin x + \cos x = 0$ аргумент x на $3x$, как оно перестало быть узнаваемым. Некоторые пробовали решать, расписывая синус и косинус тройного аргумента. Многие спрашивали, не надо ли выполнять отбор корней на каком-либо промежутке. Вновь сработал стереотип: задача похожа на экзаменационную – значит, решать ее нужно как задачу ЕГЭ.

В следующей задаче требовалось найти все решения уравнения $x^2 + 5y^2 + 4xy + 2y + 1 = 0$. Её решили 12 человек, причем большинство из

них свернули выражение в сумму квадратов, чем немало порадовали проверяющих.

С последней, планиметрической, задачей не справился никто. Ее условие: в прямоугольнике $ABCD$ на сторонах BC и AD отмечены точки E, F, G, H, K, L (рис. 2). При этом $S_{BMA} = 7$, $S_{MENL} = 15$, $S_{GPHQ} = 16$, $S_{CQD} = 6$. Найти площадь четырехугольника $NFPK$.

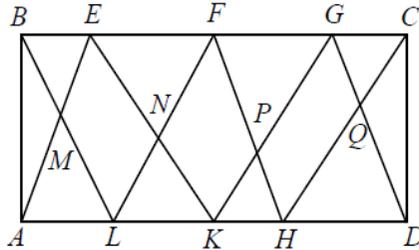


Рис. 2

Данная задача по типу ближе к олимпиадным. Возможно, поэтому ее никто не решал. Геометрическая задача зачастую вызывает у обучающихся некоторый страх, даже если задание типовое, что уж говорить о нестандартной задаче.

Результаты олимпиады показали, что первокурсники – бывшие выпускники школы – умеют в массе своей решать преимущественно только типовые задачи, знакомые им со времен подготовки к ЕГЭ. И не готовы решать задачи менее стандартные или незначительно отклоняющиеся от типовых, не умеют и не понимают необходимость обосновывать рассуждения. Многие научились правильно решать только некоторые виды задач, в частности задачи ЕГЭ.

Было проведено сравнение результатов олимпиады и баллов ЕГЭ по тем дисциплинам, результаты которых принимались при поступлении абитуриентов в ИФМИЭО НГПУ: математике, русскому языку и обществознанию. Линейный коэффициент корреляции между баллами, полученными на олимпиаде, и баллами ЕГЭ по математике оказался равен 0,35, что означает наличие умеренной связи между результатами экзамена и олимпиады. Аналогичное сравнение итогов олимпиады с баллами по обществознанию показало очень слабую положительную корреляцию (коэффициент равен 0,09), а сравнение с баллами по русскому языку – очень слабую отрицательную корреляцию (коэффициент равен $-0,03$). Можно сделать вывод о том, что прием абитуриентов по итогам таких дисциплин, как рус-

ский язык и обществознание, не помогает отбору среди выпускников тех абитуриентов, кто способен решать нестандартные математические задачи. Отбор же по экзаменационным результатам ведущей дисциплины – математики – способствует выявлению таковых.

Многолетний опыт проведения математической олимпиады для первокурсников позволяет преподавателям заметить, что участие в олимпиаде приносит пользу не только студентам-организаторам для формирования их педагогических компетенций, но и участникам олимпиады – для проверки собственных сил при решении нестандартных задач, для побуждения к изучению математики сверх программы, которое они могут реализовать, в частности, на занятиях кружка «Олимпиадные задачи по математике» для студентов 1-го курса ИФМИЭО под руководством студентов старших курсов и преподавателей института.

УДК 51

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail*: vroitenberg@mail.ru

О ЗАДАЧАХ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ (ЯРОСЛАВЛЬ-2019)

В статье приводятся задачи межрегиональной студенческой математической олимпиады 2019 года, проходившей в Ярославле, и их решения.

Ключевые слова: студенческая математическая олимпиада, математическая задача, решения задач.

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, *e-mail*: vroitenberg@mail.ru

ON THE TASKS OF THE INTERREGIONAL STUDENT MATHEMATICAL OLYMPIAD (YAROSLAVL-2019)

The article presents the tasks of the 2019 interregional student mathematical Olympiad held in Yaroslavl and their solutions.

Keywords: student mathematical Olympiad, mathematical task, solution of tasks.

Подробная информация о межрегиональной студенческой математической олимпиаде, проходившей 30.11.2019 в Ярославле, и анализ ее результатов содержится в статье [1], опубликованной в настоящем сборнике. Здесь мы приводим задачи олимпиады и их решения.

Задачи предыдущих Ярославских студенческих математических олимпиад можно найти в книге [2] и заметках [3–6].

1. Задачи для студентов 1-го курса

1. Вычислить определитель 6-го порядка, у которого на главной диагонали стоят числа **3 0 1 1 1 9**, а вне диагонали – число 2.
2. Пусть A – $m \times n$ -матрица ранга 1. Показать, что ее можно представить в виде $A = B^T \cdot C$, где $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ – ненулевые матрицы-строки.

Решение. Так как ранг матрицы равен 1, то по теореме о базисном миноре все ее строки пропорциональны одной (ненулевой) строке. Пусть эта строка состоит из чисел c_1, c_2, \dots, c_n и имеет номер i . Тогда

$$A = \begin{pmatrix} b_1 c_1 & b_1 c_2 & \dots & b_1 c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m c_1 & b_m c_2 & \dots & b_m c_n \end{pmatrix} - i\text{-я строка,}$$

где $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_m$ – некоторые числа. Тем самым, $A = B^T \cdot C$, где $B = (b_1, \dots, b_{i-1}, 1, b_{i+1}, \dots, b_m)$, $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. ►

3. Найти все векторы \vec{x} , такие, что $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{x} + \vec{a}$, где \vec{a} – заданный вектор, а знаком \times обозначено векторное произведение.

Решение 1. Выберем правый ортонормированный базис, в котором $\vec{a} = (a, 0, 0)$. Пусть в этом базисе $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Тогда $\vec{x} \times \vec{a} = (0, ax_3, -ax_2)$, $\vec{x} + \vec{a} = (x_1 + a, x_2, x_3)$ и уравнение $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{x} + \vec{a}$ равносильно системе уравнений $x_1 + a = 0$, $ax_3 = x_2$, $-ax_2 = x_3$, из которой получаем $x_1 = -a$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Таким образом, $\vec{x} = -\vec{a}$. ►

Решение 2. Пусть \vec{x} – искомый вектор. Если векторы \vec{a} и \vec{x} линейно независимы, то $\vec{x} \times \vec{a}$ – ненулевой вектор, ортогональный векторам \vec{a} и \vec{x} , а потому и вектору $\vec{x} + \vec{a}$, и, тем самым, самому себе. Но это невозможно. Если векторы \vec{a} и \vec{x} линейно зависимы, то $\vec{x} + \vec{a} = \vec{x} \times \vec{a} = \vec{0}$, то

есть $\vec{x} = -\vec{a}$. Очевидно, что вектор $\vec{x} = -\vec{a}$ действительно удовлетворяет уравнению $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{x} + \vec{a}$. ►

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и наиболее удаленной от прямой L , заданной уравнениями

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

Решение. Плоскость $x+2y+2z=0$ проходит через начало координат и перпендикулярна прямой L . Найдем точку N пересечения плоскости и прямой. Из уравнений прямой выразим y и z через x : $y=2x$, $z=2x-3$ и подставим в уравнение плоскости: $9x-6=0$. Получаем координаты точки N : $x=2/3$, $y=4/3$, $z=-5/3$. Расстояние от любой плоскости, проходящей через начало координат, до прямой L не превосходит длины отрезка ON . Поэтому плоскость, проходящая через начало координат и находящаяся на расстоянии $|ON|$ от L , будет искомой. Плоскость P : $2x+4y-5z=0$ проходит через начало координат перпендикулярно ON , параллельно прямой L . Поэтому расстояние от P до L равно $|ON|$, то есть P – плоскость, наиболее удаленная от прямой L . ►

5. Для каких $a \in \mathbb{R}$ существует нечетная функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, такая, что при всех $x \in \mathbb{R}$

$$f(x+1) = 2f(x) + x + a ? \quad (1)$$

Решение. Предположим, что равенство (1) верно при всех $x \in \mathbb{R}$. Заменяя в нем x на $-x$ и используя нечетность $f(x)$, получим

$$f(1-x) = -2f(x) - x + a \text{ при всех } x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Обозначим $y=1-x$. Тогда $x=1-y$, и из (2) следует, что при всех $y \in \mathbb{R}$ $f(y) = -2f(1-y) - (1-y) + a$. Заменяя здесь y на x , получаем при всех $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = -2f(1-x) - 1 + x + a. \quad (3)$$

Из (2) и (3) находим $f(x) = -x + (a+1)/3$. Эта функция является нечетной, если $a = -1$. Таким образом, если $f(x)$ удовлетворяет условиям задачи, то $a = -1$ и $f(x) = -x$. Проверкой убеждаемся, что $f(x) = -x$ действительно удовлетворяет равенству (1) при $a = -1$. ►

6. Найти наименьшее значение величины $x^2 + ux + z$ при условиях

$$-\infty < x < \infty, |y| \leq 1, |z| \leq 1.$$

Решение. Обозначим $f(x, y, z) = x^2 + yx + z$. При всех допустимых значениях x , y и z

$$f(x, y, z) = (x + y/2)^2 + z - y^2/4 \geq z - y^2/4 \geq -1 - (1/4) = -5/4.$$

Так как $f(1/2, -1, -1) = -5/4$, то наименьшее значение $f(x, y, z)$ равно $-5/4$. ►

7. Для последовательностей $x_n, n \in \mathbb{N}$, и $y_n, n \in \mathbb{N}$, x_1 и y_1 – произвольные действительные числа, а при всех $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{y_n^2 + 4} - \frac{y_n}{x_n^2 + 4}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n}{y_n^2 + 5} + \frac{3y_n}{x_n^2 + 5}.$$

Убедиться, что последовательности имеют пределы и найти их.

Решение. Имеем при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |x_{n+1}| &\leq \frac{2|x_n|}{y_n^2 + 4} + \frac{|y_n|}{x_n^2 + 4} \leq \frac{2}{4}|x_n| + \frac{1}{4}|y_n|, \\ |y_{n+1}| &\leq \frac{|x_n|}{y_n^2 + 5} + \frac{3|y_n|}{x_n^2 + 5} \leq \frac{1}{5}|x_n| + \frac{3}{5}|y_n|. \end{aligned} \quad (4)$$

Покажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} (|x_1| + |y_1|), \quad |y_n| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} (|x_1| + |y_1|). \quad (5)$$

При $n=1$ это верно. Пусть неравенства (5) верны при некотором $n=k$. Тогда из (4) и (5) при $n=k$ получаем

$$\begin{aligned} |x_{k+1}| &\leq \frac{2}{4}|x_k| + \frac{1}{4}|y_k| \leq \frac{2}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} (|x_1| + |y_1|) + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} (|x_1| + |y_1|) = \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} (|x_1| + |y_1|) \leq \left(\frac{4}{5}\right)^k (|x_1| + |y_1|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |y_{k+1}| &\leq \frac{1}{5}|x_k| + \frac{3}{5}|y_k| \leq \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} (|x_1| + |y_1|) + \frac{3}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} (|x_1| + |y_1|) = \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^k (|x_1| + |y_1|), \end{aligned}$$

то есть неравенства (5) при $n=k+1$. По принципу математической индукции неравенства (5) верны для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = 0$, то из

(5) и неотрицательности $|x_n|$ и $|y_n|$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = 0$.

Но тогда и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. ►

8. Существует ли производная $f'(0)$ для функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos \operatorname{arctg}(1/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases} ?$$

Решение 1. Найдем односторонние пределы

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{1}{x} \cos \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{z \rightarrow \pm \infty} \frac{\cos \operatorname{arctg} z}{1/z} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{z \rightarrow \pm \infty} \frac{(\cos \operatorname{arctg} z)'}{(1/z)'} = \\ &= \lim_{z \rightarrow \pm \infty} \frac{-\frac{1}{1+z^2} \sin \operatorname{arctg} z}{-1/z^2} = \lim_{z \rightarrow \pm \infty} \frac{z^2 \sin \operatorname{arctg} z}{1+z^2} = \lim_{z \rightarrow \pm \infty} \sin \operatorname{arctg} z = \sin(\pm \pi/2) = \pm 1. \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$, то $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

не существует. ►

Решение 2. Так как $\cos^2 t = 1/(1 + \operatorname{tg}^2 t)$, $t = \operatorname{arctg} z \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\cos t > 0$ при $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\operatorname{tg} \operatorname{arctg} z = z$, то

$$\begin{aligned} \cos \operatorname{arctg} \frac{1}{x} &= \sqrt{\frac{1}{1+1/x^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}, \\ \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{1}{x} \cos \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{|x|}{x\sqrt{x^2+1}} = \pm 1. \end{aligned}$$

Как и в решении 1, получаем, что $f'(0)$ не существует. ►

9. Найти диаметр параболического сегмента

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1\}$$

– наибольшее из расстояний между точками сегмента.

Решение. Надо найти $d = \max_{M, N \in S} MN$. Если хотя бы одна точка M или N не лежит на кривой $\Gamma: y = x^2$, $x \in [-1, 1]$, то найдутся точки M' и N' такие, что $M'N' > MN$. Поэтому $d = \max_{M, N \in \Gamma} MN$. Пусть $M(x, x^2) \in \Gamma$,

$N(x_0, x_0^2) \in \Gamma$. Тогда

$$d = \max_{-1 \leq x < x_0 \leq 1} \sqrt{(x_0 - x)^2 + (x_0^2 - x^2)^2}.$$

При увеличении x_0 величина d увеличивается. Поэтому

$$d = \max_{x \in [-1,1]} \sqrt{(1-x)^2 + (1-x^2)^2} = \max_{x \in [-1,1]} f(x), \text{ где } f(x) = \sqrt{x^4 - x^2 - 2x + 2}.$$

Так как

$$f'(x) = (2x^3 - x - 1) / \sqrt{x^4 - x^2 - 2x + 2} = (2x^2 + 2x + 1)(x - 1) / \sqrt{x^4 - x^2 - 2x + 2},$$

то $f'(x) < 0$ при $x \in [-1, 1)$. Поэтому наибольшее значение $f(x)$ на $[-1, 1]$ равно $f(-1) = 2$. Итак, диаметр $d = 2$. ►

10. Сколько действительных корней имеет уравнение

$$x^4 - 6x^2 + 12x + 15 = 0?$$

Решение. Исследуем функцию $f(x) = x^4 - 6x^2 + 12x + 15$. Ее производная $f'(x) = 4x^3 - 12x + 12 = 4(x^3 - 3x + 3)$. Так как $f''(x) = 12(x^2 - 1)$, то $f'(x)$ возрастает на $(-\infty, -1]$ от $-\infty$ до $f'(-1) = 20$, убывает на $[-1, 1]$ от $f'(-1) = 20$ до $f'(1) = 4$ и возрастает на $[1, \infty)$. Поэтому существует такая точка $x_0 \in (-\infty, -1)$, что $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$. В точке x_0 функция имеет наименьшее значение. Так как $f(-1) = -2 < 0$, то тем более $f(x_0) < 0$. Так как $f(\pm 4) > 0$, а $f(x)$ убывает при $x \leq x_0$ и возрастает при $x \geq x_0$, то она имеет ровно два нуля, по одному на промежутках $x < x_0$ и $x > x_0$. ►

2. Задачи для студентов 2-4-го курсов

1. Точка (x_0, y_0) линии, заданной уравнением $u(x, y) = 0$, называется особой, если $\text{grad } u(x_0, y_0) = \vec{0}$. Доказать, что все точки линии, заданной уравнением $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x + y - 1 = 0$, не особые.

Решение. Равенство $\text{grad } u(x, y) = \vec{0}$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} u'_x = 4x^3 + 4xy^2 - 1 = 0, \\ u'_y = 4y^3 + 4x^2y + 1 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Складывая уравнения (6) получаем

$$4(x^3 + y^3) + 4xy(x + y) = 0 \text{ или } (x + y)(x^2 + y^2) = 0.$$

Так как второй множитель обращается в нуль только при $x = y = 0$, то $y = -x$. Подставляя это выражение в первое уравнение системы (6), полу-

чаем $8x^3 - 1 = 0$. Следовательно, $x = 1/2$ и $y = -1/2$. Но эти числа не удовлетворяют уравнению линии. Поэтому все точки линии являются неособыми. ►

2. Ваза имеет форму параболоида вращения $z = x^2 + y^2$. Каким должен быть радиус шара, чтобы он лежал в вазе, касаясь вершины $O(0, 0, 0)$ параболоида?

Решение. Уравнение сферы радиуса R , касающейся параболоида $z = x^2 + y^2$ в точке $O(0, 0, 0)$, а потому и плоскости $z = 0$, и лежащей выше этой плоскости, имеет вид $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$. Ее нижняя полусфера имеет уравнение $z = R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Она должна лежать не ниже параболоида, то есть

$$R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \geq x^2 + y^2, \text{ если } x^2 + y^2 \leq R^2.$$

Обозначив $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$, получаем неравенство $R - \sqrt{R^2 - \rho^2} \geq \rho^2$, $R - \rho^2 \geq \sqrt{R^2 - \rho^2}$. При $\rho = 0$ это неравенство очевидно, а при $\rho \neq 0$ оно равносильно неравенствам $0 < \rho \leq \sqrt{R}$, $0 < \rho \leq R$, $(R - \rho^2)^2 \geq R^2 - \rho^2$ или $0 < \rho \leq \sqrt{R}$, $0 \leq \rho \leq R$, $\rho^2 \geq 2R - 1$. Последнее неравенство выполняется при всех ρ , удовлетворяющих первым двум неравенствам, если $0 < R \leq 1/2$. ►

3. Доказать, что все корни уравнения $z^3 + (3 + 4i)z + 1 = 0$ находятся внутри круга радиуса 3 с центром в точке $z_0 = 0$.

Решение. Пусть z – корень. Тогда

$$z^3 = -(3 + 4i)z - 1, \quad |z|^3 = |(3 + 4i)z + 1| \leq |3 + 4i| \cdot |z| + 1 = 5|z| + 1.$$

Таким образом, для $\rho = |z|$ получаем неравенство $f(\rho) = \rho^3 - 5\rho - 1 \leq 0$. Так как $f(3) = 11 > 0$, а при $\rho \geq 3$ $f'(\rho) = 3\rho^2 - 5 > 0$, то $f(\rho) > 0$ при $\rho \geq 3$. Поэтому все неотрицательные решения неравенства $f(\rho) \leq 0$ удовлетворяют условию $\rho < 3$. Тогда и для корня z уравнения $\rho = |z| < 3$. ►

4. Какое из чисел больше, $I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \, dx}{4 - x}$ или $I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{2 + x}$?

Решение. Сделаем во втором интеграле замену $x \mapsto \pi/2 - x$. Тогда

$$I_2 = - \int_{\pi/2}^0 \frac{\cos(\pi/2 - x) dx}{2 + \pi/2 - x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{2 + \pi/2 - x}.$$

Так как $4 - x > 2 + \pi/2 - x > 0$ при $x \in [0, \pi/2]$, то $\frac{\sin x}{4 - x} < \frac{\sin x}{2 + \pi/2 - x}$ при $x \in [0, \pi/2]$. Так как обе подынтегральные функции непрерывны, то $I_1 < I_2$. ►

5. Вычислить $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x dx}{1 + \sqrt{\cos x + \sin x}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x dx}{1 + \sqrt{\cos x + \sin x}} &= \int_0^{\pi/4} \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x) dx}{1 + \sqrt{\cos x + \sin x}} = \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) dx}{1 + \sqrt{\cos x + \sin x}} = \int_0^{\pi/4} \frac{(\cos x + \sin x) d(\cos x + \sin x)}{1 + \sqrt{\cos x + \sin x}} = \end{aligned}$$

функция $z = \cos x + \sin x$ возрастает на $[0, \frac{\pi}{4}]$ от $z(0) = 1$ до $z(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{z dz}{1 + \sqrt{z}} = \|\sqrt{z} = t, z = t^2\| = \int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{2t^3 dt}{t+1} = 2 \int_1^{\sqrt[4]{2}} (t^2 - t + 1) dt - 2 \int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{dt}{t+1} = \\ &= 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_1^{\sqrt[4]{2}} - 2 \ln(t+1) \Big|_1^{\sqrt[4]{2}} = \frac{2\sqrt[4]{8}}{3} - \sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2} - \frac{5}{3} - 2 \ln(\sqrt[4]{2} + 1) + 2 \ln 2. \end{aligned}$$

►

6. Последовательность a_n , $n \in \mathbb{N}$, задана равенством

$$a_n = \int_0^{\pi} \sqrt{x+n} \cos nx dx.$$

Доказать, что она сходится и найти ее предел.

Решение.

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\pi} \sqrt{x+n} \cos nx dx = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sqrt{x+n} d(\sin nx) = \|\text{интегрируем по частям}\| = \\ &= \frac{1}{n} \sqrt{x+n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{2\sqrt{x+n}} dx = -\frac{1}{2n} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sqrt{x+n}} dx. \end{aligned}$$

Поэтому

$$0 \leq |a_n| \leq \frac{1}{2n} \int_0^{\pi} \frac{|\sin nx|}{\sqrt{x+n}} dx \leq \frac{1}{2n} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{n}} dx = \frac{\pi}{2n\sqrt{n}}.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n\sqrt{n}} = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, а потому и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. ►

7. Могут ли функции $y_n(x) = \sin^2(x + \pi n / 6)$, $n \in \mathbb{N}$, быть решениями какого-нибудь одного линейного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, где $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции на \mathbb{R} ?

Решение. Общее решение НЛДУ 2-го порядка $y'' + 4y = 2$ имеет вид

$$y = \frac{1}{2} + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x. \text{ Функции}$$

$$y_n(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x + \frac{\pi n}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi n}{3} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi n}{3} \sin 2x, \quad n = 1, 2, \dots$$

получаются из общего решения при $C_1 = -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi n}{3}$, $C_2 = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi n}{3}$. ►

8. Пусть $y(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, – решение линейного ДУ $y'' + xy = x + 3$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$. Показать, что $y(x)$ имеет хотя бы один минимум.

Решение. Так как по условию функция $y(x)$ является решением линейного ДУ второго порядка, то она определена на всей числовой прямой, дважды дифференцируема и, тем более, непрерывна. Так как $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, то в точке 0 функция убывает и потому для некоторого $x_1 > 0$ $y(x) < 0$ при $0 < x \leq x_1$. Докажем, что существует точка $x_2 > 0$, в которой $y(x_2) > 0$. Предположим противное: $\forall x > 0 \ y(x) \leq 0$. Тогда $\forall x > 0$ $y''(x) = -xy(x) + x + 3 \geq 3$. По формуле Тейлора

$$\forall x > 0 \ y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(\xi)}{2}x^2 = -x + \frac{y''(\xi)}{2}x^2, \text{ где } \xi > 0.$$

Следовательно, $y(x) \geq -x + \frac{3}{2}x^2 > 0$ при $x \geq 1$. Получили противоречие.

Поэтому существует точка $x_2 > 0$, в которой $y(x_2) > 0$. Поскольку

$y(x) < 0$ при $0 < x \leq x_1$, то $x_1 < x_2$ и между x_1 и x_2 есть точка c , в которой $y(c) = 0$. По теореме Вейерштрасса существует точка $m \in [0, c]$ в которой $y(m) \leq y(x) \forall x \in [0, c]$. Так как $x_1 \in (0, c)$ и $y(x_1) < 0$, а $y(0) = y(c) = 0$, то $m \in (0, c)$. Следовательно, m – точка локального минимума функции $y(x)$. ►

9. Пусть $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s > 1$. Выразить через $\zeta(s)$ сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^s}$.

Решение. Так как

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} + \frac{1}{2^s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} + \frac{1}{2^s} \zeta(s), \end{aligned}$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^s} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s). \quad \blacktriangleright$$

10. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n = \int_{1/(n+1)}^{1/n} \ln(x^2 + n^2) dx$?

Решение. При $n \geq 1$ имеем $0 < x \leq 1$, $0 < \ln(x^2 + n^2) \leq \ln(1 + n^2)$,

$$\begin{aligned} u_n &= \int_{1/(n+1)}^{1/n} \ln(x^2 + n^2) dx \leq \int_{1/(n+1)}^{1/n} \ln(1 + n^2) dx = \\ &= \ln(1 + n^2) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{\ln(1 + n^2)}{n(n+1)} \leq \frac{\ln(1 + n^2)}{n^2}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + n^2)}{n^{1/2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{(1/2)n^{-1/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^{3/2}}{1 + n^2} = \left\| 1 + n^2 \sim n^2 \right\| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^{3/2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^{1/2}} = 0, \end{aligned}$$

то по определению предела найдется такое натуральное число N , что при всех $n \geq N$ $\frac{\ln(1 + n^2)}{n^{1/2}} < 1$, и потому $\ln(1 + n^2) \leq n^{1/2}$. Но тогда

$$\forall n \geq N \quad 0 < u_n \leq \frac{\ln(1+n^2)}{n^2} \leq \frac{n^{1/2}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то по признаку сравнения сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \blacktriangleright$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Оленикова Ю.К.* Анализ итогов межрегиональной студенческой олимпиады по математике // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 15. Ярославль, 2020. С. 110-117.
2. *Ройтенберг В.Ш.* Задачи студенческих математических олимпиад ЯГТУ: учебное пособие. / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова, Л.А. Сидорова. 2-е изд., испр. и доп. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2015. 151 с.
3. *Ройтенберг В.Ш.* О задачах Ярославской межрегиональной студенческой математической олимпиады 2015 года / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова // Актуальные вопросы преподавания математики в образовательной организации высшего образования: Материалы всерос. очно-заочной науч.-метод. конф. с междунар. участием. Кострома: Изд-во ВА ВРХБЗ и ИВ, 2016. С. 21-28.
4. *Ройтенберг В.Ш.* О задачах всероссийской студенческой олимпиады 2016 года в Ярославле / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова // Актуальные вопросы преподавания математики в образовательной организации высшего образования. Материалы всероссийской очно-заочной научно-методической конференции с международным участием. Кострома: Изд-во ВА ВРХБЗ и ИВ, 2017. С. 24–31.
5. *Ройтенберг В.Ш.* Всероссийская и VIII международная студенческие олимпиады по математике в Ярославле / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова // Математика и ее приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 6. СПб.: Изд-во ГУ МРФ, 2018. С. 104–111.
6. *Оленикова Ю.К.* О ярославских студенческих математических олимпиадах 2018 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 14. Ярославль, 2019. С. 99–109.

УДК 336.767

Н. А. Шишкина

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: shishkinana@ystu.ru

О ПРИМЕНЕНИИ МАТЕМАТИКИ В ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Современная финансовая теория выделяет в качестве основополагающих вопросов исследования стоимость денег во времени, определение реальной стоимости активов и управление риском. В статье рассматривается применение математических моделей в вариативных расчетах доходности, стоимости и рискованности финансовых активов.

Ключевые слова: финансовая теория, стоимость денег, финансовые активы, математические модели.

N. A. Shishkina

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: shishkinana@ystu.ru

ON THE APPLICATION OF MATHEMATICS IN FINANCIAL COMPUTING

Modern financial theory identifies the value of money over time, the determination of the real value of assets and risk management as fundamental research issues. The article considers the application of mathematical models in variable calculations of profitability, cost and riskiness of financial assets.

Keywords: financial theory, value of money, financial assets, mathematical models.

Начиная с середины прошлого столетия, классическая наука о финансах в своем развитии вступила в новую стадию – неоклассическую теорию финансов [1]. Предпосылками новой стадии развития финансовой науки послужили процессы, стремительно развивающиеся в мировой экономике после окончания второй мировой войны: усиление роли крупных частных корпораций в экономической мощи государства при одновременном уменьшения вмешательства государства в деятельность частного сектора; увеличение доли прибыли и рынков капитала в долгосрочном финансировании экономики; интернационализация рынков капитала, товаров, труда. В современном мире эти процессы проявляются в таких формах, как глобализация финансовой системы, создание Евросоюза и единой евро-

пейской валюты; рост крупных транснациональных корпораций. В отечественную экономику система знаний неоклассической теории финансов стала внедряться гораздо позднее – с переходом нашей страны к рыночным отношениям.

По мнению ведущих ученых в области финансов, основными аналитическими «столпами», на которые опирается современная финансовая теория, являются: 1. Стоимость денег во времени; 2. Определение стоимости активов; 3. Управление риском [2].

Изучение студентами этих основополагающих вопросов теории финансов невозможно без фундаментальных знаний математики.

Концепция стоимости денег во времени была впервые провозглашена в 1202 году гениальным математиком Леонардо Фибоначчи (Пизанским) [3]. Через семь столетий идея Фибоначчи была выражена в математическом методе дисконтированных денежных потоков: приведенная стоимость денег

$$DCF = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{CF_n}{(1+r)^n},$$

где CF_n – денежный поток в n -м периоде; r - коэффициент дисконтирования.

Концепция изменения стоимости денег оказывает влияние на принятие решений во всех случаях участия в финансовых и инвестиционных проектах, где доходы и расходы разнесены во времени. Проиллюстрировать этот тезис можно и на бытовом уровне.

П р и м е р. Бабушка сообщила внуку, что имеет 100000 рублей и вручит ему через два года при поступлении в университет. Образованный брат подсчитал, что через два года ценность этой суммы уменьшится как минимум на 13%. Если ставку дисконтирования принять равной ключевой ставке ЦБ РФ 7% [4], приведенная стоимость денег составит:

$$100000 / (1 + 0,07)^2 = 87344 \text{ рубля.}$$

Как видно из примера, приведенная стоимость во многом зависит от выбора ставки дисконтирования. В случаях, когда имеются другие варианты вложения средств, то в качестве ставки дисконтирования можно принять доходность альтернативных вариантов вложения.

Второй по значимости вопрос: «определение будущей стоимости финансового актива», считается «философским камнем» теории финансов и не имеет однозначного решения. Тем не менее существует множество методов оценки стоимости финансовых активов, применяющих как абсолютные, так и относительные математические показатели. Одной из характеристик финансового актива, прямо влияющей на его будущую стои-

мость, является показатель доходности. Владелец финансового актива претендует на два вида дохода: текущий и капитализированный. Математическое выражение доходности выражается формулой

$$k = \frac{D_1 + (P_1 - P_0)}{P_0} = \frac{D_1}{P_0} + \frac{P_1 - P_0}{P_0},$$

где k – доходность финансового актива; P_1 – будущая стоимость актива; P_0 – базовая стоимость актива; D_1 – ожидаемый к выплате дивиденд.

Пример. Курсовая стоимость обыкновенных акций ПАО «Сбербанк» на 05.01.2018 составляла 238,50 рублей за акцию, на 08.01.2019 – 198,36 рублей; на 22.10.2019 – 236,52 рубля [5]. Следовательно, стоимость акций ПАО «Сбербанк» за 2018 год снизилась на 16,8%: $(238,5 - 198,36) / 238,5$. Если предположить, что стоимость акций до конца 2019 года останется на уровне значения октября, то капитализация за 2019 составит

$$(236,52 - 198,36/198,36) \cdot 100 = 19,2\%.$$

Дивиденд на акцию на 2019 год прогнозируется в размере 16 рублей [6], следовательно, текущая доходность акций в 2019 год составит

$$16/198,36 \cdot 100 = 8,1\%.$$

Наиболее распространенным методом определения стоимости финансовых активов считается модель Уильяма Шарпа: модель оценки доходности финансовых активов (CAPM – capital asset pricing model):

$$k_s = k_{RF} + \beta(k_m + k_{RF}),$$

где k_s – ожидаемая доходность данной ценной бумаги; k_m – средняя рыночная доходность; k_{RF} – доходность безрисковых ценных бумаг; β – коэффициент, показывающий степень чувствительности данной ценной бумаги к изменению доходности рыночного портфеля.

Реальная доходность финансового актива находится в более или менее широком диапазоне прогнозных вариантов доходности. Измерение изменчивости (volatility) ставок доходности и вероятность их получения производится в рамках одного из этапов процесса управления риском – третьего «столпа» теории финансов [2]. Для измерения рискованности активов применяется формула

$$Er = \sum_{i=1}^n k_i \cdot p_i,$$

где Er – среднее значение доходности; k_i – возможные ставки доходности; p_i – вероятность их получения.

Распределение вероятностей получения возможных показателей доходности в теории финансов измеряется статистическим показателем стандартного отклонения:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i (r_i - Er)^2} .$$

Пример. По оценке рейтингового агентства, прогнозные значения доходности и вероятность получения доходности, приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения доходности акций X, Y и вероятности их получения

Доходность акции X	Вероятность	Доходность акции Y	Вероятность
- 2%	0,4	5%	0,6
5%	0,5	10%	0,3
10%	0,1	15%	0,1
Среднее значение доходности 1,7%		Среднее значение доходности 7,5%	

Тогда

$$\sigma_x = \sqrt{(-2 - 1,7)^2 \cdot 0,4 + (5 - 1,7)^2 \cdot 0,5 + (10 - 1,7)^2 \cdot 0,1} = 4,22.$$

$$\sigma_y = \sqrt{(5 - 7,5)^2 \cdot 0,6 + (10 - 7,5)^2 \cdot 0,5 + (15 - 7,5)^2 \cdot 0,1} = 2,97.$$

Из примера следует, что средняя доходность акции X - 1,7%, размах вариации - 12%, стандартное отклонение 4,22. Средняя доходность акции Y - 7,5%, размах вариации - 10%, стандартное отклонение 2,97. На основании приведенного расчета можно сделать вывод о том, что акции X более рискованные, чем акции Y.

Рассмотренные показатели не отражают абсолютное значение рискованности активов, но позволяют сравнить характеристики альтернативных вариантов вложений в финансовые активы.

Вопросы финансирования, планирования инвестиций и снижения рисков являются важнейшими в процессе управления предприятием [7]. Сравнение вариантов при принятии управленческих решений основывается на информации, необходимой для оценки альтернативных вариантов. Критерием при выборе финансовых решений в большинстве случаев принимается максимизация стоимостной оценки активов. Рассматривая предприятие как актив на рынке капиталов, выбирается вариант управленческого решения, в результате реализации которого стоимость предприятия увеличится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Финансы: учебник / под ред. В. В. Ковалева. 2-е изд., перераб. и доп. М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2007. 610 с.
2. *Боди Зви.* Финансы: пер. с англ. / З. Боди, Р. Мертон. М.: Издат. дом «Вильямс», 2004. 592 с.
3. *Шишкина Н.А.* История взаимодействия экономики и математики /Н.А. Шишкина, Ю.К. Оленикова // Математика и естественные науки. Теория практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 10. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2015. С. 226–230.
4. Информационное сообщение Банка России от 06.09.2019 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://consultant.ru/>.
5. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://consultant.ru> https://ru.investing.com/equities/sberbank_rts-chart
6. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://consultant.ru/>, <https://investmint.ru/sber/>
7. *Киселев А.А.* Принятие управленческих решений: учебник для магистратуры. Москва-Берлин: Изд-во: Директ-Медиа, 2019. 182 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 316.4:004.942

В. Ф. Беккер, В. В. Чеснов, Д. Д. Банщикова

Березниковский филиал Пермского национального
исследовательского политехнического университета
Россия, г. Березники, e-mail: tazaqsp@mail.ru, cloe454@mail.ru

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА УЧЕНЫХ В РОССИИ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В статье описано моделирование зависимостей, описывающих влияние на количество учёных в России таких факторов, как расходы на науку из федерального бюджета в миллионах долларов, средняя цена типового жилья за квадратный метр в долларах, население России, количество учреждений здравоохранения, количество вузов, количество выпускников вузов в тысячах, прожиточный минимум в долларах, курс доллара. Данные по факторам представлены диапазоном значений. По нормированным данным построены модели изменения количества учёных: линейная многофакторная модель, модель в пространстве состояний, авторегрессионные модели первого, второго и третьего порядка, тренд. Для линейной многофакторной модели проведено исследование факторов на корреляцию. На основе аппроксимации факторов и построения произведен выбор модели. Показано, что модель в пространстве состояний лучше описывает объект. Сделан прогноз изменения количества учёных при сохранении тенденций. Показано, что, если ничего не предпринимать, количество учёных будет снижаться. Исследована возможность лица, принимающего решения, повлиять на негативное воздействие управляемых факторов на систему.

Ключевые слова: количество, учёные, Россия, математическая модель статистика.

V. F. Bekker, V. V. Chesnov, D. D. Banshchikova

Berezniki branch of Perm National Research Polytechnic University
Russia, Berezniki, e-mail: tazaqsp@mail.ru, cloe454@mail.ru

FORECASTING CHANGES IN THE NUMBER OF SCIENTISTS IN RUSSIA BASED ON MATHEMATICAL MODELS

The article describes the modeling of dependencies that describe the impact on the number of scientists in Russia of factors such as: the cost of science from the federal budget in millions of dollars, the average price of typical housing per square meter in dollars, the population of Russia, the number of healthcare institutions, the number of universities, the

number of university graduates in thousands, the cost of living in dollars, the dollar exchange rate. Factor data are presented in a range of values. Based on the normalized data, models for changing the number of scientists were constructed: a linear multifactor model, a model in the state space, autoregressive models of the first, second and third order, trend. For a linear multifactor model, a study of correlation factors was carried out. Based on the approximation of factors and post-forecast, a model is selected. It is shown that the model in the state space describes the object better. A forecast is made for the change in the number of scientists while maintaining tendencies. It is shown that if nothing is done, the number of scientists will decrease. The possibility of a decision maker to influence the negative impact of uncontrollable factors on the system has been investigated.

Keywords: *number, scientists, Russia, mathematical model, statistics.*

Развитие науки для России – вопрос выживания страны. Это фраза президента, сказанная на встрече с президентским советом по науке и образованию [1], на которой глава государства выделил проблему финансирования науки, а также указал на важность привлечения молодёжи в науку.

Главной движущей силой науки являются учёные. Согласно последним данным Росстата, численность персонала, занятого научными исследованиями и разработкой составляет 707887 человек [2]. Актуальной проблемой развития науки является снижение количества учёных в России.

Целью работы является решение проблемы путём прогнозирования количества учёных в России на ближайшие 3 года при изменении различных факторов и их влияния.

Для достижения цели были поставлены задачи:

- 1) поиск (Росстат) и нормирование данных;
- 2) построение линейной многофакторной модели, получение и объяснение коэффициентов, оценка аппроксимации;
- 3) построение модели в пространстве состояний, получение коэффициентов, оценка аппроксимации;
- 4) построение бесфакторных моделей;
- 5) проверка моделей постпрогнозом (1-3 года) и окончательный выбор модели;
- 6) прогнозирование выбранной моделью.

Для исследования проблемы применён метод создания моделей, описывающий зависимость количества учёных (реакции) от управляемых и неуправляемых факторов.

Поиск данных

Рассматривается влияние таких факторов, как расходы на науку, средняя стоимость жилья, численность населения России, количество учреждений здравоохранения, количество вузов и их выпускников, прожиточный минимум, а также, в качестве дополнительного, был взят фактор - курс доллара США. Данные факторы согласованы со здравым смыслом, например, количество выпускников вузов напрямую влияют на количество

учёных, по имеющимся данным, с 2010 года происходит снижение количества выпускников и в это же время снижается количество учёных из-за недостаточного притока молодёжи.

Для создания моделей использовались данные Росстата за 18 лет, диапазон значений реакции и факторов представлен в табл. 1.

Таблица 1. Диапазон значений реакции и факторов

Название	Данные	Минимум	Максимум
Y	Научный персонал, чел.	707887	887729
X_1	Расходы на науку, млн дол.	618.473	13329.709
X_2	Ср. цена на типовое жильё за м ² , дол.	273.393	1975.476
X_3	Население, чел.	142.7	146.8
X_4	Кол-во больниц, тыс.	5.3	10.7
X_5	Кол-во вузов	766	1134
X_6	Кол-во выпускников вузов, тыс.	635	1468
X_7	Прожиточный минимум, дол.	43.018	228.983
X_8	Курс доллара США	28	67

Для использования данных в моделях было устранено влияние размерности путём нормирования данных.

Линейная многофакторная модель

Для построения линейной многофакторной модели проведен корреляционный анализ, который проводился для пар факторов по формуле [3]:

$$r_{XY} = \frac{\sum((X_i - X_{mid}) \cdot (Y_i - Y_{mid}))}{\sqrt{(\sum(X_i - X_{mid})^2) \cdot (\sum(Y_i - Y_{mid})^2)}}$$

где X_{mid} и Y_{mid} – среднее значение факторов и реакции.

В результате анализа были исключены факторы, имеющие взаимную корреляцию, близкую к единице по модулю, а именно X_4 (коррелирует с X_7 с коэффициентом -0.904) и X_7 (коррелирует с X_1 с коэффициентом 0.964).

По оставшимся данным построена модель и получены коэффициенты, найденные минимизацией суммы квадратичных ошибок, по формуле [4]:

$$Y(X) = A_0 + \sum_i A_i \cdot X_i,$$

где A_i - коэффициенты при соответствующих факторах; A_0 - значение реакции при нулевых значениях факторов. В результате были получены коэффициенты, представленные в табл. 2.

Таблица 2. Коэффициенты линейной многофакторной модели

A_0	A_1	A_2	A_3	A_5	A_6	A_8
0.684	-0.152	-0.466	0.135	0.366	-0.362	0.018

Квадратичная погрешность, найденная по формуле [4]:

$$S = \sum_i (Y_i - Y(X))^2,$$

составила: $S = 0.06$.

Исходя из полученных коэффициентов можно отметить, что особое влияние на уменьшение количества учёных оказывают факторы X_2 (стоимость жилья) и X_6 (количество выпускников вузов). В это же время противоречивые коэффициенты A_1 и A_6 указывают на рост количества учёных при снижении значений факторов X_1 (расходы на науку) и X_6 (количество выпускников вузов). Исходя из этого, скорее всего, данную модель использовать нельзя.

Модель в пространстве состояний

Для построения модели в пространстве состояний использовались все факторы с нормированными данными, при построении были найдены коэффициенты для состояния факторов и состояния системы при минимальной сумме невязок.

Состояние факторов находилось по формуле

$$X'(n+1) = C + D \times X(n),$$

где X' – вектор состояния; C – вектор функции перехода; D – матрица управления; n – номер года по порядку.

Состояние системы находилось по формуле [5]:

$$Y(n) = A + B \times X'(n),$$

где $Y(n)$ – вектор выхода, A – матрица выхода, B – матрица прямой связи.

На рис. 2 представлены графики исходной и моделируемой функции. По построенному графику видно, что модель имеет хорошую аппроксимацию ($S = 0.015$). Предварительно, модель в пространстве состояний взята в качестве рабочей.

Бесфакторные модели

Помимо факторных построены бесфакторные модели – авторегрессионные модели первого ($S = 0.11$), второго ($S = 0.06$) и третьего порядка ($S = 0.05$) и тренд ($S = 0.19$) [6]. Данные модели при попытке их использо-

вания дали худшую аппроксимацию, например, по сравнению с моделью в пространстве состояний ($S = 0.015$), отсюда можно сделать вывод, что объект зависит не от самого себя, а от факторов, поэтому дальнейший выбор будет между факторными моделями.

Проверка факторных моделей постпрогнозом

Для выбора наиболее подходящей модели для дальнейшего прогноза проведена проверка методом постпрогноза, при котором известные данные по реакции принимают в качестве неизвестных, прогнозируют их с помощью построенных, на сокращённом интервале времени, моделей, а затем сравнивают найденные данные с исходными.

Несмотря на то что ранее было сделано предположение о том, что линейную многофакторную модель использовать нельзя, для верности был применён метод постпрогноза и для данной модели.

На рис. 1 представлены графики исходной (ИСХ), линейной многофакторной модели (ЛММ) и постпрогнозов на 1, 2 и 3 года (указаны в скобках).

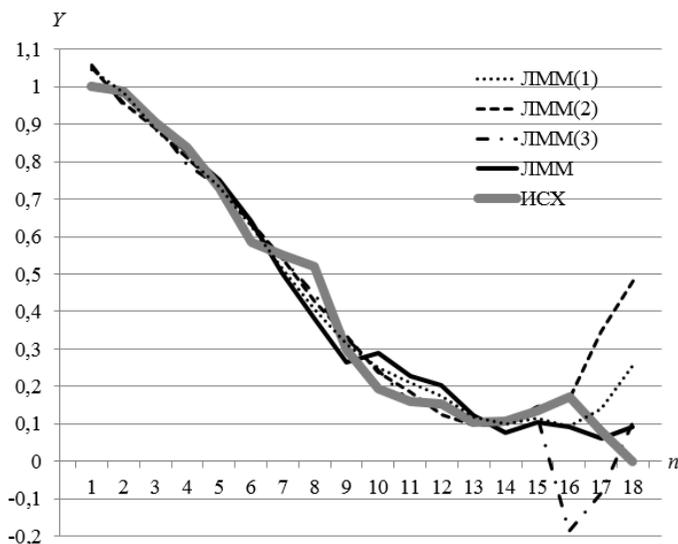


Рис. 1. Модель ЛММ: графики функций, постпрогнозы

На рис. 2 представлены графики исходной (ИСХ), модели в пространстве состояний (МПрС) и с постпрогнозами на 1, 2 и 3 года (указаны в скобках).

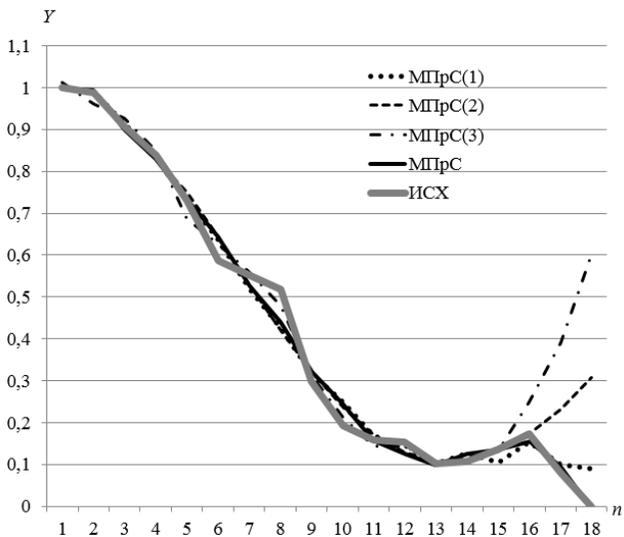


Рис. 2. Модель МПрС: графики функций, постпрогноз

Для линейной многофакторной модели и модели в пространстве состояний была рассчитана погрешность постпрогнозов на 1, 2 и 3 года, представленная в табл. 3.

Таблица 3. Погрешность постпрогнозов

Модель	1 год	2 года	3 года
ЛММ	0.255	0.481	0.105
МПрС	0.089	0.308	0.601

На основании построенных графиков и рассчитанной погрешности, принято решение прогнозировать количество учёных с помощью модели в пространстве состояний, так как она имеет наилучшую аппроксимацию, повторяет поведение исходной функции и не имеет резких изменений, несмотря на несущественно большую погрешность постпрогноза на 3 года, чем у линейной многофакторной модели.

Прогноз

По ранее полученным данным о состоянии системы было спрогнозировано количество учёных до 2020 года, визуализация представлена на рис. 3.

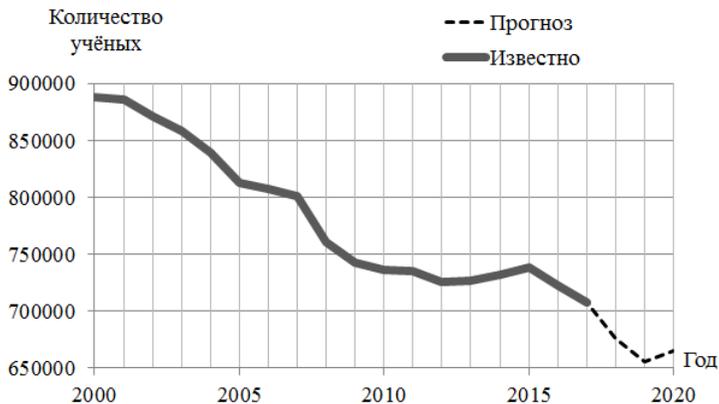


Рис. 3. Прогноз количества учёных

Исходя из графика можно сделать вывод, что количество учёных будет снижаться и к 2020 году будет приближаться к отметке 655-665 тысяч человек.

Исследуем прогнозы развития системы в зависимости от изменения неуправляемых факторов. На их основе исследуем возможность лица, принимающего решения, компенсировать негативное влияние неуправляемых факторов по методике, изложенной в [15].

Прогнозирование производилось с помощью изменения неуправляемых факторов X_3 и X_6 на основе модели в пространстве состояний, в результате изменения на $\pm 5-10\%$ тенденции развития факторов на 3 года, были получены прогнозы развития системы, представленные в табл. 4.

Таблица 4. Прогноз, неуправляемые факторы

$X_3 \setminus X_6$	-10%	-5%	0%	+5%	+10%
-10%	-0.171	-0.202	-0.237	-0.277	-0.321
-5%	-0.165	-0.199	-0.237	-0.281	-0.330
0%	-0.157	-0.193	-0.236	-0.284	-0.339
+5%	-0.146	-0.187	-0.233	-0.286	-0.346
+10%	-0.134	-0.178	-0.229	-0.287	-0.353

По полученным данным можно сделать вывод, что если ничего не изменять, то будет наблюдаться снижение числа учёных до 665 тысяч человек. А также при увеличении численности населения и количества вы-

пускников вузов, значение критерия -0.353 при факторах $X_3+10\%$ и $X_6+10\%$, и происходит снижение числа учёных до 644 тысяч человек, что выглядит парадоксально. Данную ситуацию можно объяснить тем, что, по данным Росстата, рост населения обусловлен притоком мигрантов из стран бывшего СССР, с 2011 года наблюдается постоянный прирост мигрантов в пределах 211-320 тыс. чел. в год [5-13]. Также на рост числа населения повлияло присоединение в 2014 году к территориям Российской Федерации Республики Крым и города Севастополь, население которых суммарно составляет 2.3 млн чел [16].

Для исследования возможности лица, принимающего решения, компенсировать негативное влияния неуправляемых факторов на систему, аналогичным образом был произведён прогноз по управляемым факторам X_1 (расходы на науку) и X_5 (количество вузов). В результате изменения на $\pm 5-10\%$ тенденции развития факторов на 3 года были получены прогнозы развития системы, представленные в табл. 5.

Таблица 5. Прогноз, управляемые факторы

$X_1 \backslash X_5$	-10%	-5%	0%	+5%	+10%
-10%	-0.238	-0.339	-0.450	-0.573	-0.708
-5%	-0.204	-0.298	-0.402	-0.517	-0.644
0%	-0.169	-0.256	-0.353	-0.460	-0.577
+5%	-0.133	-0.213	-0.302	-0.401	-0.510
+10%	-0.095	-0.169	-0.250	-0.340	-0.440

Наилучшим результатом изменения управляемых факторов является значение критерия -0.095 при $X_1+10\%$ и $X_5-10\%$, а количество учёных приблизится к 691 тысяче человек. Значения этих факторов говорят, что увеличение расходов на науку (X_1) и снижение количества вузов (X_5), могут положительно повлиять на количество учёных в России. Данный результат объясняется курсом государства на увеличение эффективности вузов и снижение стоимости их содержания [14].

Исходя из графика (рис. 3) можно сделать вывод, что без изменений количество учёных будет снижаться и к 2020 году будет приближаться к отметке 655-665 тысяч человек, а в наихудшем случае до 644 тысяч. Для того чтобы увеличить количество учёных до 691 тысячи человек, лицу, принимающему решения, рекомендуется, прежде всего, снижать количество вузов для повышения эффективности, а также увеличивать расходы на науку.

Таким образом, в результате выполнения всех задач была достигнута цель - прогнозирование количества учёных на 3 года, а также даны рекомендации, которые позволят увеличить количество учёных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимир Путин обсудил научный прогресс с президентским советом по науке и образованию [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.1tv.ru/news/2018-11-27/356372-_vladimir_putin_obsudil_nauchnyy_progress_s_prezidentskim_sovetom_po_nauke_i_obrazovaniyu
2. Движение персонала [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.gks.ru/free_doc/new_site/business/nauka/t_2.xls
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш. шк., 2004. 404 с.
4. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика, 1981. 302 с.
5. Затонский А.В. Теоретический подход к управлению социально-техническими системами // Программные продукты и системы. 2008. № 1. С. 29–32.
6. Янченко Т.В. Определение оптимальной ранжировки частных критериев оценки краевого социального ресурса / Т.В. Янченко, А.В. Затонский // Экономика и менеджмент систем управления. 2013. Т. 10, № 4. С. 99–104.
7. Международная миграция РФ за 2011 год [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.gks.ru/bgd/regl/b12_107/IssWWW.exe/Stg/tab2-06-11.xls
8. Международная миграция РФ за 2012 год [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.gks.ru/bgd/regl/b13_107/IssWWW.exe/Stg/tab2-06-12.xls
9. Международная миграция РФ за 2013 год [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.gks.ru/bgd/regl/b14_107/IssWWW.exe/Stg/tab2-06-13.xls
10. Международная миграция РФ за 2014 год [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.gks.ru/bgd/regl/b15_107/IssWWW.exe/Stg/tab2-06-14.xls
11. Международная миграция РФ за 2015 год [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.gks.ru/bgd/regl/b16_107/IssWWW.exe/Stg/tab2-06-15.xls
12. Международная миграция РФ за 2016 год [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.gks.ru/bgd/regl/b17_107/IssWWW.exe/Stg/tab2-06-16.xls
13. Международная миграция РФ за 2017 год [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.gks.ru/bgd/regl/b18_107/IssWWW.exe/Stg/tab2-06-17.xls
14. Численность населения [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.gks.ru/free_doc/doc_2018/bul_dr/mun_obr2018.rar
15. Затонский А.В. Преимущества дифференциальной модели сложной экономической системы / А.В. Затонский, Н.А. Сиротина // Образование. Наука. Научные кадры. 2012. № 8. С. 98–102.
16. Бузанакова А. Р. Курс на сокращение числа вузов в современной России: шаг к справедливости или к эффективности? [Электронный ресурс]/ А. Р.Бузанакова, С. Н. Паклина // Молодой ученый. 2014. №7. С. 310–313. – Режим доступа: <https://moluch.ru/archive/66/10914/>

УДК 51-74

А. В. Гусаров

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: *alvgus@mail.ru*

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКА ОТРАЖЕННЫХ
ЭЛЕКТРОНОВ В ДВУХКООРДИНАТНОМ ДАТЧИКЕ
ПОЛОЖЕНИЯ ЛУЧА**

В статье рассматривается математическая модель, описывающая процесс распределения потока электронов, отраженных от поверхности расплавленного материала и попадающих на коллекторы электронов, расположенные в чувствительном элементе датчика положения электронного луча. В модели учтено влияние неупругого отражения электронов, возникающее в электронных пучках высокой плотности.

Ключевые слова: математическая модель, поток отраженных электронов, двухкоординатный датчик, диаграмма направленности.

A. V. Gusarov

P. A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: *alvgus@mail.ru*

**MATHEMATICAL MODEL
OF THE REFLECTED ELECTRONS FLUX DISTRIBUTION
IN A TWO-COORDINATE BEAM POSITION SENSOR**

The article deals with a mathematical model describing the process of electrons flow distribution reflected from the surface of the molten material and falling on the collectors of electrons located in the sensing element of the electron beam position sensor. The model takes into account the effect of inelastic reflection of electrons arising in high-density electron beams.

Keywords: mathematical model, reflected electron flux, two-coordinate sensor, radiation pattern.

Нанесение тонких пленок и покрытий методом электронно-лучевого испарения материала в высоком вакууме из водоохлаждаемого тигля позволяет обеспечить высокое качество наносимых покрытий при условии стабильности параметров в течение всего процесса их нанесения [1]. Для

уменьшения влияния нестабильности параметров процесса нанесения на качество получаемых пленок был предложен метод контроля положения электронного луча в испарителе, основанный на использовании потока отраженных электронов с поверхности испаряемого материала [2, 3]. Для практической реализации данного метода использовалась математическая модель распределения потока отраженных электронов по коллекторам, установленным внутри чувствительного элемента датчика положения луча [4-6]. В работе [6] рассматривалась математическая модель для случая, когда электронный луч перемещает по одной координате. Такая ситуация имеет место в небольших установках с электромагнитной системой поворота луча на угол 180° . В более мощных установках луч отклоняется электромагнитной системой на угол менее 90° , но при этом выполняется его развертка на горизонтальной плоскости по двум координатам. В связи с этим математическая модель потока отраженных электронов значительно усложняется. Это связано с тем, что преобладающим направлением диаграммы направленности потока отраженных электронов является направление выхода луча из электронной пушки (рис. 1), а луч при этом смещается в направлении, перпендикулярном направлению выхода луча из пушки.

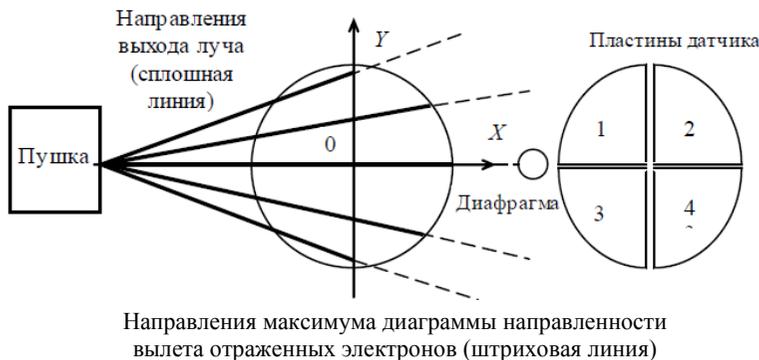


Рис. 1. Направления выхода луча и максимумов диаграммы направленности потока отраженных электронов (вид сверху)

Применение четырехколлекторного чувствительного элемента в виде четырех секторов круга в данном случае не обеспечивает высокой чувствительности датчика: это следует из законов геометрической оптики, которым в первом приближении подчиняется движение электронов падающего и отраженного луча (см. рис. 1). Из рис. 1 видно, что при отклонении луча вдоль оси Y поток отраженных электронов, проходящий через диафрагму на оси X , резко уменьшается. Данное предположение было под-

тверждено в ходе экспериментов, проводимых на электронно-лучевой установке УВН-75Р-1 с модифицированной системой отклонения. Поэтому в данной ситуации целесообразно определять положение электронного луча не на всей траектории в пределах мишени, а в ее центре. Для этого нужно в реальном времени отслеживать положение участка траектории движения луча вблизи центра мишени и корректировать его смещение.

Формула для расчета потока отраженных электронов I_k с поверхности фокального пятна электронного луча через k -й коллектор отраженных электронов (k меняется от 1 до 4), в отличие от формулы, приведенной в [6], имеет вид

$$I_k = \sum_{i=1}^n K_1(x_S, y_S) \cdot K_2(x_S, y_S) \cdot (\varphi_{2S} - \varphi_{1S}) \cdot (\cos \theta_{1S} - \cos \theta_{2S}), \quad (1)$$

где n – количество элементарных площадок на поверхности фокального пятна S ;

φ_{2S} , φ_{1S} , θ_{2S} , θ_{1S} – углы в системе полярных координат, определяющие положение элементарной площадки на коллекторе, достижимой отраженными электронами из элементарной площадки S [6]. Эти углы рассчитываются для каждой элементарной площадки S на поверхности фокального пятна электронного луча;

$K_1(x_S, y_S)$ – коэффициент, учитывающий параметры первичного луча и его взаимодействие с паровым потоком вблизи мишени;

$K_2(x_S, y_S)$ – коэффициент, учитывающий взаимодействие отраженных электронов с паровым потоком вблизи мишени.

Значение $K_1(x_S, y_S)$ определяется по формуле

$$K_1(x_S, y_S) = K_{Diagr}(x_S, y_S) \cdot K_{Norm}(x_S, y_S) \cdot K_{Var}(x_S, y_S), \quad (2)$$

где n – количество элементарных площадок на поверхности фокального пятна S ;

$K_{Diagr}(x_S, y_S)$ – коэффициент, учитывающий изменение диаграммы направленности потока первичных электронов луча вследствие его перемещения вдоль оси Y (см. рис. 1). Значение коэффициента $K_{Diagr}(x_S, y_S)$ пока определяется экспериментально путем измерения тока, протекающего в цепи единственного коллектора в виде круга, помещенного в камеру-обскуру [6]. Эксперименты по испарению алюминия, проведенные на электронно-лучевой установке УВН-75Р-1 с модифицированной системой отклонения, показали, что $K_{Diagr}(x_S, y_S) = (0,1 \div 0,3)$ в диапазоне ускоряющих напряжений от 4 до 7 кВ и определяется параметрами электронной пушки и системы отклонения;

$K_{Norm}(x_S, y_S)$ – коэффициент, учитывающий нормальное распределение плотности тока по поверхности фокального пятна луча [6];

$K_{Var}(x_S, y_S)$ – коэффициент, учитывающий взаимодействие первичных

электронов луча с атомами парового потока до его взаимодействия с мишенью [6].

Значение $K_2(x_S, y_S)$ определяется по формуле

$$K_2(x_S, y_S) = K_{Angle}(x_S, y_S) \cdot K_{Rf}(x_S, y_S), \quad (3)$$

где $K_{Angle}(x_S, y_S)$ – коэффициент, учитывающий изменение преобладающего угла вылета отраженных электронов вследствие перемещения вдоль оси Y (см. рис. 1). Эксперименты по испарению алюминия, проведенные на электронно-лучевой установке УВН-75Р-1 с модифицированной системой отклонения эксперименты, показали, что значение $K_{Angle}(x_S, y_S)$ принимает значения $(0,05 \div 0,2) \cdot K_{Norm}(x_S, y_S)$ в диапазоне ускоряющих напряжений от 4 до 7 кВ. Дальнейшей целью исследования является получение выражения, по которому можно будет рассчитать значение $K_{Angle}(x_S, y_S)$, в том числе и в более широком диапазоне ускоряющих напряжений;

$K_{Rf}(x_S, y_S)$ – коэффициент, учитывающий взаимодействие отраженных электронов с атомами парового потока [6].

Для вычисления позиционного сигнала, определяющего положения электронного луча, могут использоваться различные комбинации сигналов с коллекторов электронов (пластин датчика) с номерами от 1 до 4 (см. рис. 1), однако наиболее информативными парами являются 1 и 4, а также 2 и 3,

В процессе математического моделирования потока отраженных электронов с поверхности фокального пятна электронного луча было получено устойчивое совпадение характеристик датчика положения луча с экспериментальными результатами в диапазоне малых ускоряющих напряжений (не более 7 кВ) и фокальным пятном площадью не более 20 мм^2 при углах отклонения луча от оси X до 30° . Увеличить угол отклонения не удастся из-за особенностей конструкции испарителя электронно-лучевой установки УВН-75Р-1. Кроме того, при больших значениях площади фокального пятна усиливается расфокусировка фокального пятна луча, так как параметры испарителя, а также траектория первичного луча и положение фокального пятна взаимосвязаны. В дальнейшем планируется провести эксперименты с лучами более высоких энергий и фокальными пятнами больших размеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шиллер З. Электронно-лучевая технология: пер. с нем. / З. Шиллер, У. Гайзиг, З. Панцер. М.: Энергия, 1980. 528 с.
2. Контроль параметров тонких пленок, защитных покрытий и технологического процесса их нанесения в вакууме / Э.И. Семенов, А.В. Гусаров, С.Э. Семенова, А.С. Истомина, И.Ю. Паутов, Н.А. Швалев // Упрочняющие технологии и покрытия. 2006. № 6. С. 46 – 56.

3. *Гусаров А.В.* Математическая модель пространственного распределения потока электронов в датчике положения электронного луча // Методы и средства измерений физических величин: тез. докл. Всерос. науч.-техн. конф., 18–19 июня 1997 г. В 2 ч. Ч. II. Нижний Новгород: НГТУ, 1997. С. 23.
4. *Гусаров А.В.* Математическая модель однокоординатного датчика положения электронного луча / А.В. Гусаров, Н.И. Гусарова. Деп. в ВИНТИ 25.03.2008 г., № 249-В 2008.
5. *Гусаров А.В.* Двухкоординатный датчик положения электронного луча / А.В. Гусаров, Н.И. Гусарова. Деп. в ВИНТИ 24.12.2008 г. № 1003-В 2008.
6. *Гусаров А. В.* Совершенство математической модели распределения потока отраженных электронов / А.В. Гусаров, Н.И. Гусарова // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 14. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2019. С. 138–144.

УДК 330.4

И. Е. Каплина

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: iri.kaplina@yandex.ru

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ МИГРАЦИИ РЯЗАНСКОЙ ОБЛАСТИ

В статье рассматривается влияние различных экономических и социальных факторов на миграционную привлекательность Рязанской области. В ходе исследования были выявлены показатели, оказывающие наибольшее влияние на уровень миграции, и даны рекомендации по повышению привлекательности региона.

Ключевые слова: миграция, показатели, коэффициенты детерминации.

I. E. Kaplina

S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: iri.kaplina@yandex.ru

ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF MIGRATION INDICATORS OF THE RYAZAN REGION

The article deals with the impact of various economic and social factors on the migrations attractiveness of the Ryazan region. The study identified the indicators that have the greatest impact on the level of migration. Recommendations are given to increase the attractiveness of the region.

Keywords: migration, indicators, coefficients of determination.

Изучение миграционных потоков является одной из актуальных задач современного экономического исследования, которому посвящено немалое количество работ. Под миграцией в широком смысле слова большинство ученых понимают перемещение населения между различными территориями как внутри одной страны, так и между различными государствами.

Одним из показателей привлекательности региона является уровень миграции. Предполагается, что чем выше уровень миграции, тем выше экономическое и социальное благополучие региона. Для увеличения уровня миграции необходимо изучить факторы, оказывающие влияние на повышение уровня миграции.

Целью данного исследования является выявление влияния различных экономических и социальных факторов на миграционную привлекательность региона. В качестве индикатора миграционной привлекательности, т.е. эндогенной переменной, выбран показатель Y – миграционный прирост (убыль) населения Рязанской области, равный разнице между прибывшими в регион людьми и выбывшими из него. В качестве экономических экзогенных факторов были выбраны следующие показатели:

- X1 – численность населения (тыс. чел.);
- X2 – средняя продолжительность жизни населения (лет);
- X3 – средние цены на первичном рынке жилья (руб. за 1 кв. м.);
- X4 – численность рабочей силы (тыс. чел.);
- X5 – число зарегистрированных преступлений (на 100 тыс. населения);
- X6 – количество дошкольных образовательных учреждений (шт.);
- X7 – валовой региональный продукт (ВРП) на душу населения (руб./чел.);
- X8 – среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников организаций (руб.).

Задача данного исследования – выяснить, какие факторы оказывают статистически значимое влияние на изменение уровня миграции Рязанской области за период с 2010 по 2016 годы.

В качестве источника статистических данных для проведения исследования был выбран статистический сборник «Регионы России. Социально-экономические показатели» за период с 2011 по 2017 годы [1]. Исследование проводилось с использованием табличного процессора MS Excel [2]. Нормативное P -значение, при котором переменная оказывает влияние на уровень миграции, находится на уровне значимости 0,05.

Для оценки количественно измеренных переменных воспользуемся парным линейным коэффициентом корреляции Пирсона с использованием инструмента «Анализ Данных. Корреляция» программы MS Excel [3]. На основе построения уравнений множественной линейной регрессии по

кросс-данным для каждого года из рассматриваемого периода с использованием пакета данных «Анализ Данных. Регрессия»:

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^8 a_i X_i + \varepsilon, \quad t \in \overline{2010, 2016}. \quad (1)$$

После проведённых вычислений были выявлены статистически значимые факторы, оказывающие влияние на уровень миграции в Рязанской области (табл. 1). Так же для каждого года по всем факторам был вычислен коэффициент детерминации R^2 уравнений множественной регрессии (1), коэффициенты детерминации множественной регрессии, составленные только по значимым факторам в каждом году, и коэффициенты детерминации уравнений множественной регрессии, составленные по постоянным значимым факторам X3 и X8 в каждом году.

Таблица 1. Динамика статистически значимых факторов коэффициентов детерминации R^2

Год	Показатель Y			
	R^2 для всех факторов	Значимые факторы	R^2 для значимых факторов	R^2 для факторов X3, X8
2010	0,483	x1, x3, x4, x7, x8	0,459	0,419
2011	0,712	x3, x4, x7, x8	0,676	0,621
2012	0,661	x3, x6, x8	0,642	0,622
2013	0,492	x3, x4, x6, x7, x8	0,422	0,396
2014	0,804	x3, x8	0,791	0,791
2015	0,623	x3, x4, x8	0,605	0,592
2016	0,788	x3, x8	0,772	0,772

Из табл. 1 можно сделать вывод о том, что из всех исследуемых экономических и социальных факторов наибольшее влияние на уровень миграции в Рязанской области оказывают средняя цена на первичном рынке жилья (X3) и среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников организаций (X8).

На миграционную привлекательность Рязанской области периодически оказывают влияние: численность населения (X1), численность рабочей силы (X4), количество дошкольных образовательных учреждений (X6), валовый региональный продукт (ВРП) на душу населения (X7). При этом показатель средней продолжительности жизни населения (X2) и число зарегистрированных преступлений (X5) не оказывают влияния на уровень миграции.

Таким образом, исключив статистически незначимые факторы и факторы, значимые в отдельные годы, регрессионное уравнение миграционной привлекательности от цены на первичном рынке жилья (X_3) и среднемесячной номинальной начисленной заработной плате работников организаций (X_8) принимает вид:

$$Y = a_0 + a_2 X_2 + a_7 X_7 + \varepsilon, \quad t \in \overline{2010, 2016}. \quad (2)$$

На рис. 1 показана динамика коэффициентов детерминации R^2 уравнений множественной регрессии (1), коэффициентов детерминации множественной регрессии, составленных только по значимым факторам в каждом году, и коэффициентов детерминации уравнений множественной регрессии (2), составленных по постоянным значимым факторам X_3 и X_8 в каждом году.

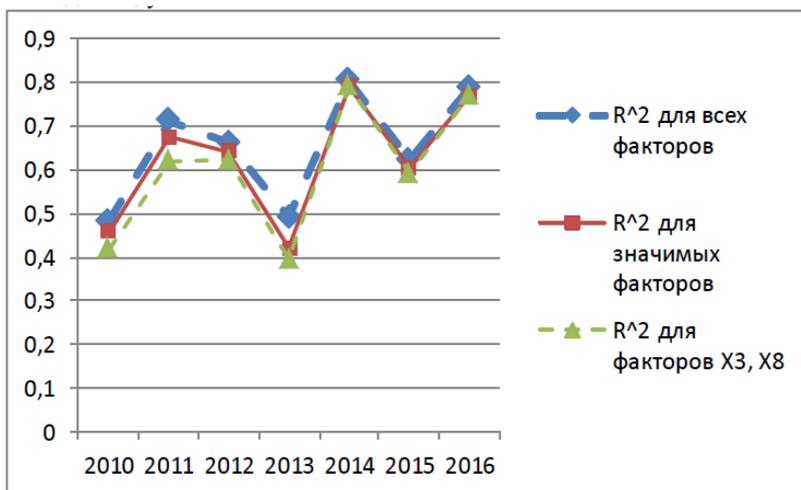


Рис. 1. Динамика коэффициентов детерминации R^2 наилучших уравнений множественной регрессии

Из табл. 1 и рис. 1 видно, что влияние факторов X_3 и X_8 на уровень миграции было наибольшим именно в кризисный 2014 год. Наименьшее же влияние на миграцию эти факторы оказали в докризисный 2013 год.

Проведённое исследование показало, что для повышения привлекательности Рязанской области для мигрантов, необходимо принять меры по повышению среднемесячной номинально начисленной заработной платы работников организаций и снижению средних цен на первичном рынке жилья.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Регионы России. Социально-экономические показатели: статистический сборник. 2011–2017 гг. [Электронный ресурс] // Федеральная служба государственной статистики. URL: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1138623506156 (дата обращения 29.10.2019 г.).
2. *Корепина Т.А.* Сравнительный анализ подходов к моделированию миграции // Вопросы территориального развития. 2017. № 1 (36). С. 1–12.
3. *Надирбаева Л.А.* Применение методов экономико-математического моделирования для анализа миграционных процессов в России // World Science: Problems and Innovations: материалы конф. Пенза, 2017. С. 205–207.

УДК 517.95

И. Ю. Клочкова, Г. Н. Винник

Рязанское гвардейское высшее воздушно-десантное
командное училище им. В. Ф. Маргелова
Россия, г. Рязань, *e-mail: i-usacheva@mail.ru, gennadij.vinnik.71@mail.ru*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ПЕРВЫЙ ЭТАП ПРЫЖКА ПАРАШЮТИСТА

Рассматривается первый этап движения парашютиста с момента отделения от самолета. На данном этапе парашютист представляет собой тяжелый груз. На основе реальных данных определяется математическая модель, описывающая траекторию движения парашютиста, в частности его свободное падение.

Ключевые слова: математическая модель движения парашютиста, свободное падение парашютиста.

I. U. Klochkova, G. N. Vinnik

V.F. Margelov Ryazan Guards Higher Airborne Command School
Russia, Ryazan, *e-mail: i-usacheva@mail.ru, gennadij.vinnik.71@mail.ru*

MATHEMATICAL MODEL DESCRIBING FIRST STEP JUMPING OF A PARASUTIST

We consider the first stage of the parachutist trajectory since he leaves the aircraft. The parachutist is a heavy load at this stage. On the basis of real data the mathematical model is determined. It describes the trajectory of the parachutist, in particular its free fall.

Keywords: mathematical model of the parachutist motion, free falls of parachutist.

Процесс прыжка парашютиста можно разбить на следующие основные этапы: первый этап – падение после отделения от самолета; второй этап – снижение на стабилизирующем парашюте; третий этап – наполнение купола основного парашюта; четвертый этап – снижение на раскрытом парашюте. Рассмотрим первый этап прыжка, составим систему дифференциальных уравнений, описывающую данный этап.

После отделения парашютиста от самолета на полную длину вытягивается звено стабилизирующего парашюта. На данном этапе вариация высоты составляет 1-1,5 м. Длительность первого этапа составляет 1 секунду. В течение первого этапа изменение скорости парашютиста и пройденного им пути происходит по законам падения в воздухе тела без парашюта. После отделения от горизонтально летящего самолета тело по инерции продолжает двигаться в направлении полета самолета, под действием силы тяжести стремится вниз [1, 2].

На основании рекомендаций, предложенных в литературе [3], а также на экспериментальных данных, полученных в результате прыжка, получим систему дифференциальных уравнений, описывающую изменение скорости парашютиста в пространстве

$$\begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + b_1 \cdot V_x + a_1 \cdot V_x \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_y = c_2 + b_2 \cdot V_y + a_2 \cdot V_y \cdot (V_y^2 + V_z^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_z = c_3 + b_3 \cdot V_z + V_z \cdot (k_3 \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} + m_3 \cdot (V_y^2 + V_z^2)^{1/2}), \end{cases} \quad (1)$$

где V_x - скорость парашютиста по координате x ; V_y - скорость парашютиста по координате y ; V_z - скорость парашютиста по координате z ; коэффициенты a_n , k_3 , m_3 пропорциональны площади сечения тела S , поперечного по отношению к потоку; b_n определяется свойствами и плотностью среды; c_n зависит от ускорения свободного падения и массы тела, $n = \overline{1,3}$.

С помощью программы GPS Loger, установленной на мобильное устройство, получены результаты измерения прыжка парашютиста в количестве 10 данных. Из полученных данных сформирован массив, отображающий зависимость трех координат от времени. В пакете прикладных программ Maple на основании обработанных данных, построена траектория движения парашютиста (рис. 1) [4].

Для системы (1) ставится задача определения координат начала второго этапа прыжка парашютиста.

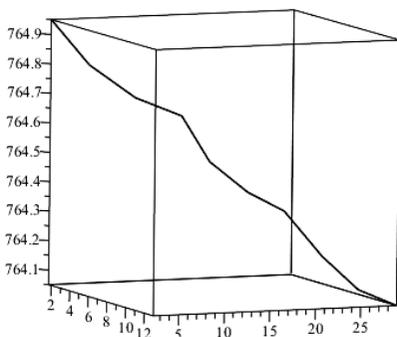


Рис. 1. Траектория прыжка парашютиста на первом этапе

В результате регрессионного анализа результатов измерений, получены коэффициенты системы (1) для пяти возможных случаев. Для каждой системы построена теоретическая траектория прыжка. Произведено сравнение с фактической траекторией прыжка. В качестве примера приведены два из пяти полученных результатов.

$$\begin{cases} \dot{V}_x = 0,31 + 0,06 \cdot V_x + 0,032 \cdot V_x \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_y = 28,8 - 11,6 \cdot V_y + 1,16 \cdot V_y \cdot (V_y^2 + V_z^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_z = -0,2 - 3,49 \cdot V_z + V_z \cdot (-0,001 \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} + 0,22 \cdot (V_y^2 + V_z^2)^{1/2}). \end{cases} \quad (2)$$

В результате сравнения фактической и теоретической координат окончания первого этапа и начала второго этапа получили расхождение равное 4,58 м (рис. 2).

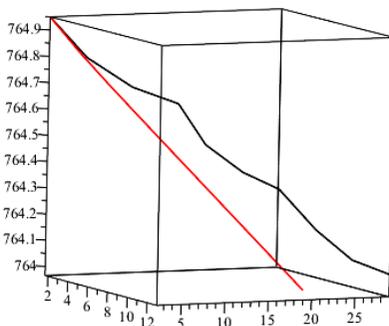


Рис. 2. Сравнение фактической и теоретической траектории, построенной для системы (2)

Также рассмотрим пример, когда в результате регрессионного анализа результатов измерений для системы (1) получен случай, когда $b_1 = a_2 = m_3 = 0$

$$\begin{cases} \dot{V}_x = 1,9 - 0,35 \cdot V_x \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_y = 7,79 - 1,5 \cdot V_y, \\ \dot{V}_z = 0,003 - 0,02 \cdot V_z - 0,001 \cdot V_z \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (3)$$

В результате сравнения фактических и теоретических координат окончания первого этапа и начала второго этапа получили расхождение равное 3,62 м. Также получили наилучшее совпадение фактической и теоретической траекторий (рис. 3).

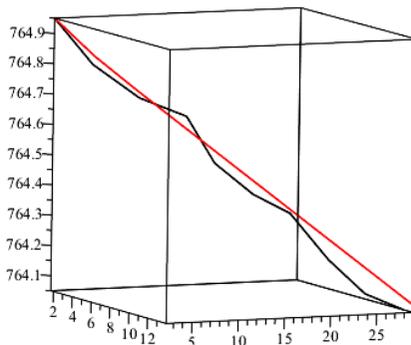


Рис. 3. Сравнение фактической и теоретической траектории, построенной для системы (3)

Авторами продолжено исследование следующих этапов прыжка на базе экспериментальных данных. Построены модели для второго этапа – снижения на стабилизирующем парашюте; третьего этапа – наполнения купола основного парашюта.

Заключение. В работе предложены численные методы движения парашютиста на этапе падения после отделения от самолета до этапа снижения на стабилизирующем парашюте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клочкова И.Ю. Математическая модель плоского движения тяжелой точки // Вестник Российской академии естественных наук. 2016. 16, № 3. С. 28–33.
2. Клочкова И.Ю. Исследование системы дифференциальных уравнений, описывающей этап снижения на раскрытом парашюте // Вестник Российской академии естественных наук. 2017. Т.17, № 4. С. 26–30.

3. *Лялин В.В.* Парашютные системы / В.И. Морозов, А.Т. Пономарев. М.: Физматлит, 2009. 506 с.
4. *Мамонов С.С.* Моделирование движения парашютиста при раскрытом парашюте / С.С. Мамонов, И.Ю. Клочкова // Вестник рязанского радиотехнического университета. 2018. Т. 66. С. 64–70.

УДК 621.891:621.026

Л. В. Королев, Д. О. Бытев

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: korolevly@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ В МОДЕЛИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ЭФФЕКТАМИ ПАМЯТИ

Предложена марковская цепь для моделирования случайного переноса частиц с учетом эффектов памяти. Изучены режимы транспорта, возникающие при различных соотношениях параметров модели, определяющих вероятностные характеристики единичных перемещений и остановок частиц.

Ключевые слова: случайный процесс, кинетическое уравнение, супердиффузия, субдиффузия, марковская цепь.

L. V. Korolev, D. O. Bytev

Yaroslavl State Technical University
Yaroslavl, Russia, e-mail: korolevly@mail.ru

APPLICATION OF THE MARKOV CHAIN IN THE MODEL OF A RANDOM PROCESS WITH MEMORY EFFECTS

A Markov chain is proposed for modeling random particle transport with memory effects. The modes of transport arising at various ratios of the model parameters determining the probabilistic characteristics of particles sporadic displacements and stops are studied.

Keywords: random process, kinetic equations, superdiffusion, subdiffusion, Markov chain.

Случайный транспорт частиц в средах со сложной структурой, таких как сыпучие материалы, пористые тела, ткани живых организмов может обладать особенностями, которые отличают его от классического диффузионного транспорта. К числу таких особенностей относятся эффекты памяти, которые связаны с тем, что характерная длительность единич-

ного случайного перемещения частицы из одной точки фазового пространства в другую или длительность неподвижного пребывания частицы в одной точке является сравнимой с длительностью всего процесса. С точки зрения математического описания, эти эффекты обусловлены бесконечным математическим ожиданием распределения длительностей случайного перемещения или неподвижного пребывания частицы [1]. Для моделирования случайного транспорта при наличии эффектов памяти обычно используются интегральные по времени кинетические уравнения, которые записываются с помощью операторов дробной производной. Эти уравнения применимы для анализа процессов, протекающих в однородных и стационарных средах. Если среда ограничена или условия в ней изменяются в ходе процесса, то более удобным, на наш взгляд, является предложенный в работах [2, 3] метод моделирования, основанный на замене немарковского процесса случайного транспорта с памятью на эквивалентный марковский процесс в расширенном фазовом пространстве. Это пространство включает в себя, кроме переменных исходного процесса, дополнительные переменные, которые определяют время, прошедшее с момента начала очередного случайного смещения частицы или с начала ее пребывания в неподвижном состоянии, и могут быть названы собственными временами соответствующих процессов. В новом фазовом пространстве дифференциальное кинетическое уравнение случайного транспорта может быть представлено в стандартной форме Колмогорова – Феллера – Фоккера – Планка и решаться разработанными для этого типа уравнений аналитическими и численными методами.

Вместе с тем, во многих приложениях марковские случайные процессы удобно рассматривать в дискретном фазовом пространстве с дискретным временем, то есть в виде марковских цепей [4]. Такой метод моделирования дает представление состояния системы и переходных вероятностей в стандартной матричной форме и позволяет в ряде случаев упростить и ускорить расчеты за счет использования реализованных в современных математических процессорах эффективных процедур для работы с матрицами. В настоящей статье мы предлагаем пример моделирования процесса случайного транспорта с памятью с помощью марковской цепи.

Рассмотрим простейшую модель одномерной фильтрации в пористой среде. Фильтр занимает промежуток $(0, L)$ на оси x , время наблюдения t изменяется от 0 до t_{\max} . Твердая частица, увлекаемая потоком жидкости, движется в положительном направлении оси x со скоростью v , время от времени задерживаясь в порах. Длительность интервала непрерывного движения τ_m и длительность пребывания в поре τ_w имеют, соответственно, плотности распределения $p_m(\tau)$ и $p_w(\tau)$ и принимают значе-

ния на отрезке $(0, t_{\max})$. Расширенное фазовое пространство частицы $\{x, \tau_w, \tau_m, \bar{s}\}$ включает дискретную переменную \bar{s} , которая указывает текущее состояние частицы и равна 1, если частица неподвижна, и 2, если частица перемещается вдоль оси x . Для дискретизации остальных переменных разделим интервал $(0, L)$ на n_x промежутков шириной Δ_x , а интервал $(0, t_{\max})$ на n_t промежутков шириной Δ_t . Тогда дискретная пространственная переменная \bar{x} будет принимать значения $1, 2, \dots, n_x$, а дискретные собственные времена $\bar{\tau}_w$ и $\bar{\tau}_m - 1, 2, \dots, n_t + 1$. Дискретизацию времени наблюдения проводится с шагом Δ_t , разбивая интервал $(0, t_{\max})$ на n_t промежутков. Дискретное время \bar{t} пробегает значения $1, 2, \dots, n_t + 1$. Переход к первоначальным переменным дается выражениями: $x = \bar{x} \Delta_x$, $\tau_w = (\bar{\tau}_w - 1) \Delta_t$, $\tau_m = (\bar{\tau}_m - 1) \Delta_t$, $t = (\bar{t} - 1) \Delta_t$.

Вероятность нахождения частицы в каждой точке дискретного фазового пространства в момент времени \bar{t} определяется матрицей состояния $f_{\bar{t}}[\bar{x}, \bar{\tau}_w, \bar{\tau}_m, \bar{s}]$, удовлетворяющей условию нормировки

$$\sum_{\bar{x}, \bar{\tau}_w, \bar{\tau}_m, \bar{s}} f_{\bar{t}}[\bar{x}, \bar{\tau}_w, \bar{\tau}_m, \bar{s}] = 1. \quad (1)$$

Здесь и далее суммирование ведется по всей области значений всех указанных под знаком Σ индексов. Эволюция матрицы f определяется матрицей переходных вероятностей P согласно уравнению [4]

$$\begin{aligned} f'_{\bar{t}+1}[\bar{x}, \bar{\tau}_w, \bar{\tau}_m, \bar{s}] &= \\ &= \sum_{\bar{x}', \bar{\tau}'_w, \bar{\tau}'_m, \bar{s}'} P[\bar{x}, \bar{\tau}_w, \bar{\tau}_m, \bar{s} | \bar{x}', \bar{\tau}'_w, \bar{\tau}'_m, \bar{s}'] f'_{\bar{t}}[\bar{x}', \bar{\tau}'_w, \bar{\tau}'_m, \bar{s}']. \end{aligned} \quad (2)$$

Матрица P для рассматриваемого процесса может быть записана в виде

$$P = P_{ww} + P_{mw} + P_{mm} + P_{wm}, \quad (3)$$

где матрица P_{ww} описывает процесс пребывания частицы в поре, матрица P_{mm} задает непрерывное движение частицы, а слагаемые P_{mw} и P_{wm} отвечают, соответственно, переходам частицы от состояния покоя к состоянию движения и обратно. Эти матрицы определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} P_{ww} &= \delta[\bar{s}, 1] \delta[\bar{s}', 1] \delta[\bar{\tau}_m, \bar{\tau}_m'] \delta[\bar{x}, \bar{x}'] \times \\ &\times \left(\left(1 - q_w(\bar{\tau}_w') \Delta_t - (1 - \delta[n_t + 1, \bar{\tau}_w']) \frac{\Delta_t}{\Delta_\tau} \right) \delta[\bar{\tau}_w, \bar{\tau}_w'] + \frac{\Delta_t}{\Delta_\tau} \delta[\bar{\tau}_w, \bar{\tau}_w' + 1] \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 P_{mm} = & \delta[\bar{s}, 2]\delta[\bar{s}', 2]\delta[\bar{\tau}_w, \bar{\tau}_w'] \times \\
 & \times \left(\left(1 - q_m(\bar{\tau}_m')\Delta_t - (1 - \delta[n_\tau + 1, \bar{\tau}_m'])\frac{\Delta_t}{\Delta_\tau} - (1 - \delta[n_x + 1, \bar{x}'])v\frac{\Delta_t}{\Delta_x} \right) \times \right. \\
 & \times \delta[\bar{x}, \bar{x}']\delta[\bar{\tau}_m, \bar{\tau}_m'] + \\
 & \left. + \frac{\Delta_t}{\Delta_\tau}\delta[\bar{\tau}_m, \bar{\tau}_m' + 1]\delta[\bar{x}, \bar{x}'] + v\frac{\Delta_t}{\Delta_x}\delta[\bar{x}, \bar{x}' + 1]\delta[\bar{\tau}_m, \bar{\tau}_m'] \right), \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$P_{mw} = \delta[\bar{s}, 2]\delta[\bar{s}', 1]\delta[\bar{x}, \bar{x}']\delta[\bar{\tau}_w, 1]\delta[\bar{\tau}_m, 1]q_w(\bar{\tau}_w')\Delta_t, \quad (6)$$

$$P_{wm} = \delta[\bar{s}, 1]\delta[\bar{s}', 2]\delta[\bar{x}, \bar{x}']\delta[\bar{\tau}_w, 1]\delta[\bar{\tau}_m, 1]q_m(\bar{\tau}_m')\Delta_t, \quad (7)$$

где

$$\delta[i, j] = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (8)$$

а $q_w(\bar{\tau}_w)$ и $q_m(\bar{\tau}_m)$ - вероятности перехода в единицу времени от состояния покоя к движению и от движения к покою соответственно.

Если плотности распределения p_w и p_m имеют степенной вид $p_w(\tau) = \tau_0^{-1}\gamma_w/(1 + \tau/\tau_0)^{1+\gamma_w}$ и $p_m(\tau) = \tau_0^{-1}\gamma_m/(1 + \tau/\tau_0)^{1+\gamma_m}$, где показатели $\gamma_w > 0$, $\gamma_m > 0$, а τ_0 - параметр размерности времени, то вероятности q_w и q_m определяются выражениями [2, 3]:

$$q_w(\bar{\tau}_w) = \frac{\gamma_w}{(\Delta_\tau(\bar{\tau}_w - 1) + \tau_0)}, \quad q_m(\bar{\tau}_m) = \frac{\gamma_m}{(\Delta_\tau(\bar{\tau}_m - 1) + \tau_0)}. \quad (9)$$

Численные расчеты матрицы f по уравнению (2) с учетом (3) – (9) и с начальным условием

$$f_1[\bar{x}, \bar{\tau}_w, \bar{\tau}_m, \bar{s}] = \delta[\bar{x}, 1]\delta[\bar{\tau}_w, 1]\delta[\bar{\tau}_m, 1]\delta[\bar{s}, 1] \quad (10)$$

приводят к следующим результатам. Характер протекания случайного процесса определяется величиной параметров γ_w и γ_m . Если $\gamma_w > 1$ и $\gamma_m > 1$, то транспорт частицы проходит в режиме классической диффузии со сносом. Если $\gamma_w < 1$ и $\gamma_m > 1$, то среднее время задержки частицы в поре бесконечно и наблюдается режим замедленного транспорта (субдиффузии). Если $\gamma_w > 1$ и $\gamma_m < 1$, то бесконечно среднее время непрерывного движения частицы и транспорт носит баллистический характер (супердиффузия). Если $\gamma_w < 1$ и $\gamma_m < 1$, то устанавливается супердиффузионный режим транспорта с длительным пребыванием в ловушках [3].

Данные расчетов при $L = 10$, $t_{\max} = 10$, $n_x = n_\tau = 10$, $n_t = 100$, $\tau_0 = 1$, $\nu = 1$ приведены на рис. 1, где представлена эволюция вероятностного распределения положения частицы внутри фильтра $f_t[\bar{x}] = \sum_{\bar{\tau}_w, \bar{\tau}_m, \bar{s}} f_i[\bar{x}, \bar{\tau}_w, \bar{\tau}_m, \bar{s}]$ для различных режимов транспорта.

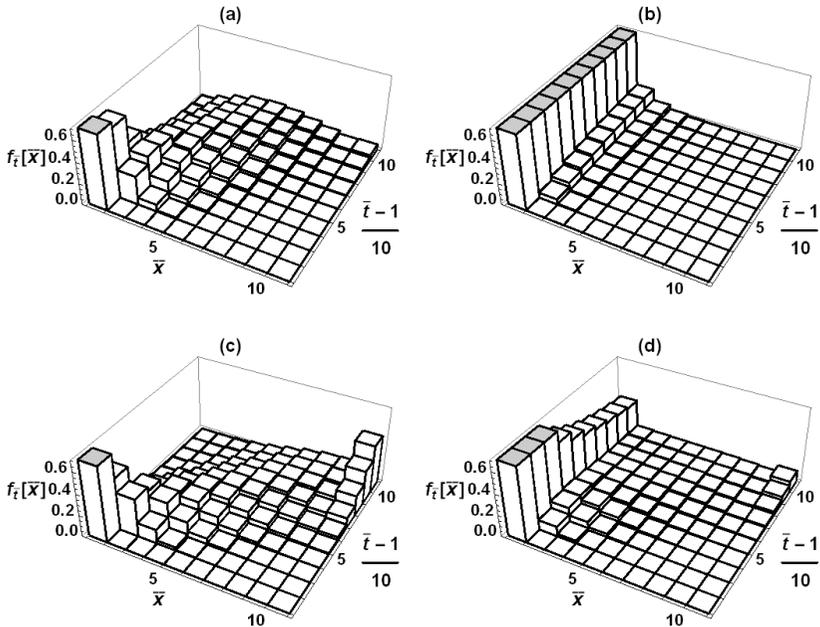


Рис. 1. Эволюция вероятностного распределения положения частицы в различных режимах:

- a* – классическая диффузия со сносом ($\gamma_w = 5$ и $\gamma_m = 5$);
- b* – субдиффузия ($\gamma_w = 5$ и $\gamma_m = 5$); *c* – супердиффузия ($\gamma_w = 5$ и $\gamma_m = 5$);
- d* – супердиффузия с длительным пребыванием в ловушках ($\gamma_w = 5$ и $\gamma_m = 5$)

Таким образом, в работе представлен пример моделирования с помощью марковской цепи процесса случайного переноса с эффектами памяти. Численные исследования выявили четыре качественно различных режима транспорта частиц, возникающих при различных соотношениях модельных параметров. Предложенный подход может применяться для анализа различных случайных процессов химических технологий и в других областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kutner R.* The continuous time random walk, still trendy: fifty-year history, state of art and outlook / R. Kutner, J. Masoliver // *Eur. Phys. J. B* (2017) 90: 50 DOI: 10.1140/epjb/e2016-70578-3.
2. *Королев Л.В.* Собственное время в модели случайного процесса / Л. В. Королев, Д.О. Бытев // *Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11.* Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2016. С. 215–218.
3. *Королев Л.В.* Моделирование процессов случайного транспорта с учетом эффектов памяти / Л.В. Королев, Д.О. Бытев // *Современные наукоемкие технологии. Региональное приложение.* 2018. №4 (56). С. 32–35.
4. *Баранцева Е.А.* Введение в теорию цепей Маркова и ее инженерные приложения: учебное пособие / Е. А. Баранцева, В. Е. Мизонов. Иваново. 2010. 80 с.

УДК 691.53

Ю. И. Кривчиков, В. М. Дудин

**ВЛИЯНИЕ СОСТАВА МИНЕРАЛЬНОГО ВЯЖУЩЕГО
НА ПРОЧНОСТЬ АСФАЛЬТОГРАНУЛОБЕТОНА
ПРИ ХОЛОДНОМ РЕСАЙКЛИНГЕ**

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail: krivchikovuriy@gmail.com, dudinvm@ystu.ru*

В статье приводится описание технологии холодного ресайклинга и изучается зависимость прочности смеси от ее состава.

Ключевые слова: *холодный ресайклинг, дорожно-строительные материалы, цемент.*

Yu. I. Krivchikov, V. M. Dudin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, *e-mail: krivchikovuriy@gmail.com, dudinvm@ystu.ru*

**INFLUENCE OF THE MINERAL COMPOSITION BINDER
FOR STRENGTH ASPHALT GRAINED CONCRETE
AT COLD RESYCLING**

The article considers the technology of cold recycling and the dependence of the strength of the mixture on its composition.

Keywords: *cold recycling, road materials, cement.*

Возросший в разы за последние десятилетия автомобильный парк страны увеличил интенсивность движения по автомобильным дорогам

общего назначения, что вызвало необходимость увеличения несущей способности дорожной одежды используемых дорог. Увеличить несущую способность дороги возможно только путём капитального ремонта или реконструкции дороги с переводом её в более высокую категорию.

Капитальный ремонт или реконструкция автомобильной дороги является весьма дорогостоящим мероприятием. Большую долю расходов при дорожно-ремонтных работах, до 25% от себестоимости работ, приходится на транспортировку горячей асфальтобетонной смеси и вывозку фрезерованного асфальтобетона. Свести до минимума эту статью расходов позволяет новая технология ремонта дорожного покрытия – холодный ресайклинг.

Recycling (анг.) – переводится как повторное использование, переработка отходов. И действительно, сущность данной технологии заключается в повторном использовании, в измельчении и перемешивании существующего асфальтобетонного покрытия и слоя нижележащего материала с добавлением связующих материалов с целью получения прочного однородного дорожного основания – асфальтогранулобетона. На такое основание впоследствии укладывается новое асфальтобетонное покрытие. В итоге получается новая дорога с использованием материала реконструируемой дороги. Очевидные плюсы – не надо привозить горячий асфальтобетон и отвозить фрезерованный асфальт. В плюсы можно добавить быструю реакцию на погодные условия: пошёл дождь – работы остановлены, дождь прекратился – работы продолжены, не надо опасаться, что может остыть горячий асфальтобетон, при холодном ресайклинге горячий асфальтобетон просто не используется. Вяжущим в холодном ресайклинге используется как органические вяжущие: битумная эмульсия и вспененный битум, так и гидравлические вяжущие – цемент, известь.

Нами были произведены исследования по определению предела прочности составов, полученных по технологии холодного ресайклинга с применением цемента. Сущность метода заключается в определении нагрузки, необходимой для разрушения образца определённой площади при заданных условиях.

Были изготовлены образцы диаметром 50,5 мм из асфальтогранулята ЦМА (щебёночно-мастичный асфальтобетон), асфальтогранулята асфальтобетона тип Б с добавлением заполнителя – щебня фракции 10-20 мм, цемента и воды в различных пропорциях. На каждый образец отвешивалось по 240 г холодной смеси.

Были испытаны следующие составы:

А – ЦМА (щебёночно-мастичный асфальтобетон) 33,3%; асфальтобетон тип Б 33,3%; щебень фракция 10-20 мм 33,3%; вода 3%; цемент марки ЦЕМ I 42,5Н.

Б – ЦМА (щебёночно-мастичный асфальтобетон) 25%; асфальтобетон тип Б 25%; щебень фракция 10-20 мм 50%; вода 3%; цемент марки ЦЕМ I 42,5Н.

В – ЩМА (щебёночно-мастичный асфальтобетон) 16,6%; асфальтобетон тип Б 33,3%; щебень фракция 10-20 мм 50%; вода 3%; цемент марки ЦЕМ I 42,5Н.

Образцов состава А с содержанием цемента, соответственно, 3, 4, 5 и 6% было изготовлено по 3 экземпляра. Они испытывались через 2, 4 и 7 суток.

Образцов состава Б с содержанием цемента, соответственно, 3, 4, 5 и 6% было изготовлено по 2 экземпляра. Они испытывались через 2 и 7 суток.

Образцов состава В с содержанием цемента, соответственно, 3, 4, 5 и 6% было изготовлено по 3 экземпляра. Они испытывались через 2, 7 и 14 суток.

Результаты испытаний приведены на рис. 1–3.

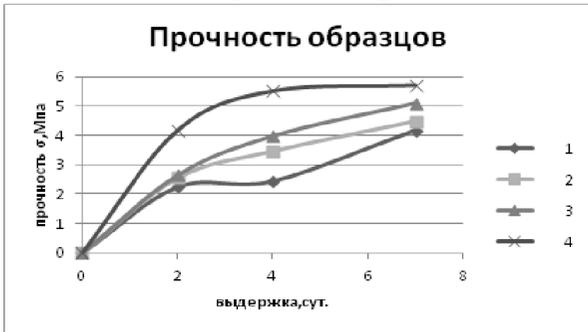


Рис. 1. График зависимости предела прочности на сжатие от содержания цемента в образце (состав смеси А):

1 – содержание цемента 3%; 2 – содержание цемента 4%;
3 – содержание цемента 5%; 4 – содержание цемента 6%

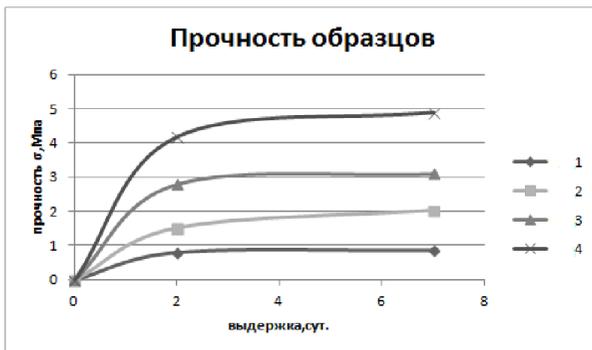


Рис. 2. График зависимости предела прочности на сжатие от содержания цемента в образце (состав смеси Б):

1 – содержание цемента 3%; 2 – содержание цемента 4%;
3 – содержание цемента 5%; 4 – содержание цемента 6%

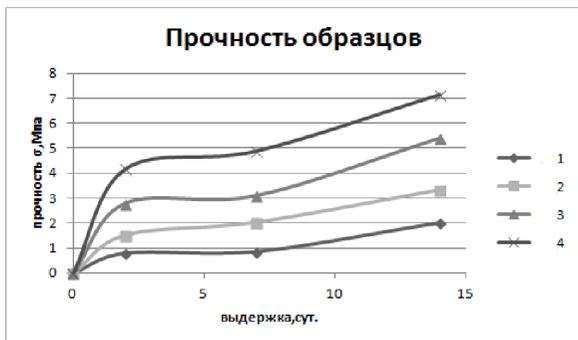


Рис. 3. График зависимости предела прочности на сжатие от содержания цемента в образце (состав смеси В):
1 – содержание цемента 3%; 2 – содержание цемента 4%;
3 – содержание цемента 5%; 4 – содержание цемента 6%

Выводы

1. Для всех составов асфальтогранулобетонной смеси увеличение содержания цемента и времени выдержки образцов приводит к увеличению прочности асфальтогранулобетона.

2. Учитывая рекомендации ГОСТ 9128-2013, прочность основания из асфальтогранулобетона должна быть не ниже 2 МПа, что наблюдается через 1,0-2,0 суток выдержки образцов для составов А и Б.

3. Для состава В может быть рекомендовано повышенное содержание цемента – 5 и 6%. При более низком содержании образцы имеют недостаточную прочность.

4. Согласно проведенным исследованиям, технологический перерыв до начала строительства асфальтобетонных покрытий составляет от 1 суток (для содержания цемента 6%) до 2-х суток (для содержания цемента 3%). Во время технологического перерыва следует закрывать или ограничивать движение грузового транспорта и регулировать движение легкового.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евстегнеева В.Н.* Ремонт и реконструкция асфальтобетонных покрытий методом холодного ресайклинга [Электронный ресурс] / В.Н. Евстегнеева, В.Г. Степанец // Молодой ученый. 2017. №38. С. 21-28. URL <https://moluch.ru/archive/172/45732/>.
2. Wirtgen. Технология холодного ресайклинга [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://media.wirtgengroup.com/media/02_wirtgen/infomaterial_1/kaltrecycler/kaltrecycling_technologie/kaltrecycling_handbuch/___RU.pdf (дата обращения: 11.02.2019).
3. ГОСТ 12801-98. Материалы на основе органических вяжущих для дорожного и аэродромного строительства. Методы испытаний.
4. *Дудин В.М.* Стабилизация грунтов при строительстве автомобильных дорог. монография / В.М. Дудин, А.А. Игнатъев. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. 174 с.

УДК 330.4

Е. Ю. Лискина, И. П. Щукина

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: katelis@yandex.ru, i.shukina@365.rsu.edu.ru

**ИССЛЕДОВАНИЕ РЕГИОНАЛЬНЫХ РАЗЛИЧИЙ РЫНКА
ТРУДА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ МЕТОДАМИ
АНАЛИЗА ПАНЕЛЬНЫХ ДАННЫХ**

В данной статье построена эконометрическая модель зависимости доли рабочей силы от общей площади жилых помещений, приходящейся в среднем на одного жителя, среднемесячной номинальной начисленной заработной платы работников организаций и доли выпускников государственных и муниципальных дневных общеобразовательных учреждений в общей численности населения. Методом исследования является анализ панельных данных. Результатом исследования является выявление региональных различий, наличие скрытых системных или случайных эффектов.

Ключевые слова: эконометрическая модель, трудовая привлекательность региона, панельный анализ.

E. Y. Liskina, I. P. Schukina

S.A. Esenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: katelis@yandex.ru, i.shukina@365.rsu.edu.ru

**RESEARCH OF REGIONAL DIFFERENCES
OF THE RUSSIAN FEDERATION'S LABOR MARKET
BY THE PANEL DATA ANALYSIS**

In this article, we have built an econometric model of the dependence of the share of the labor force on the total area of residential premises, falling on average per inhabitant, the average monthly nominal accrued wages of employees of organizations and the share of graduates of state and municipal day educational institutions in the total population. The research method is the analysis of panel data. The result of the study is to identify regional differences, the presence of hidden systemic or random effects.

Keywords: econometric model, labor attractiveness of the region, panel data analysis.

Постановка задачи. В настоящее время исследование трудовой привлекательности регионов Российской Федерации имеет большое значение. Актуальность проблемы трудовой привлекательности обусловлена тем, что Россия вступила в период демографического кризиса. При этом

нынешнее положение рынка труда усугубляет проблема дифференциации регионов по уровню социально-экономического развития. **Задачей данного исследования** является изучение трудовой привлекательности регионов России с целью выявления региональных различий, наличие скрытых системных или случайных эффектов.

Исследованию трудовой привлекательности регионов посвящен целый ряд работ [1–3], в которых целевой переменной является миграционный прирост населения. В нашем исследовании в качестве индикатора трудовой привлекательности (эндогенной переменной) выбран показатель Y – доля рабочей силы, равная отношению численности экономически активного населения к среднегодовой численности населения в данном регионе. Источником исходных данных является официальный сайт Федеральной службы государственной статистики [4].

Предварительные результаты. В работе [5] мы исследовали зависимость переменной Y от следующих факторов: инвестиций в основной капитал на душу населения, валового регионального продукта на душу населения, фондовооруженности, общей площади жилых помещений, приходящейся в среднем на одного жителя, среднемесячной номинальной начисленной заработной платы работников организаций, плотности рабочих мест (отношения числа свободных рабочих мест, заявленных работодателями, к среднегодовой численности населения), стоимости основных фондов на душу населения, плотности предприятий и организаций (отношения количества предприятий и организаций, зарегистрированных в регионе, к среднегодовой численности населения). Использовались методы множественного регрессионного и корреляционного анализа в каждом году периода наблюдений. Было выявлено, что на протяжении всего периода наблюдений остаются статистически значимыми следующие факторы: общая площадь жилых помещений, приходящаяся в среднем на одного жителя (X_1 , м²/чел), и среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников организаций (X_2 руб./чел.). Исследование влияния факторов X_1 и X_2 на Y методами анализа панельных данных [6] показало, что на уровне значимости 0,05 предпочтительна модель несвязанных регрессий. Другими словами, с вероятностью 0,95 индивидуальные различия регионов постоянны.

Затем в модель были добавлены новые факторы: доля выпускников государственных и муниципальных дневных общеобразовательных учреждений в общей численности населения, доля выпускников – специалистов среднего и высшего звена в общей численности населения, среднедушевые денежные доходы населения (руб./чел). Исследование динамики влияния данных факторов на целевую функцию Y показало [7], что к двум

постоянным факторам трудовой привлекательности регионов России в 2006–2016 годах X_1 и X_2 с 2012 года добавляется третий – доля выпускников государственных и муниципальных дневных общеобразовательных учреждений в общей численности населения (X_3), существенно повышающий значение коэффициента детерминации R^2 .

Таким образом, регрессионное уравнение трудовой привлекательности от общей площади жилых помещений, приходящейся в среднем на одного жителя (X_1), среднемесячной номинальной начисленной заработной платы работников организаций (X_2) и доли выпускников государственных и муниципальных дневных общеобразовательных учреждений в общей численности населения (X_3), принимает вид

$$Y_t = a_0 + \sum_{i=1}^3 a_i X_{it} + \varepsilon_t, \quad t = \overline{2006, 2016}. \quad (1)$$

Были построены следующие модели панельных данных:

1) OR-модель – модель общей регрессии вида (1), которая не предполагает никаких эффектов, характерных для отдельных объектов наблюдения или моментов времени;

2) UR-модель – модель несвязанных регрессий вида (1) по регионам, которая используется для моделирования индивидуальных различий при отсутствии взаимосвязей между отдельными объектами;

3) FE-модель – модель с фиксированными эффектами на основе отклонений от средних по времени вида (1), которая используется для моделирования постоянных индивидуальных различий объектов при наличии между ними сильных взаимосвязей;

4) RE-модель – модель со случайными эффектами вида (1), которая используется для моделирования случайных индивидуальных различий объектов при наличии между ними сильных взаимосвязей.

Статистические характеристики построенных моделей приведены в табл. 1.

Таблица 1. Статистические характеристики регрессионных уравнений различных моделей панельных данных

Модель	R^2	Остаточная сумма квадратов (RSS)
OR-модель	0,242	1,365
UR-модель	$R_{\max}^2 = 0,936, R_{\min}^2 = 0,015$	0,284
FE-модель	0,0006	5,848
RE-модель	0,1133	1,291

Для построенных моделей на уровне значимости 0,05 мы проверяли следующие основные гипотезы:

1) об отсутствии фиксированных индивидуальных различий, т.е. OR-модель предпочтительнее FE-модели (тест Вальда о незначимости индивидуальных коэффициентов в модели с фиксированными эффектами);

2) об отсутствии взаимосвязи между регионами, т.е. UR-модель предпочтительнее FE-модели (тест Вальда о незначимости коэффициентов при регрессорах в модели с фиксированными эффектами);

3) об отсутствии взаимосвязи между регионами, т.е. UR-модель предпочтительнее RE-модели (тест Вальда о незначимости коэффициентов при регрессорах в модели со случайными эффектами);

4) об отсутствии случайных индивидуальных различий, т.е. OR-модель предпочтительнее RE-модели (тест множителей Лагранжа Бреуша – Пагана);

5) о преимуществе случайных индивидуальных различий перед фиксированными, т.е. RE-модель предпочтительнее FE-модели (тест Хаусмана, (тест Хаусмана, мы использовали оценку в виде вспомогательного уравнения $Y(\lambda) = X(\lambda)\alpha + Z_W\gamma + \varepsilon$, матрица $X(\lambda)$ построена по скорректированным

данным RE-модели, $\lambda = 1 - \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_v^2}{\tilde{\sigma}_v^2 + T\tilde{\sigma}_u^2}}$, $\tilde{\sigma}_v^2$ – оценка остаточной дисперсии

модели, $\tilde{\sigma}_u^2$ оценка дисперсии случайных эффектов, матрица Z_W построена по скорректированным данным FE-модели, нулевая гипотеза $\gamma = 0$).

Результаты проверки всех гипотез представлены в табл. 2.

На основании табл. 2 можно сделать следующие заключения:

1) сравнение модели с фиксированными эффектами с моделью общей регрессии показало, что на уровне значимости 0,05 индивидуальные различия регионов не значимы, то есть модель общей регрессии оказалась предпочтительнее модели с фиксированными эффектами;

2) сравнение модели с фиксированными эффектами с моделью несвязанных регрессий показало, что на уровне значимости 0,05 коэффициенты при факторах не значимы, то есть регионы не могут быть объединены в модель с фиксированными эффектами;

3) сравнение модели со случайными эффектами с моделью несвязанных регрессий показало, что на уровне значимости 0,05 коэффициенты при факторах не значимы, то есть регионы не могут быть объединены в модель со случайными эффектами;

4) сравнение модели со случайными эффектами с моделью общей регрессии показало, что на уровне значимости 0,05 модель со случайными эффектами оказалась предпочтительнее модели общей регрессии;

4) сравнение модели со случайными эффектами с моделью с фиксированными эффектами показало, что на выбранном уровне значимости модель с фиксированными эффектами предпочтительнее модели со случайными эффектами.

Таблица 2. Результаты проверки статистических гипотез о выборе наилучшей модели

Тест	Значение		Вывод о принятии нулевой гипотезы
	Наблюдаемое	Критическое	
1) Вальда	-221,28	2,62	принята
2) Вальда	-249,61	2,62	принята
3) Вальда	-204,62	2,62	принята
4) Множителей Лагранжа Бреуша–Пагана	679,52	3,84	отклонена
5) Хаусмана	$P_{\gamma 1} = 4,99 \cdot 10^{-19}$, $P_{\gamma 2} = 1,17 \cdot 10^{-19}$, $P_{\gamma 3} = 1,17 \cdot 10^{-37}$	0,05	отклонена

Выводы. Из заключений 1)–5) следует, что на уровне значимости 0,05 предпочтительна UR-модель (модель несвязных регрессий). Другими словами, с вероятностью 0,95 рынок труда регионов Российской Федерации развивается самостоятельно, в зависимости от своих индивидуальных различий. Процессы, происходящие в одном субъекте, не влияют на развитие других субъектов.

Результаты данного исследования согласуются с результатами исследований [1–3] и подтверждают проблему дифференциации регионов по уровню развития трудовой привлекательности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вакуленко Е.С. Миграционные процессы в городах России: эконометрический анализ // Прикладная эконометрика. 2012. № 1 (25). С. 25–50.
2. Вакуленко Е.С. Ведёт ли миграция населения к межрегиональной конвергенции в России? // Вестник НГУЭУ. 2013. № 4. С. 239–264.
3. Мокренский Д.Н. Роль экономических факторов в миграционном движении населения муниципалитетов ЦФО [Электронный ресурс] // Государственное управление. Электронный вестник (электрон. журн.). 2018. № 69. С. 619–537. URL: http://e-journal.spa.msu.ru/uploads/vestnik/2018/vipusk_69_avgust_2018_g./regionalnaja_ekonomika/mokrensky.pdf (дата обращения: 01.08.2019).

4. Регионы России. Социально-экономические показатели: статистический сборник. 2010–2018 гг. [Электронный ресурс] URL: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1138623506156 (дата обращения: 4.09.2019).
5. *Щукина И.П.* Анализ динамики показателей рынка труда Российской Федерации // Современные технологии в науке и образовании: сб. тр. II междунар. науч.-техн. форума: в 10 т. / под общ. ред. О.В. Миловзорова. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2019. Т.5. С. 42–45.
6. *Щукина И.П.* Исследование трудовой привлекательности субъектов Российской Федерации методами анализа панельных данных [Электронный ресурс] // Материалы Междунар. молодёжного науч. форума «ЛЮМОНОСОБ-2019» / отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов. М.: МАКС Пресс, 2019. 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM).
7. *Лискина Е.Ю.* Исследование динамики факторов, влияющих на трудовую привлекательность регионов России / Е.Ю. Лискина, И.П. Щукина // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками: материалы VIII Междунар. молодежной науч.-практ. конф. Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2019. С. 68–72.

УДК 517.95:556.53

В. А. Наумов

Калининградский государственный технический университет
Россия, г. Калининград, *e-mail: van-old@mail.ru*

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ЕЖЕДНЕВНЫХ УРОВНЕЙ ВОДЫ В РЕКЕ ПРЕГОЛЕ

Определены характеристики ежедневных уровней воды реки Преголи как случайного процесса. Были использованы результаты наблюдений последних 17 лет. Рассчитаны коэффициенты парной корреляции между реализациями разных лет. Вид автокорреляционной функции сильно зависит от времени начала наблюдения. Найдена автокорреляционная функция, осредненная по дате начала наблюдений.

Ключевые слова: река Преголя, уровень воды, случайный процесс, коэффициенты парной корреляции, автокорреляционная функция.

V. A. Naumov

Kaliningrad State Technical University
Russia, Kaliningrad, *e-mail: van-old@mail.ru*

CORRELATION FUNCTION OF DAILY WATER LEVELS IN THE PREGEL RIVER

Daily water levels characteristics of the Pregel river, as a random process, have been identified. The results of observations of the last 17 years have been used. Pair correlation coefficients between realizations of different years were calculated. The type of autocorrelation function strongly depends on the start time of the observation. The autocorrelation function averaged by the observation start date was found.

Keywords: *Pregel river, water level, random process, pair correlation coefficients, autocorrelation function.*

Введение

Изменения уровня воды в реках играют огромную роль в хозяйственной деятельности. Их учет важен для сельского хозяйства, гидроэнергетики, судоходства, коммунального хозяйства и других отраслей. Анализ результатов ежедневных наблюдений за уровнем воды в реках является одним из важнейших инструментов инженерной гидрологии. Изменение уровня воды в реке $H(t)$ является случайным процессом с непрерывными состояниями и непрерывным временем t . Вводя шаг дискретности по времени (сутки), мы заменяем процесс с непрерывным временем на процесс с дискретным временем. При этом случайный процесс остается непрерывным по состояниям. Разработке методов анализа и моделированию случайных процессов изменения уровня воды в реках посвящено большое количество публикаций (см. [1-4] и библиографию в них).

Описание процесса изменения уровня реки [1] в целях оценки возможности наступления стихийных бедствий включает: поток наводнений (выбросов случайного процесса), рассматриваемых как случайные события; условное распределение наводнений по амплитуде выбросов (максимальных подъемов уровня воды). Динамика изменения уровня реки в некотором створе пункте рассмотрена как реализация *эргодического* случайного процесса.

В статье [2] выполнен анализ двух математических моделей прогнозирования уровня воды в реках горного типа. Первая модель описывает изменения уровня воды в русле горной реки с помощью уравнения линейной регрессии; другая – создана на основе нейронной сети. Авторы [2] утверждают, что оба метода дают адекватный результат. Но регрессионная модель показывает большую стандартную ошибку.

В [3] был продемонстрирован способ применения цепей Маркова к прогнозированию уровня воды в горной реке. Полученный результат прогноза хорошо согласуется с данными наблюдений. Метод позволяет прогнозировать состояние системы (уровня воды в горной реке) в будущий момент. Но такой прогноз дает лишь вероятность перехода из одной категории значений в другую, а не конкретное значение. Метод не позволяет оценить величину опасности паводковой ситуации.

В [4] была предпринята попытка разработать комплекс регрессионных моделей, характеризующих не только динамику среднесуточных

уровней воды в реке, но и другие гидрологические и гидрометрические показатели. Представляется интересным и перспективным предложение получить для каждой фазы водного режима реки свое уравнение регрессии, вид которого будет оставаться постоянным, а пересчитываться для конкретного года должны только эмпирические параметры. Однако реализацию данного предложения в [4] нельзя признать удовлетворительной. Были использованы результаты измерения уровней воды реки Угрюмой (пост в селе Горное) только за один 1975 год. Произвольно, без всякого обоснования, конец фазы половодья в 1975 году задан 6 июля, что совершенно не соответствует данным наблюдений на рис. 1. Для фазы половодья была получена регрессионная зависимость уровня воды в реке от времени в сутках t (принято $t = 0$ в день начала половодья – 24.03.1975):

$$H = 87,710 + 11,2879 \cdot t^{2,0152} \cdot \exp(-0,07465 \cdot t^{1,1689}) - 0,01046 \cdot t^{5,6012} \cdot \exp(-0,4230 \cdot t) \cdot \cos(t \cdot \pi / 3,1654 + 0,918). \quad (1)$$

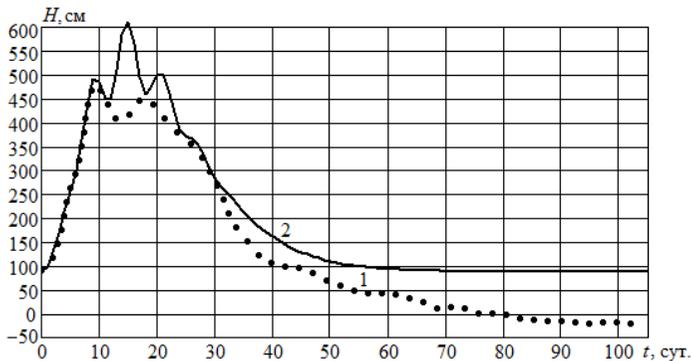


Рис. 1. Уровни воды реки Угрюмой (село Горное) с начала весеннего половодья 1975 года:
1 – по данным наблюдений; 2 – расчет по (1)

По рис. 1 видно, что результаты расчета по формуле (1) плохо согласуются с данными наблюдений во время пика половодья; ее нельзя применять во время летней межени. Возможно, в выражении (1) имеются опечатки. Кроме того, остался открытым вопрос о применимости полученных в [4] регрессионных моделей для уровней воды других лет.

Исследование отдельных вопросов внутригодовой динамики гидрологических характеристик реки Преголи представлено в опубликованных работах [5–7]. Применимость различных статистических моделей для описания внутригодовой динамики во многом связана с поведением автокорреляционной функции [8]. Так случайный процесс относят к стационарному в широком смысле, если его математическое ожидание постоянно, а ав-

токорреляционная функция $R(\tau)$ зависит только от промежутка времени между наблюдениями τ . Использование модели марковской цепи с дискретным временем возможно лишь при выполнении условия

$$\tau > 1 \Rightarrow R(\tau) \approx 0. \quad (2)$$

В перечисленных выше публикациях автокорреляционная функция не определялась. Цель данной статьи – показать особенности автокорреляционной функции ежедневных уровней воды Преголи.

Исходные данные

В Информационной системе по водным ресурсам и водному хозяйству бассейнов рек России (ИС ВХР) [9] с 2001 года накапливаются ежедневно обновляемые графики хода уровня и другие параметры более десятисот гидропостов.

Достоинствами ИС ВХР являются оперативный характер информации (появляется на следующий день) и удобная форма для последующей компьютерной обработки. Недостатки можно видеть на многих страницах ИС ВХР: при отсутствии данных автоматически подбирается интервал по последним наблюдениям; используются оперативные данные Росгидромета, не прошедшие контрольную обработку; могут содержаться ошибки. Первое говорит о том, что данные ИС ВХР за отдельные годы могут быть неполными. Например, в оперативных данных Росгидромета о ежедневных уровнях воды реки Преголи в створе города Гвардейска отсутствует информация более чем за половину 2001 года.

Ошибки встречаются в виде погрешности и отдельных промахов. Промехи выявляются на графике, так как заметно отличаются от предыдущего и последующего значений, их можно исправить без труда. Пример исправления такого промаха ИС ВХР приведен на рис. 2.

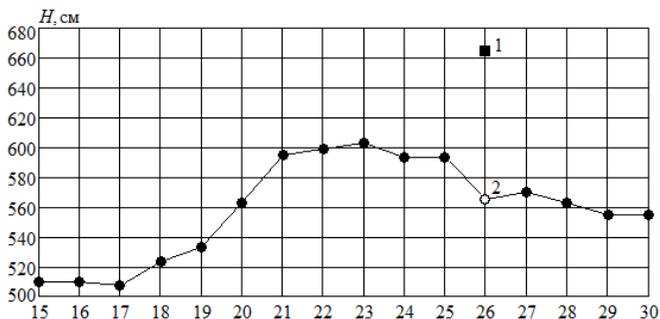


Рис. 2. Уровни воды реки Преголи (Гвардейск) в ноябре 2003 года по данным [9]:

1 – промах измерений, 2 – корректировка

Для оценки погрешностей данных ИС ВХР воспользуемся ресурсами Автоматизированной информационной системы государственного мониторинга водных объектов (АИС ГМВО) [10]. Гидрологическая информация в АИС ГМВО накапливается с 2008 года. Данные размещаются после всесторонней проверки и корректировки через 2 года после наблюдений, на сегодня имеются за 2008-2017 годы. В соответствии с утверждением Росгидромета считаем эти данные достоверными. Рассчитанная по ним погрешность данных ИС ВХР (после исправления промахов) не превышает 7%. Что позволило в данной статье использовать массив ежедневных уровней реки Преголи в створе города Гвардейска за 2002-2018 годы. Примеры приведены на рис. 3. Ниже будет показано, что реализация 2008 года является наиболее типичной, а две другие – самыми нетипичными.

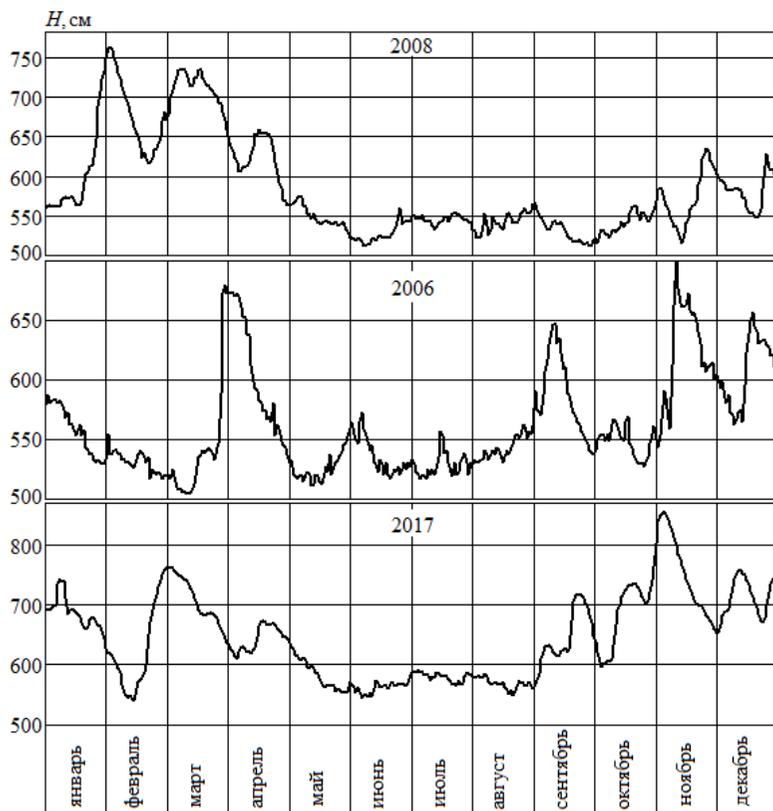


Рис. 3. Уровни воды реки Преголи (Гвардейск) по данным [9, 10]

Характеристики случайного процесса $H(t)$

Как известно, математическим ожиданием случайного процесса $H(t)$ является неслучайная функция $M\{H(t)\}$, которая при любом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса. Аналогично определяется дисперсия случайного процесса. Найдем точечные оценки указанных параметров для каждого сечения случайного процесса t_i по формулам:

$$\overline{H(t_i)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n H_j(t_i), \quad \overline{\sigma(t_i)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (H_j(t_i) - \overline{H(t_i)})^2}, \quad (2)$$

где i – порядковый номер дня в году; j – номер реализации случайного процесса; $n = 17$ – количество реализаций случайного процесса.

Рассчитанные по формулам (2) оценки приведены на рис. 4 вместе с полосой существования реализаций случайного процесса.

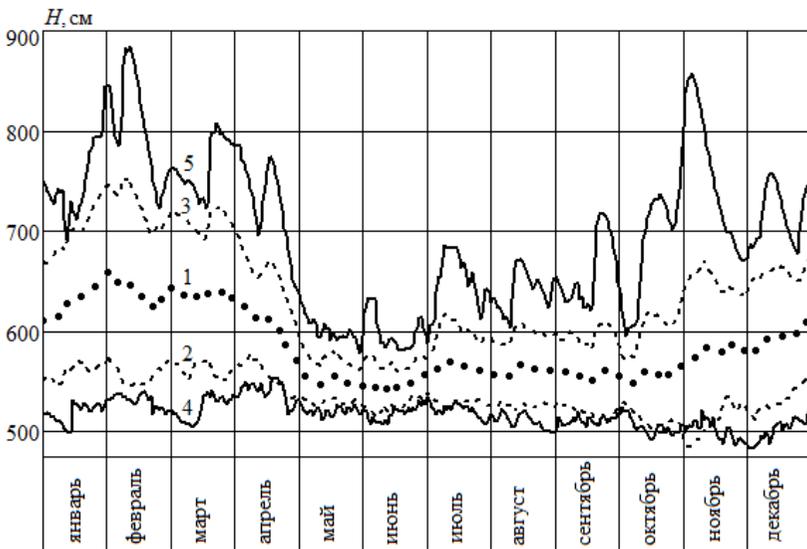


Рис. 4. Характеристики случайного процесса – уровни воды реки Преголи (Гвардейск, 2002-2018):

- 1 – оценка математического ожидания; 2 – $\overline{H(t_i) - \sigma(t_i)}$; 3 – $\overline{H(t_i) + \sigma(t_i)}$;
- 4 – наименьшие значения; 5 – наибольшие значения

В инженерной гидрологии принято выделять годы по водности реки. Воспользуемся методом, предложенным в [11] для оценки типичности

(сходства) отдельных реализаций случайного процесса. Рассчитаем коэффициенты парной корреляции между реализациями разных лет:

$$r_{j,k} := \frac{\sum_{i=1}^N \left[(H_j(t_i) - \bar{H}_j) \cdot (H_k(t_i) - \bar{H}_k) \right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (H_j(t_i) - \bar{H}_j)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N (H_k(t_i) - \bar{H}_k)^2}}, \quad (3)$$

где N – количество дней в году, H_j – среднегодовые значения уровня.

Большие величины коэффициентов парной корреляции в табл. 1 говорят о подобию реализации случайного процесса в соответствующие годы. Наибольшие значения $r_{1,7} = 0,835$ (2002 и 2008 годы); $r_{1,10} = 0,815$ (2002 и 2011 годы); $r_{1,6} = 0,774$ (2001 и 2007 годы); $r_{5,13} = 0,752$ (2005 и 2014 годы). Значения $r_{j,k}$, близкие к нулю говорят о существенном отличии формы реализаций за исследуемые годы, в частности, $r_{9,14} = -0,012$ (2010 и 2015 годы); $r_{6,9} = 0,015$ (2007 и 2010 годы) и т.д.

Таблица 1. Матрица коэффициентов парной корреляции годовых реализаций ежедневных уровней реки Преголи

Годы	1	2	3	4	5	...	15	16	17
	2002	2003	2004	2005	2006	...	2016	2017	2018
2002	1	0,312	0,466	0,471	-0,29	...	0,198	0,123	0,740
2003	0,312	1	0,317	0,137	0,170	...	0,344	0,094	0,357
2004	0,466	0,317	1	0,368	0,193	...	0,492	0,119	0,314
2005	0,471	0,137	0,368	1	0,098	...	-0,20	-0,07	0,596
2006	-0,29	0,170	0,193	0,098	1	...	0,268	0,313	-0,13
2007	0,774	0,360	0,535	0,362	-0,16	...	0,292	0,111	0,638
2008	0,835	0,434	0,516	0,553	-0,08	...	0,283	0,254	0,581
2009	0,466	0,214	0,449	0,544	0,042	...	0,047	0,159	0,250
2010	0,105	-0,22	0,205	0,409	0,193	...	-0,01	0,128	-0,11
2011	0,815	0,453	0,531	0,515	-0,25	...	0,152	-0,12	0,733
2012	0,215	-0,04	0,095	0,215	0,122	...	0,262	0,573	0,117
2013	0,434	0,423	0,431	0,261	0,104	...	0,320	0,272	0,593
2014	0,669	0,281	0,382	0,752	-0,04	...	-0,08	0,051	0,718
2015	0,367	0,312	0,345	0,517	0,248	...	0,076	0,066	0,543
2016	0,198	0,344	0,492	-0,20	0,268	...	1	0,379	-0,06
2017	0,123	0,094	0,119	-0,07	0,313	...	0,379	1	0,063
2018	0,740	0,357	0,314	0,596	-0,13	...	-0,06	0,063	1
r_{cp}	0,453	0,291	0,397	0,384	0,106	...	0,221	0,206	0,409

По последней строке табл. 1 (средние коэффициенты парной корреляции) можно сказать, что самая оригинальная реализация, отличная от

остальных, была зафиксирован в 2006 ($r_{cp} = 0,106$). Самыми типичными являются реализации 2002 ($r_{cp} = 0,453$) и 2008 ($r_{cp} = 0,496$) года.

Автокорреляционная функция случайного процесса $H(t)$

Сначала найдем автокорреляционную функцию $R(t;t+\tau)$, осредненную по времени начала наблюдения t . Для расчета потребуются вспомогательные средние значения:

$$Ho_l := \frac{1}{L-l} \cdot \sum_{i=l+1}^L H_i ; \quad Ha_l := \frac{1}{L-l} \cdot \sum_{i=1}^{L-l} H_i . \tag{4}$$

где $L = 6209$ – объем выборки за 17 лет, l – количество дней между двумя наблюдениями (соответствует τ).

Оценку такой функции по данным наблюдений, можно рассчитать, используя модификацию формулы, приведенной в [12]:

$$R(l) := \frac{\sum_{i=l+1}^L [(H_i - Ho_l) \cdot (H_{i-l} - Ha_l)]}{\sqrt{\sum_{i=l+1}^L [(H_i - Ho_l)^2]} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{L-l} [(H_i - Ha_l)^2]}} , \tag{5}$$

По рис. 5 видно, что статистически значимый уровень 0,7 автокорреляционной функции сохраняется более 10 дней, $R(12) = 0,692$. Далее значение $R(\tau)$ падает довольно медленно. Следовательно, применение модели цепи Маркова для уровней воды реки Преголи невозможно.

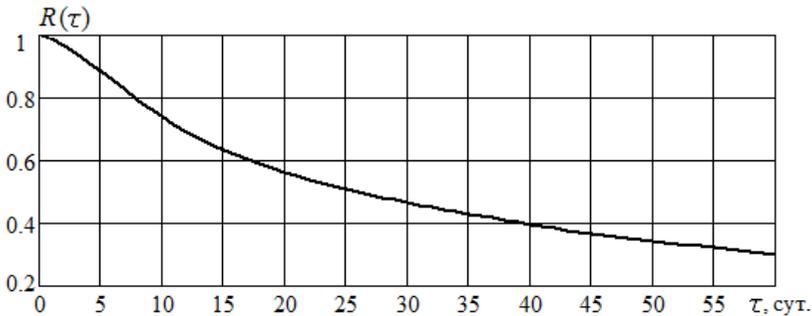


Рис. 5. Автокорреляционная функция, осредненная по t

На рис. 6-7 показано несколько примеров расчета корреляционных функций случайного процесса при разном времени начала наблюдений.

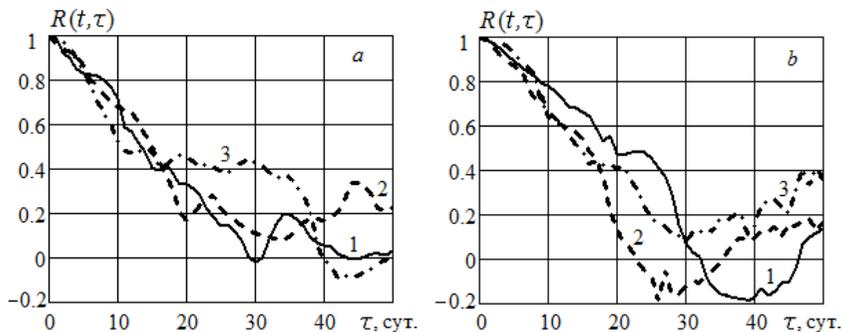


Рис. 6. Автокорреляционная функция с временем начала наблюдений t : a – в январе, b – в марте; 1 – 1-е число месяца, 2 – 11-е, 3 – 21-е

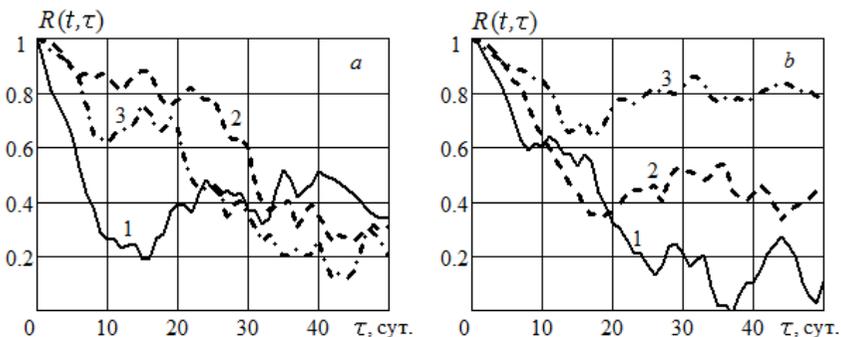


Рис. 7. Автокорреляционная функция с временем начала наблюдений t : a – в июле, b – в сентябре; 1 – 1-е число месяца; 2 – 11-е; 3 – 21-е

По рис. 6-7 видно, что автокорреляционной функции сильно зависит от времени начала наблюдения. Их немонотонное поведение обусловлено сравнительно небольшим количеством имеющихся реализаций случайного процесса ($n = 17$). Тогда как на рис. 5 график получился плавным, так как при его расчете можно было использовать весь массив данных L .

Закключение

Определены характеристики ежедневных уровней воды реки Преголи как случайного процесса. Использованы результаты наблюдений последних 17 лет. Рассчитаны коэффициенты парной корреляции между реализациями разных лет. Установлено, что реализация 2008 года является наиболее типичной. Вид автокорреляционной функции сильно зависит от времени начала наблюдения. Найдена автокорреляционная функция, осредненная по дате начала наблюдений. Ее статистически значимый уро-

вень сохраняется более 10 дней, что не позволяет использовать модель цепи Маркова для моделирования уровней воды реки Преголи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радаев Н.Н. Оценка повторяемости катастрофических наводнений на основе статистического анализа динамики уровней рек // Метеорология и гидрология. 2002. № 3. С. 79-89.
2. Семенчин Е.А. Сравнительный анализ методов математического моделирования уровня воды в реке горного типа (на примере реки Мзымта) / Е.А. Семенчин, Н.Г. Титов, М.В. Кузякина, К.А. Лебедев // Фундаментальные исследования. 2014. № 12. С. 952-957.
3. Титов Н.Г. Построение теоретической модели прогнозирования уровня воды в реке горного типа с применением цепей Маркова [Электронный ресурс] / Н.Г. Титов, М.В. Кузякина, К.А. Лебедев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2015. № 114(10). URL: <http://ej.kubagro.ru/2015/10/pdf/110.pdf>.
4. Мазуркин П.М. Метод поэтапного анализа динамики уровня реки // Современные наукоемкие технологии. 2010. № 7. С. 32-41.
5. Наумов В.А. Анализ изменений уровней и расходов реки Преголи в 2011 году / В.А. Наумов, Л.В. Маркова // Состояние и перспективы развития водохозяйственного комплекса региона: сб. науч. тр. Калининград: Изд-во КГТУ, 2012. С. 75-81.
6. Наумов В.А. Инженерные изыскания в бассейне реки Преголи: монография / В.А. Наумов, Н.Р. Ахмедова. Калининград: Изд-во КГТУ, 2017. 183 с.
7. Бредихин М.П. Анализ изменения уровней воды реки Преголи в 2018 году [Электронный ресурс] / М.П. Бредихин, В.А. Наумов, В.М. Ходоркова // Вестник молодежной науки: электрон. журн. 2019. № 1(18). С. 12. URL: <http://vestnikmolnauki.ru/wp-content/uploads/2019/03/Bredihin-118.pdf>.
8. Сикан А.В. Методы статистической обработки гидрометеорологической информации: учеб. пособие. СПб.: Изд-во РГГМУ, 2007. 279 с.
9. Автоматизированная информационная система государственного мониторинга водных объектов [Электронный ресурс]. Режим доступа – по паролю. URL: <https://gmvo.skniivh.ru/> (дата обращения: 20.09.2019).
10. Информационная система по водным ресурсам и водному хозяйству бассейнов рек России [Электронный ресурс]. Режим доступа – по паролю. URL: <http://gis.vodinfo.ru/> (дата обращения: 20.09.2019).
11. Наумов В.А. Статистический анализ среднесуточных расходов воды реки Преголи (2006-2015) [Электронный ресурс] // Вестник науки и образования Северо-Запада России: электрон. журн. 2017. Т. 3, № 2. С. 17-27. URL: <http://vestniknauki.ru/wp-content/uploads/2017/05/2017-N2-Naumov.pdf>.
12. Свод правил СП 33-101-2003. Определение основных расчетных гидрологических характеристик. Одобрен для применения в качестве нормативного документа постановлением Госстроя России № 218 от 26 декабря 2003 г.

УДК 532.522.2+621.396.67

А. А. Очиров, Т. К. Артемова, С. В. Ходырев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Россия, г. Ярославль, e-mail: otchirov@mail.ru,
artemova@uniyar.ac.ru, sv-khodyrev@mail.ru

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ, ИМЕЮЩЕЙ В СОСТАВЕ ЖИДКОЕ ВЕЩЕСТВО

Проведено моделирование антенны, имеющей в составе жидкую цилиндрическую струю, свободно вытекающую вниз из гладкого отверстия. Аналитически асимптотически была получена форма поверхности цилиндрической струи жидкости. Численно была промоделирована форма и проведено сравнение параметров антенн, построенных с учетом слагаемых первого и второго порядков малости по амплитуде волнового возмущения свободной поверхности цилиндрической струи жидкости, входящей в состав антенного элемента.

Ключевые слова: антенна, цилиндрическая струя жидкости, капиллярный распад, характеристики антенны.

A. A. Ochirov, T. K. Artyomova, S. V. Khodyrev

P.G. Demidov Yaroslavl State University
Russia, Yaroslavl, e-mail: otchirov@mail.ru,
artemova@uniyar.ac.ru, sv-khodyrev@mail.ru

ON MATHEMATICAL MODELING OF A CYLINDRICAL ANTENNA BASED ON A LIQUID MATERIAL

The antenna based on a liquid cylindrical jet freely flowing down from a smooth hole was simulated. The surface shape of a cylindrical liquid jet was analytically asymptotically obtained. Antenna parameters were numerically modeled. The parameters of antennas constructed taking into account terms of the first and second smallness orders of the liquid jet's free surface amplitude wave perturbation that is part of the antenna element are compared.

Keywords: antenna, cylindrical liquid jet, capillary decay, antenna characteristics.

Введение. Современные исследования показывают принципиальную возможность создания антенных элементов с приемлемыми характеристиками, в качестве основного компонента в которых используется столб жидкости [1–4]. Однако большая часть работ посвящена изучению

характеристик антенн, имеющих в составе столб жидкости, ограниченный твердой оболочкой; при этом при моделировании и создании антенн не учитываются известные гидродинамические эффекты, такие как, например, капиллярный распад цилиндрической струи жидкости [5]. В работе [4] предложена математическая модель антенны, в составе которой имеется цилиндрическая струя жидкости со свободной поверхностью, и показано, что такая антенна обладает характеристиками, достаточными для использования в системах LPD/PMR связи. Предложенная в [4] антенна состоит из металлического рефлектора в форме диска, в центре которого проделано круглое отверстие, через которое вытекает струя жидкости. Питание подводилось между токонесущим коротким металлическим штырем, расположенным вдоль оси струи жидкости, и рефлектором. Настоящее исследование посвящено сравнению характеристик такой антенны с учетом возмущения свободной поверхности жидкой компоненты антенны с точностью до линейных и до квадратичных слагаемых по амплитуде волнового возмущения.

Математическая формулировка задачи. Рассмотрим цилиндрическую струю радиуса R в составе антенны в модели, предложенной в [4]. Жидкость будем считать идеальной несжимаемой с плотностью ρ и движущейся со скоростью U_0 в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Капиллярные силы на свободной поверхности струи характеризуются коэффициентом поверхностного натяжения γ . Будем считать, что поверхность струи возмущена волновым движением малой амплитуды $\zeta = R$, а отклонение формы свободной поверхности от равновесного положения определяется функцией $\xi = \xi(\varphi, z, t)$. В системе отсчета, в которой струя будет в среднем покоящейся, математическая формулировка задачи по определению гидродинамического потенциала $\psi = \psi(r, \varphi, z, t)$ и формы свободной поверхности жидкости определяется выражениями:

$$0 < r < R + \xi; \quad \Delta\psi = 0; \quad (1)$$

$$r = R + \xi: -\partial_t \xi + \partial_r \psi - \partial_r \psi \partial_r \xi - \frac{1}{r^2} \partial_\varphi \psi \partial_\varphi \xi - \partial_z \psi \partial_z \xi = 0; \quad (2)$$

$$p - p_{atm} - \gamma(\nabla \cdot \mathbf{n}) = 0; \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \partial_\varphi \xi - \mathbf{e}_z \partial_z \xi}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2} (\partial_\varphi \xi)^2 + (\partial_z \xi)^2}}. \quad (3)$$

Здесь p – гидродинамическое давление, p_{atm} – константа, играющая роль атмосферного давления, а \mathbf{n} – вектор внешней нормали к поверхности жидкости.

Задача (1) – (3) решалась методом разложения по малому параметру $\eta = \zeta k$, пропорциональному амплитуде волны ζ и волновому числу k . Разложение искомых величин с точностью до слагаемых второго порядка малости по амплитуде волнового движения строится следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \psi \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} + \eta^2 \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + O(\eta^3), \quad (4)$$

где $O(\eta^2)$ – символ Ландау, определяющий порядок малости остаточных членов. Подставляя разбиеие (4) в задачу (1) – (3) и производя снос граничных условий на равновесную поверхность $r = R$, разбиваем задачу на порядки малости.

В линейном приближении по амплитуде волны математическая формулировка задачи запишется в виде:

$$r < R: \Delta \psi_1 = 0, \quad (5)$$

$$r = R: -\partial_t \xi_1 + \partial_r \psi_1 = 0, \quad (6)$$

$$-\partial_t \psi_1 + \frac{1}{r^2} \xi_1 + \frac{1}{r} \partial_{\varphi\varphi} \xi_1 + \partial_{zz} \xi_1 = 0. \quad (7)$$

Математическая формулировка задачи второго порядка малости определяется выражениями:

$$r < R: \Delta \psi_2 = 0, \quad (8)$$

$$r = R: -\partial_t \xi_2 + \partial_r \psi_2 = -\xi_1 \partial_{rr} \psi_1 + \partial_r \psi_1 \partial_r \xi_1 + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} \psi_1 \partial_{\varphi\varphi} \xi_1 + \partial_z \psi_1 \partial_z \xi_1, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} -\partial_t \psi_2 + \frac{1}{r^2} \xi_2 + \frac{1}{r} \partial_{\varphi\varphi} \xi_2 + \partial_{zz} \xi_2 &= \xi_1 \partial_{rr} \psi_1 + \frac{1}{2} (\partial_r \psi_1)^2 + \frac{1}{2r^2} (\partial_{\varphi\varphi} \psi_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} (\partial_z \psi_1)^2 + \frac{1}{2r} (\partial_z \xi_1)^2 - \frac{1}{2r^3} (\partial_{\varphi\varphi} \xi_1)^2 - \frac{1}{r^2} \xi_1 \partial_{\varphi\varphi} \xi_1 + \xi_1 \partial_{zrz} \xi_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение. Последовательное решение задачи (5) – (7) и затем (8) – (10) позволит получить форму свободной поверхности жидкости с точностью до слагаемых второго порядка малости.

При решении задачи первого порядка малости было получено дисперсионное уравнение, связывающее круговую частоту волнового движе-

ния вдоль поверхности жидкости с волновым числом и другими параметрами задачи. В безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$, дисперсионное уравнение выглядит следующим образом:

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{(-1 + R(m^2 + k^2 R))(kRI_{m-1}(kR) - mI_m(kR))}{R^3 I_m(kR)}}. \quad (11)$$

Здесь $I_m(kR)$ – модифицированная функция Бесселя. Анализ дисперсионного уравнения показывает, что для азимутального числа $m \geq 1$ выражение для круговой частоты (11) принимает только действительные значения и волновое движение является устойчивым. В случае, когда азимутальное число принимает значение $m = 0$, можно найти такое волновое число k , чтобы мнимая часть выражения (11) была меньше нуля, что соответствует экспоненциальному нарастанию амплитуды поверхностных волн, которые в свою очередь со временем приведут струю к распаду и дроблению на капли. Анализ выражения (11) для азимутального числа $m = 0$ показывает, что в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$, неустойчивыми являются волны с волновым числом $k < 1$. Волна с наибольшим инкрементом нарастания определяется из условия минимума для выражения (11). Таким образом, мы получаем, что наиболее неустойчивыми являются волны с волновым числом $k = 0.7$.

Было получено аналитическое асимптотическое выражение для отклонения свободной поверхности от равновесного значения и проанализировано влияние слагаемых второго порядка малости на характеристики антенного элемента, имеющего в составе цилиндрическую струю жидкости.

Сравнение параметров антенных элементов. Было проведено численное моделирование антенны, основным материалом которой является цилиндрическая струя жидкости с учетом слагаемых первого и второго порядка малости по амплитуде волнового возмущения свободной поверхности жидкости. Результаты расчета характеристик антенн представлены в табл. 1.

Анализ результатов моделирования показывает незначительное расхождение ключевых параметров антенны, учитывающей возмущение свободной поверхности жидкой составляющей с точностью до слагаемых 1-го порядка малости по амплитуде волнового возмущения от антенны, учитывающей возмущение свободной поверхности с точностью до слагаемых второго порядка малости.

Таблица 1. Сравнение параметров антенн, учитывающих возмущение свободной поверхности жидкой компоненты с точностью до слагаемых первого и второго порядков малости

Параметр антенны	Антенна, учитывающая возмущение свободной поверхности с точностью до слагаемых 1-го порядка малости	Антенна, учитывающая возмущение свободной поверхности с точностью до слагаемых 2-го порядка малости
Ширина ДН в вертикальной плоскости на частоте 446 МГц, град	80,80	80,80
Ширина ДН в вертикальной плоскости на частоте 2,1 ГГц, град	23,10	23,10
Коэффициент отражения от входа антенны S11, дБ на 446 МГц	-10,57	-10,57
Коэффициент отражения от входа антенны S11, дБ на 2,1 ГГц	-2,85	-2,83
Активное входное сопротивление на частоте 446 МГц, Ом	32,82	32,70
Активное входное сопротивление на частоте 2,1 ГГц, Ом	8,20	8,21
Реактивное входное сопротивление на частоте 446 МГц, Ом	-18,06	-18,05
Реактивное входное сопротивление на частоте 2,1 ГГц, Ом	-5,95	-5,99
Полный КПД антенны на частоте 446 МГц, дБ	-7,55	-7,64
Полный КПД антенны на частоте 2,1 ГГц, дБ	-10,00	-10,00

Заключение. В результате построения модели антенного элемента, имеющего в составе цилиндрическую струю жидкости было обнаружено, что для практических приложений в модели антенны, предложенной в [4], достаточно определять форму отклонения свободной поверхности от равновесного положения с точностью до линейных слагаемых. Это позволит прогнозировать и формировать алгоритмы управления свойствами антенны при практической реализации с использованием отверстий в экранах с точностью не хуже $0,01R$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. The Numerical Simulation of Electrical Characteristic for a New Material Antenna / Zhang J. [et al.] // *Advanced Materials Research*. 2013. Vol. 716. P. 586–589.
2. Research on the radiation characteristics for the seawater antenna / Zhang J. [et al.] // 2016 IEEE International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology (ICMMT). Beijing, China. 2016. Vol. 2. P. 826–828.
3. *Fayad H.* Broadband liquid antenna / H. Fayad, P. Record // *Electronics Letters*. 2006. Vol. 42, №. 3. P. 133–134.
4. *Очиров А.А.* Моделирование и анализ возможностей использования цилиндрической струи жидкости в качестве антенного элемента / А.А. Очиров, Т.К. Артёмова, С.В. Ходырев // *Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та*. 2019, № 5.
5. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИФМЛ, 1959. 699 с.

УДК 544.4

С. Н. Яблоков¹, М. Е. Соловьёв²

¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

²Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail: chemistry@iablokov.ru*

МОДЕЛИРОВАНИЕ БРОУНОВСКОЙ ДИНАМИКИ С ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИЕЙ

Разработан прототип программного комплекса, позволяющего производить моделирование химических реакций в сложных молекулярных системах через комбинированный подход, предполагающий оптимизацию вычислений путём использования адекватных методов для каждого пространственного масштаба.

Ключевые слова: кинетика, броуновская динамика, молекулярная динамика.

S. N. Iablokov¹, M. E. Solov'ev²

¹P.G. Demidov Yaroslavl State University

²Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, *e-mail: chemistry@iablokov.ru*

MODELLING OF BROWNIAN DYNAMICS WITH CHEMICAL REACTION

A software package prototype for modelling chemical reactions in complex molecular systems through the combined approach which optimizes calculations by choice of appropriate numerical method for each spatial scale was developed.

Keywords: kinetics, brownian dynamics, molecular dynamics.

Введение

Традиционные методы моделирования химических процессов нацелены на два крайних режима описания молекулярных систем. Первый, квантово-механический [1], предполагает детальный расчёт параметров химических процессов с участием небольшого числа молекул, как, например, в случае докинга лиганда в активный центр фермента или же предсказания реакционной способности молекул посредством анализа взаимодействия их граничных орбиталей. Второй, на основе классической механики [2, 3], заключается в использовании методов молекулярной динамики, что позволяет работать с существенными концентрациями реагентов и описывать их движение и столкновения.

В последние годы внимание всё больше уделяется комбинированному подходу [4, 5], при котором на каждом пространственном масштабе взаимодействие учитывается через наиболее адекватный как с физико-химической, так и с вычислительной точки зрения механизм. В рамках данной парадигмы в настоящей работе предлагается подход, позволяющий осуществлять статистическое моделирование атомно-молекулярного ансамбля с учетом возможного протекания в нем химических реакций. В данном приближении хаотичное движение молекул и их взаимную диффузию оказывается разумно моделировать с помощью вероятностных моделей на основе классической механики, т.е. посредством описания в терминах броуновской динамики. Электростатические взаимодействия на средних расстояниях, где ещё не велико перекрытие электронных оболочек, удачно описываются посредством силовых полей, что позволяет учесть с хорошей точностью эффекты притяжения и отталкивания молекул, а также их взаимную ориентацию. Наконец, редкие события столкновения, потенциально приводящие к химическим реакциям, т.е. перегруппировке атомов и перераспределению электронной плотности, следует рассматривать с использованием методов квантовой химии, например, посредством минимизации функционала электронной плотности.

Такой подход не только позволяет описывать взаимодействия между элементами молекулярной системы на разных пространственных масштабах, используя хорошо развитые и наглядные теоретические конструкции, адекватные данному масштабу, но и значительно экономит ресурсы. Кроме того, некоторые вычислительные этапы оказываются потенциально параллелизуемыми.

В данной работе рассматривается прототип программно-вычислительного комплекса, который позволяет производить моделирование кинетики сложных молекулярных систем через комбинированный вычислительный подход, описанный выше; обсуждаются параметры его работы и перспективы использования для моделирования реальных систем.

Описание программного комплекса

Программный комплекс состоит из основного вычислительного модуля, написанного на языке C++, а также модуля управления и обработки данных, написанного на языке Python. Начало моделирования осуществляется путём запуска модуля управления из командной строки, который, в свою очередь, создаёт несколько параллельных вычислительных потоков. Внутри каждого потока основной вычислительный модуль производит моделирование эволюции своей копии молекулярной системы с рандомизированными начальными положениями частиц.

Описание параметров моделируемой системы производится через конфигурационный файл, в котором задаются типы частиц, взаимодействия между типами частиц, возможные реакции между типами частиц, начальное число частиц каждого типа, а также геометрия реактора, параметры среды, размер временного шага и общее количество шагов.

Алгоритм моделирования проводит пошаговое обновление состояния системы, которое включает в себя: обновление энергий частиц при столкновениях с другими частицами и со средой; вероятностное осуществление реакции при превышении энергии активации; обновление положения частиц за счёт броуновской динамики и столкновений с другими частицами.

Так как реакции, протекающие за счёт столкновения с другими моделируемыми частицами, возможны только при нахождении пары частиц в непосредственной близости, то перебор всех возможных пар реагирующих частиц вычислительно нецелесообразен. Для этого в рамках рассматриваемого алгоритма весь реакционный объём дополнительно делится на ячейки и перебор кандидатов на осуществление реакции ведётся только по частицам из ближних ячеек, что значительно сокращает вычислительное время.

Моделирование пробной реакции

В качестве тестовой модели была выбрана реакция рекомбинации гидропероксильных радикалов:



Реакция (1) представляет собой образование водородно-связанного комплекса, энергия образования которого по данным квантово-химического расчета методом DFT B3LYP/6-311G** составляет -61,3 кДж/моль. Реакция (2) отвечает распаду данного комплекса с образованием гидропероксида водорода и кислорода. Изменение энергии в данной реакции по результатам квантово-химического расчета составило -91,4 кДж/моль.

Межмолекулярные взаимодействия реагентов аппроксимировались

посредством потенциала Леннарда-Джонса с параметрами, полученными из квантово-химического расчёта методом DFT B3LYP/6-311G** (табл. 1).

Таблица 1. Параметры потенциала Леннарда-Джонса

Реагенты	HO ₂ HO ₂	HO ₂ :HO ₂ HO ₂	HO ₂ :HO ₂ HO ₂ :HO ₂	HO ₂ :HO ₂ H ₂ O ₂	HO ₂ :HO ₂ O ₂
ε, эВ	0.63	0.21	0.3	0.24	0.18
σ, А	2.6	2.0	3.2	2.8	2.5

Вычисления производились на компьютере с 4-ядерным процессором IntelCorei5-7500 3.40 GHz. Одновременно запускались 4 вычислительных потока, в каждом из которых случайным образом генерировалась начальная конфигурация реагирующих частиц. Перед включением функции реагирования частиц производилась термическая релаксация системы, в ходе которой устанавливалось квазиравновесное распределение по скоростям частиц и диффузионное равновесие по объему вычислительной ячейки. На границах вычислительной ячейки задавались периодические граничные условия.

На рис. 1 в качестве примера приведены зависимости числа частиц реагентов и продуктов реакций в ячейке моделирования, от времени, измеряемого в условных единицах – шагах, для четырех параллельных процессов. Линейный размер реактора – 50 А, начальное число гидропероксильных радикалов – 1000 штук, длительность одного шага – 1 пс.

Как видно из приведенных данных, в принятом пространственно-временном масштабе моделирования реакция практически полностью заканчивается за 1000 шагов моделирования. При этом флуктуации в начальном распределении частиц мало влияют на ход реакции, которая протекает в соответствии с классической кинетической моделью последовательной реакции. Алгоритм правильно моделирует кинетику превращения гидропероксильных радикалов в пероксид водорода и кислород через промежуточный комплекс, что видно по характерному для радикальных процессов быстро образующемуся пику концентрации гидропероксильного комплекса со временем, который далее постепенно релаксирует.

Для изучения влияния размеров вычислительной ячейки (L) и числа начальных частиц (N) на время вычислений были проведены тестовые запуски с варьированием данных параметров. Вычислительный процесс останавливался во всех случаях за 1000 шагов. За это время реакция практически полностью заканчивалась, как это показано на рис. 1. Результаты вычислений приведены в табл. 2.

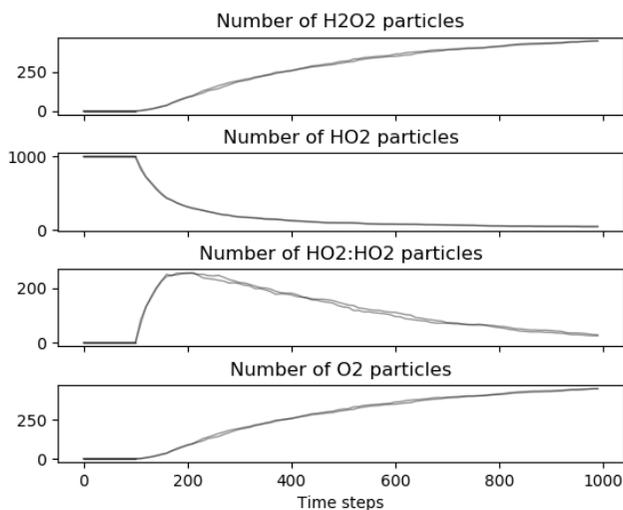


Рис. 1. Эволюция превращения гидропероксильных радикалов по результатам моделирования четырех параллельных вычислительных потоков

Таблица 2. Влияние размеров вычислительной ячейки и начального числа частиц на время вычислений (в секундах) за 1000 шагов моделирования

	N = 500	N = 1000	N = 1500	N = 2000	N = 2500
L = 20	77.0	291.6	620.1	1076	1662.9
L = 40	30.8	96.1	201.7	334.3	543.9
L = 60	18	46	89.2	145.3	216.8
L = 80	19.8	36.7	57.3	86.4	120.4

Приведенные данные свидетельствует об изменении характера роста вычислительной сложности как функции от числа частиц с квадратичного на квазилинейный при увеличении размера реактора. Это объясняется тем, что при малых размерах реактора доля достигаемых для взаимодействия частиц больше, чем при больших размерах.

Заключение

В настоящей работе предложен алгоритм моделирования кинетики сложной химической реакции путем численного решения уравнений броуновской динамики с учетом возможности химической реакции при столкновении частиц, которая описывалась в рамках модели Аррениуса. Создан прототип вычислительного комплекса, позволяющий осуществлять моделирование кинетики произвольной сложной химической реакции для

заданных размеров вычислительной ячейки, концентраций реагирующих веществ и параметров реакционной среды.

В качестве примера рассмотрена реакция рекомбинации гидропероксильных радикалов, протекающая через образование промежуточного водородно-связанного комплекса. Показано, что зависимости концентрации реагирующих веществ и продуктов реакции, вычисленные на основании статистического моделирования, соответствуют формальной кинетике последовательной реакции. В результате вычислительных экспериментов установлено, что при изменении масштаба вычислительной ячейки характер вычислительной сложности модели как функции числа частиц меняется с квадратичного на квазилинейный.

Результаты вычислительных экспериментов позволяют рассчитывать на успешное использование предложенного подхода для моделирования более сложных химических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *McDouall Joseph J W.* Computational Quantum Chemistry // The Royal Society of Chemistry, 2013.
2. *Akira Satoh.* Introduction to Practice of Molecular Simulation. Elsevier, 2011.
3. *Jong-In C.* Determination of Proper Time Step for Molecular Dynamics Simulation / Choe Jong-In, Kim Byungchul // Bull. Korean Chem. Soc. 2000, Vol. 21, no. 4. P. 419.
4. *Ben-Nun M.* Ab Initio Quantum Molecular Dynamics / M. Ben-Nun, T.J. Martinez // Advances in Chemical Physics Vol. 121 Wiley, 2002.
5. *Schlegel H.* Ab Initio Molecular Dynamics with Born-Oppenheimer and Extended Lagrangian Methods Using Atom Centered Basis Functions // Bull. Korean Chem. Soc. 2003, Vol. 24, no. 6. P. 1.

УДК 66.022.51

В. А. Язев

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: yazev_v_a@rambler.ru, yazevva@ystu.ru

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ АГЛОМЕРАЦИИ И ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ

Рассматривается модель периодического процесса агломерации и измельчения. Имитационное моделирование процесса представляется как изменение характеристик ансамбля частиц, способных разделяться и агломерироваться в каждом переходе между состоянием системы. Представлены результаты имита-

ционного моделирования идеальной агломерации как реализации случайного процесса.

Ключевые слова: агломерация, измельчение, случайный процесс, имитационное моделирование, метод Монте-Карло.

V. A. Yazev

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: yazev_y_a@rambler.ru, yazevva@ystu.ru

SIMULATION MODELING OF AGGLOMERATION AND GRINDING PROCESSES

A model of the periodic process of agglomeration and grinding is considered. Simulation of the process is represented as a change in the characteristics of an ensemble of particles capable of being separated and agglomerated in each transition between the states of the system. The results of simulation modeling of ideal agglomeration as an implementation of a random process are presented.

Keywords: agglomeration, grinding, random process, simulation modeling, Monte Carlo method.

Математическое моделирование процессов агломерации и измельчения играет большую роль при создании эффективных технологических систем и оборудования. Для решения задач описания этих процессов используются матричные модели или модели на базе интегродифференциального уравнения [1]:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -S(x)f(x,t) + \int_x^{\infty} S(y)B(x,y)f(y,t)dy - A(x)f(x,t) + \int_0^x A(y)C(x,y)f(y,t)dy, \quad (1)$$

где $f(x,t)$ – фракционный состав; $S(x)$, $B(x,y)$ – соответственно, селективная и распределительная функции измельчения; $A(x)$, $C(x,y)$ – соответственно, селективная и распределительная функции агломерации.

Исследования, связанные с определением селективных и распределительных функций, достаточно трудоёмки и эти функции определены (теоретически или экспериментально) только для ограниченного класса процессов [2], поэтому представляет интерес теоретически исследовать процесс агломерации и измельчения на основе имитационного моделирования системы.

Будем рассматривать процессы агломерации и измельчения в периодическом режиме как изменение некоторого ансамбля (множества) частиц (агломератов) во времени. От реального времени перейдём к совокупности дискретных состояний $k = 0, 1, 2, 3, \dots, K$. Для каждого k -го состояния система состоит из N_k частиц. Каждую частицу ансамбля будем считать состоящей из $a_{k,l}$ “элементарных” частиц и приписывать ей номер от 1 и далее вплоть до

$$N = \sum_{l=1}^{N_k} a_{k,l}, \quad (2)$$

где N – общее суммарное число “элементарных” частиц во всех частицах (агломератах) ансамбля, N_k – число частиц (агломератов) ансамбля на k -й стадии; l – номер частицы в ансамбле на k -й стадии, причём $l = 1, 2, 3, \dots, N_k$. Равенство (2) означает, что для любого $k = 0, 1, 2, 3, \dots, K$ масса частиц, как общая сумма “элементарных” частиц, постоянна.

Переход от одного состояния с номером k к другому, с номером $k + 1$, будем рассматривать:

А) Для процесса агломерации – соединением двух любых частиц из N_k . При этом общее количество частиц уменьшается на 1:

$$N_{k+1} = N_k - 1.$$

Б) Для измельчения – разделением любой не “элементарной” частицы, при этом их общее количество увеличивается на 1:

$$N_{k+1} = N_k + 1.$$

Теоретически в пределе агломерация заканчивается, когда остаётся одна частица – агломерат с $a_{k,l} = N$, а измельчение заканчивается, когда все частицы ансамбля станут “элементарными” и $\forall l a_{k,l} = 1$.

Имитационное моделирование можно проводить: А) для процесса чистой (идеальной) агломерации при отсутствии измельчения; Б) для процесса чистого (идеального) измельчения при отсутствии агломерации; В) для совмещённого процесса измельчения – агломерации.

В последнем случае на каждой стадии совмещённого процесса с номером k для имитационного моделирования определяется характер перехода: измельчения с вероятностью p или агломерации с вероятностью q , причём $p + q = 1$. Очевидно, что в случае А) $q = 1, p = 0$, а в случае Б)

$q = 0, p = 1$. Значения q и зависимо от него p в процессе имитационного моделирования может изменяться.

Для учёта влияния массы частицы при её измельчении (аналог селективной функции измельчения) при выборе частицы массой $a_{k,l}$ имитационное моделирование дополняется функцией вероятности измельчения при условии выбора частицы заданной массы $P(a)$. При этом акт измельчения может состояться, тогда осуществится переход ансамбля из стадии k в стадию $k + 1$. Если акт измельчения не состоялся, то ансамбль остаётся в стадии k и производится новый выбор частицы ансамбля для измельчения. При $P(a) = 1$ измельчение выбранной частицы массой $a > 1$ состоится всегда.

При агломерации учёт влияния масс агломерируемых выбранных частиц дополняется функцией вероятности агломерации при условии выбора двух частиц ансамбля заданной массы $Q(a_i, a_j)$. При этом акт агломерации может состояться, тогда осуществится переход ансамбля из стадии k в стадию $k + 1$. Если акт агломерации не состоялся, то ансамбль остаётся в стадии k и производится новый выбор двух частиц ансамбля для агломерации. При $Q(a_i, a_j) = 1$ агломерация любых двух выбранных частиц состоится всегда.

Общий алгоритм имитационного моделирования с использованием метода Монте–Карло [3] для процесса агломерации с измельчением выглядит следующим образом:

1. Задаётся начальный ансамбль частиц.
2. Определяется конечный номер состояния K и предельно допустимое число розыгрышей KP .
3. На каждой стадии происходит розыгрыш (с номером kp) характера процесса: измельчение или агломерация. Если выбрана агломерация, то переходят на п. 8.
4. В случае выбора измельчения выбирается частица ансамбля среди частиц, допустимых для измельчения.
5. Определяется с вероятностью $P(a)$, состоится ли акт измельчения для выбранной частицы или нет, если не состоится, то переходят на п. 4.
6. При состоявшемся акте измельчения определяются массы двух получаемых частиц.
7. Пересчитывается новый ансамбль, включающий полученные частицы; $N := N + 1$; $k := k + 1$. Переход на п. 3.
8. В случае агломерации выбираются 2 частицы с номерами i и j ансамбля.

9. Определяется с вероятностью $Q(a_i, a_j)$, состоится ли акт агломерации или нет. Если нет, то переходят на п. 8.
10. При состоявшемся акте агломерации образуется новая частица с массой $g = a_i + a_j$.
11. Пересчитывается новый ансамбль с новой частицей; $N := N - 1$; $k := k + 1$. Переход на п. 3.
12. Критерием окончания расчёта является: $(k = K) \vee (kp = KP)$.

Рассмотрим процесс идеальной (чистой) агломерации ($q = 1, p = 0$) и $Q(a_i, a_j) = 1$. В качестве начального состояния при $k = 0$ выберем для удобства систему (ансамбль a_0) из $N = 2^{n_2}$ частиц, где $n_2 = 1, 2, 3, \dots$ и так далее. Для всех N частиц $a_{0,l} = 1$ при $l = 1, 2, 3, \dots, N$.

Агломерация в силу принятых представлений происходит по стадиям с номерами $k = 1, 2, \dots, N - 1$, в каждой из которых соединяются какие-либо 2 частицы ансамбля a_k и общее их число уменьшается на 1, то есть $N := N - 1$.

Используем метод Монте-Карло со случайным выбором номеров i и j агломерируемых частиц с массами $a_{k,i}$ и $a_{k,j}$, соответственно, причём $i \neq j$. Если считать равновероятным соединение в агломерат двух любых частиц ансамбля a_k вне зависимости от $a_{k,i}$ и $a_{k,j}$, то можно имитировать реализацию случайного процесса агломерации, который проходит стадии $k = 1, 2, \dots, K$. При этом $K \leq N - 1$.

Множество различных реализаций случайного процесса при заданном K даёт сечение, для которого определяются осреднённые характеристики: среднее значение $Ma(K)$, дисперсию, а также функцию распределения частиц агломератов в нём.

На рис. 1 представлено изменение средней массы агломерата в процессе агломерации при $n_2 = 6$, а на рис. 2 – изменение функции распределения. Функция распределения представлена в массовых долях агломератов, проходящихся на нормированные интервалы.

x	1	2	4	8	16	32	64
Интервал	1	2	3÷4	5÷8	9÷16	17÷32	33÷64

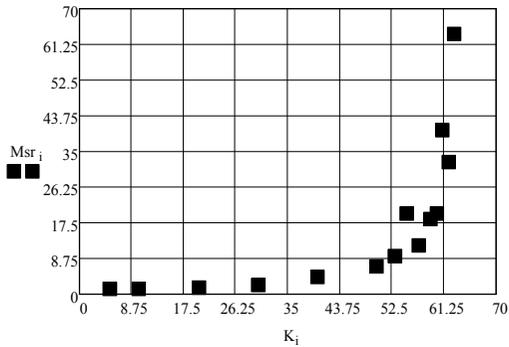


Рис. 1. Рост средней массы агломерата в ансамбле:
 $5 \leq K \leq 63, N = 64, a_{0,i} = 1$

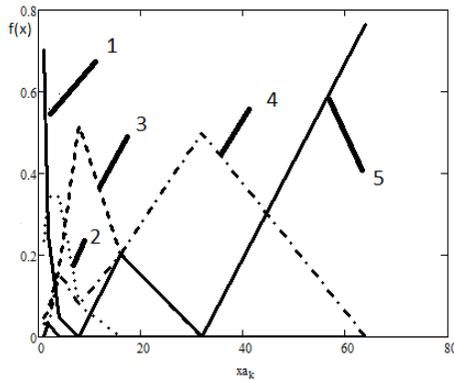


Рис. 2. Кинетика изменения распределения агломератов по массам:
 1 – $K = 10$; 2 – $K = 30$; 3 – $K = 50$; 4 – $K = 55$; 5 – $K = 61$. Для $N = 64$ и $a_{0,i} = 1$

Таким образом, использование имитационного моделирования позволяет эффективно исследовать агломерацию и измельчение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Язев В.А. Аналитические решения основного уравнения кинетики измельчения / В.А. Язев, Е.М. Соловьёв, Б.Н. Басаргин // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 1992. Т.35, вып.11–12. С.102–105.
2. Язев В.А. Моделирование селективной функции измельчения резин в ножевых и фрезерных дробилках // Сб. трудов 23-й Междунар. науч. конф. ММТТ-23. Саратов. 1010. Т.5. С. 130–131.
3. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука. 1971. 327 с.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ НАУКИ

УДК 004.42

Д. Н. Егоров

Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В. Ф. Уткина

Россия, г. Рязань, e-mail: dmitryegorov48@gmail.com

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ПЕРЕХВАТА ФУНКЦИЙ X86-СОВМЕСТИМЫХ WINDOWS ПРИЛОЖЕНИЙ

В статье описаны виды перехвата функций. Рассматриваются основные методы перехвата функций x86-совместимых Windows приложений. Приведены примеры использования данных методов.

Ключевые слова: перехват функций, функция-петля, соглашение о вызове.

D. N. Egorov

V. F. Utkin Ryazan State Radio Engineering University
Russia, Ryazan, e-mail: dmitryegorov48@gmail.com

FUNCTION INTERCEPTION ANALYSIS OF X86-COMPATIBLE WINDOWS APPLICATIONS

Function interception types are given. Fundamental function interception methods of x86-based Windows applications are provided with examples.

Keywords: function interception, detour function, calling convention.

Перехват функций необходим в случаях, когда требуется получить управление программой с целью наблюдения за ходом её выполнения или его изменения. Перехват функций используется для расширения функциональности приложения и исправления ошибок, а также для получения сведений о производительности.

Существует два вида перехвата функций:

- статический;
- динамический.

Статический перехват осуществляется перед загрузкой приложения

в оперативную память, то есть до начала выполнения программы. Такой подход подразумевает внесение изменений в содержимое файла, который в последствие будет загружен операционной системой.

Динамический перехват осуществляется уже непосредственно при выполнении приложения, когда содержимое исполняемого файла было загружено в память. Для внесения изменений необходимо получить доступ к виртуальному адресному пространству, в котором приложение работает.

Методы перехвата функции

Существует несколько методов перехвата функции. Все они, так или иначе, сводятся к тому, чтобы получить управление программой в момент вызова перехватываемой функции. Для этого имеются следующие способы:

- 1) перехват в вызывающей функции;
- 2) перехват в вызываемой функции;
- 3) перехват через таблицу виртуальных функций;
- 4) перехват через таблицу импорта.

Перехват в вызывающей функции подразумевает изменение адреса перехватываемой функции в момент её вызова. Так как функция может вызываться из множества различных мест, то для успешного перехвата необходимо провести изменения во всех точках вызова. Данный подход целесообразно использовать только в том случае, когда требуется осуществить перехват в небольшом количестве мест. Как правило, только в одной, двух функциях, в то время как во всех других точках вызова перехвата не будет.

Для того чтобы выполнить такой перехват, необходимо знать как происходит вызов функции. Рассмотрим вызов следующей функции:

```
voidFoo() { /* код функции */ }
```

Функция *Foo* не принимает аргументов и ничего не возвращает. Допустим, она находится по адресу 0x41001001. Вызов такой функции осуществляется простым выполнением инструкции *call*:

Адрес	Код операции	Мнемоника инструкции
41000000	E8 FC0F0000	call 41001001
41000005

Для перехвата достаточно изменить адрес назначения инструкции *call* на адрес нашей функции, например 0x80F00F00:

Адрес	Код операции	Мнемоника инструкции
41000000	E8 F00EF03F	call 80F00F00
41000005

Стоит обратить внимание на то, что в данном примере используется вызов относительно адреса следующей инструкции (41000005 + FFC =

=41001001). Если приложение имеет 32-битную разрядность, то максимальное значение смещения полностью покрывает диапазон адресов доступных для приложения. В случае с 64-битной разрядностью может потребоваться вызов по абсолютному смещению, для чего необходимо в пределах 32-битного смещения найти свободное место для записи вызова по абсолютному адресу:

Адрес	Код операции	Мнемоника инструкции
0000000041000000	E9 FB4F0000	jmp 41005000
0000000041000005
	...	
0000000041005000	FF15 00000042	callqwordptr [42000000]
0000000041005006
	...	
0000000042000000	01100041	...
0000000042000004	00000000	...

Теперь рассмотрим более сложную функцию:

```
int __cdecl Bar(char *str, int size) { /* кодфункции */ }
```

Функция *Bar* принимает два аргумента и возвращает 32-битный integer. Вызов такой функции требует размещения на стеке значений *str* и *size* в обратном порядке (справа налево) и возвращения стека в изначальное положение после вызова в соответствии с соглашением о вызове «*cdecl*» [2]. Допустим, что адрес *Bar* тот же — 0x41001001. Вызов такой функции будет выглядеть следующим образом:

Адрес	Код операции	Мнемоника инструкции
40FFFFFFE	50	pusheax ;size
40FFFFFFF	51	pushecx ;str
41000000	E8 FC0F0000	call 41001001
41000005	8945 FC	movdwordptr [ebp-4], eax
41000008	83C4 08	addesp, 8

Перехват такой функции ничем не отличается от перехвата функции *Foo*, рассмотренной выше. Однако наша функция, на которую требуется заменить *Bar*, должна следовать тому же соглашению о вызове, что и *Bar*. В данном случае «*cdecl*». Это необходимо для того, чтобы компилятор сгенерировал совместимый с вызывающей функцией код, то есть чтобы наша функция “знала”, где какой аргумент находится на стеке и нужно ли перед возвращением “отчищать” стек от аргументов.

В случае с 64-разрядным приложением, в ABI (Application Binary Interface), который реализован компилятором MSVC (Microsoft Visual C++), определено всего одно соглашение о вызове — «*fastcall*» (x64). Передача первых четырёх аргументов осуществляется через регистры *rcx*, *rdx*, *r8*, *r9* соответственно. В случае передачи чисел с плавающей точкой (дробных) используются SSE регистры *xmm0*, *xmm1*, *xmm2* и *xmm3*. Все дополнительные аргументы помещаются на стек [3].

Перехват в вызываемой функции в отличие от предыдущего метода, подразумевает перехват непосредственно внутри самой функции, вызов которой необходимо перехватить. Этот подход наиболее часто используется, так как позволяет перехватить сразу все точки вызова функции. Исключением здесь являются встроенные функции (inline functions). Компилятор может оптимизировать вызов функции путём встраивания тела функции в те места, из которых осуществляется вызов. Таким образом, вызываемая функция становится частью вызывающей и фактически вызова функции не происходит.

Перехват осуществляется путём перезаписи инструкций по адресу вызываемой функции, что подразумевает наличие дизассемблера, если требуется автоматизация этого процесса. Так как код оригинальной функции изменяется, возникает вопрос: каким образом осуществить вызов оригинальной функции. Наиболее удачное решение было предложено Microsoft Research, реализованное в библиотеке Detours [1]. Их подход заключается в сохранении перезаписываемых инструкций в отдельную область памяти с добавлением к ним инструкции безусловного перехода обратно в перехватываемую функцию. Получившийся набор инструкций называется *функцией-трамплином*, который может быть использован для вызова оригинальной функции. Функция подставляемая вместо исходной называется *функцией-петлёй* (detour function).

Ход выполнения до перехвата:

[A] -> [B] -> [A]

Здесь А – функция вызывающая В, а В – вызываемая функция, которую планируется перехватить. Управление программой принадлежит функции А, затем она вызывает функцию В и контроль передается функции В, которая после завершения работы, передаёт управление обратно функции А.

Ход выполнения после перехвата:

[A] -> [C] -> [D] -> [B] -> [C] -> [A]

Здесь С – функция-петля, а D – функция-трамплин. Функция А вызывает функцию В, однако вместо этого происходит вызов функции С, которая через функцию-трамплин D осуществляет вызов оригинальной функции В. После завершения работы, функция В передаёт управление обратно функции С напрямую, не возвращаясь в функцию D, и, наконец, функция С возвращает управление функции А.

Такой подход не только решает проблему вызова оригинальной функции, но также даёт возможность контролировать момент вызова, который, к тому же, является необязательным. Функция-петля может не вызывать оригинальной функции, а сразу возвращать управление. Это воз-

можно благодаря сохранению перехватываемой функции через использование функции-трамплина. Иными словами, перехватываемая функция изымается из потока выполнения программы и для неё создаётся новая точка входа – функция-трамплин, которую можно использовать для вызова.

Рассмотрим на примере схему перехвата. Предположим, что перехватываемая функция имеет следующую сигнатуру и тело:

```
intFunc_B(int value) { return (value * 2); }
```

В скомпилированном виде эта функция будет иметь следующий вид (оптимизации отключены для наглядности):

Адрес	Код операции	Мнемоника инструкции
00000000	55	pushebp
00000001	8BEC	movebp, esp
00000003	8B45 08	moveax, dwordptr [ebp+8]
00000006	D1E0	shleax, 1
00000008	5D	popebp
00000009	C3	ret

Для перехвата в 32-разрядном приложении потребуется перезаписать не более 6 байт поверх первых трёх инструкций:

Адрес	Код операции	Мнемоника инструкции
00000000	E9 FBFFFF3F	jmp 40000000
00000005	90	nop
00000006	D1E0	shleax, 1
00000008	5D	popebp
00000009	C3	ret

Таким образом, при вызове функции *Func_B* произойдёт передача управления функции по адресу 0x40000000. Для правильного отображения кода в отладчике, оставшиеся от оригинальных инструкций байты заменяются инструкцией *nop* (на работу программы это никак не влияет). Функция-трамплин имеет следующий вид:

Адрес	Код операции	Мнемоника инструкции
41000000	55	pushebp
41000001	8BEC	movebp, esp
41000003	8B45 08	moveax, dwordptr [ebp+8]
41000006	E9 FBFFFFBE	jmp 00000006
4100000B

При условии, что функция-петля реализует соглашение о вызове, используемое перехваченной функцией (в данном случае *Func_B*), и вызов *Func_B* осуществляется через функцию-трамплин, обе функции можно использовать как обычно, не внося дополнительных изменений.

В случаях, когда в функцию-трамплин попадают инструкции относительного перехода, их адреса переписываются. Если значение расстояния не вмещается в диапазон относительного перехода, то такой переход заменяется абсолютным.

Стоит отметить пару моментов. Если приложение 64-разрядное, в худшем случае потребуется перезаписать 12 байт, в остальном так же как и с 32-разрядным. Если вся перехватываемая функция имеет длину меньше, чем необходимо для записи перехвата, то потребуется переход на ближайшее свободное место (описано в первом методе). Часто после функции имеется отступ с целью выравнивания на 16-байтной границе, который можно использовать при нехватке места. Также возможна ситуация, когда перехватываемая функция поддерживает перехват. В таком случае первая инструкция предназначена для записи относительного перехода, а перед самой функцией имеется место для записи абсолютного перехода.

Перехват через таблицу виртуальных функций осуществляется путём замены адреса перехватываемой функции в таблице виртуальных функций. Такой метод перехвата специфичен для программ, написанных на языках объектно-ориентированного программирования (ООП). Для каждого объекта, у которого имеется хотя бы одна виртуальная функция, создаётся таблица, в которой хранятся адреса функций, реализующих виртуальные функции. Вызов происходит путём получения адреса функции из этой таблицы:

Адрес	Код операции	Мнемоника инструкции
00000018	8B10	<code>movedx, dwordptr [eax]</code>
0000001A	8B52 08	<code>movedx, dwordptr [edx+8]</code>
0000001D	8BC8	<code>movecx, eax</code>
0000001F	FFD2	<code>call edx</code>
00000021

Такой вызов называется *непрямым* (indirect call) и легко может быть перенаправлен. При непрямом вызове через таблицу виртуальных функций, как правило, используется соглашение о вызове «*thiscall*», но также могут использоваться и другие, например «*stdcall*».

В некоторых языках используется понятие «абстрактный метод», значение которого совпадает с понятием «чистая виртуальная функция» в C++. Такие функции тоже реализуются через таблицу виртуальных функций и в этом плане ничем не отличаются от обычных виртуальных функций.

В 64-разрядных приложениях отличий нет.

Перехват через таблицу импорта подразумевает замену адреса в таблице импортированных функций. Любое приложение, так или иначе, использует функции из сторонних модулей. *Модулем* называют исполняемый файл, которым является само приложение (EXE-файл), а также загружаемые библиотеки (DLL-файлы). В файле модуля хранится таблица импорта — список сторонних модулей и их функций, использованных исполняемым файлом. При загрузке исполняемого файла в память, загрузчик считывает этот список и подгружает необходимые модули в виртуальное

адресное пространство процесса приложения. После чего осуществляется запись адресов указанных в списке функций в эту таблицу. Функции, загруженные таким образом, называются *импортированными*. Импортированные функции, как и виртуальные, вызываются через непрямой вызов:

Адрес	Код операции	Мнемоника инструкции
009ACB39	FF15 9437F900	call dword ptr [00F93794]
009ACB3F
		...
00F93794	64E710C8	...

В данном примере для перехвата достаточно изменить адрес функции по адресу 0x00F93794. В 64-разрядном приложении перехват осуществляется аналогично.

Логично предположить, что этот метод, в отличие от трёх других, используется только при динамическом подходе к перехвату, так как для его реализации требуется загрузка исполняемых файлов в оперативную память.

При выборе метода перехвата функции необходимо исходить из специфики вызывающего кода и поставленной цели. Универсальным является метод перехвата в вызываемой функции, который при хорошей реализации будет работать безотказно. Однако не следует бездумно применять его каждый раз, когда необходимо перехватить функцию, всегда существует вероятность наличия более простого решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hunt G.* Detours: Binary Interception of Win32 Functions / G. Hunt, D. Brubacher // Third USENIX Windows NT Symposium. July 1999. P.1–9.
2. Cdecl. Microsoft Docs [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://docs.microsoft.com/en-us/cpp/cpp/cdecl> (дата обращения 03.11.2019 г.)
3. x64 calling convention. Microsoft Docs [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://docs.microsoft.com/en-us/cpp/build/x64-calling-convention> (дата обращения 03.11.2019 г.)

УДК 37:001.89

Е. Г. Казаров, А. М. Рудаков

Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны
Россия, г. Ярославль, e-mail: kvalitet@ro.ru

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ ПРИ ОЦЕНКЕ ТВОРЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Обоснована применимость аппарата нечеткой логики для оценки творческих способностей обучающихся, с учетом способности формулировать основные положения научного исследования, решать и придумывать задачи из области теории решения изобретательских задач. Программно реализован, с применением математического пакета MatLab, механизм оценивания творческих способностей обучающихся.

Ключевые слова: научные способности, обучающиеся, основные положения научного исследования, творческие способности, нечеткая логика, научное мышление.

E. G. Kazarov, A. M. Rydakov

THE APPLICATION OF FUZZY LOGIC IN THE EVALUATION OF CREATIVE THE ABILITIES OF THE STUDENTS

Yaroslavl Higher Military Institute of the Air Defense
Russia, Yaroslavl, e-mail: kvalitet@ro.ru

The applicability of fuzzy logic to assess the creative abilities of students, taking into account the ability to formulate the basic provisions of scientific research, to solve and invent problems in the field of theory of inventive problem solving is substantiated. Software implemented, using the mathematical package MatLab, the mechanism of assessing the creative abilities of students.

Keywords: scientific abilities, students, basic provisions of scientific research, creativity, fuzzy logic, scientific thinking.

Оценивание успеваемости обучающихся весьма непростая задача. На практике применяются различные способы оценивания, которые во многом носят субъективный характер. Особенно сложно оценить творческие способности при аттестации в процессе изучения такой дисциплины, как «Научно-исследовательская работа». Здесь недостаточно выучить какие-то определения, научиться решать какие-либо задачи. Важными факторами успешного освоения этой дисциплины является умение творчески

мыслить, анализировать имеющиеся факты, делать выводы, формулировать основные положения научного исследования, находить нестандартные решения, аргументированно излагать полученное решение [1-4].

Сформулируем общие требования к оцениванию научных способностей обучающихся. К ним, по нашему, мнению относятся:

- знание и владение методами исследования;
- умение формулировать основные положения научного исследования;
- решение задач теории решения изобретательских задач (ТРИЗ).

Умение формулировать основные положения научного исследования включает в себя способность сформулировать: несколько названий научного исследования; объект, предмет исследования; цель и задачи исследования; новизну; практическую значимость; сделать заключение [1-4].

Для оценивания творческих способностей обучающихся, дополнительно к вышеперечисленным требованиям, добавляется владение научным мышлением, заключающееся в умении сформулировать новую научную проблему (тему, направление) и новую задачу ТРИЗ.

В общем виде подход к оцениванию творческих способностей обучающихся приведен на рис. 1.

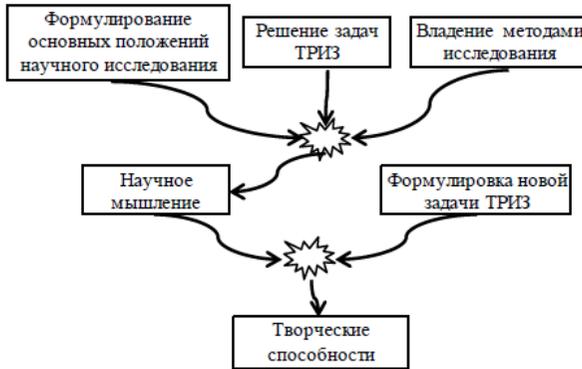


Рис. 1. Порядок оценивания творческих способностей обучающихся

Способность формулировать основные положения научного исследования будем оценивать с учетом коэффициентов сложности, которые могут быть назначены для каждого основного положения научного исследования. Эти значения играют роль относительных весовых коэффициентов и предназначены для того, чтобы можно было учесть способность формулировки более сложных положений, нежели чем легких. Выражение для расчета способности формулировать основные положения научного исследования имеет вид

$$T\phi = \frac{\sum_{i=1}^{n_t} t_i c_i^t}{\sum_{i=1}^{n_t} c_i^t},$$

где n_t – количество формулируемых положений научного исследования; t_i – оценка формулировки i -го положения научного исследования; c_i^t – коэффициент сложности для i -го положения научного исследования.

Знание и владение методами исследования также оценим с учетом коэффициентов сложности, которые назначаются для каждого метода. Выражение для расчета знаний и владения методами исследования имеет вид

$$T_M = \frac{\sum_{i=1}^{n_k} k_i c_i^k}{\sum_{i=1}^{n_k} c_i^k},$$

где n_k – количество оцениваемых методов исследования; k_i – оценка владения i -м методом исследования; c_i^k – коэффициент сложности для i -го фактора.

Способность решения задач ТРИЗ оценим с учетом коэффициентов сложности, которые назначаются для каждой задачи. Выражение для расчета способности решения задач ТРИЗ имеет вид

$$T_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n_m} m_i c_i^m}{\sum_{i=1}^{n_m} c_i^m},$$

где n_m – количество решенных задач ТРИЗ; m_i – оценка i -й решенной задачи ТРИЗ; c_i^m – коэффициент сложности задачи ТРИЗ.

Так как задача по оцениванию творческих способностей обучающихся относится к сложно формализуемым и является многокритериальной, предложенный порядок оценивания творческих способностей обучающихся рассмотрим с применением теории нечетких вычислений.

В соответствии с основными положениями теории нечетких вычислений [5, 6], определим через X пространство объектов, x – общий элемент пространства X . Классическое множество A , $A \subseteq X$, определим как совокупность элементов $x \in X$, таких, что x может либо принадлежать, либо не принадлежать A . Нечёткое множество A на пространстве X определим как множество упорядоченных пар

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\},$$

где $\mu_A(x)$ - функция принадлежности на нечетком множестве A .

Опишем терм-множества входных переменных, влияющих на оценивание творческих способностей обучающихся. Для этого воспользуемся приложением Fuzzy Logic Toolbox математического пакета MatLab [6].

Терм-множества входных переменных, влияющих на оценивание научных способностей обучающихся, приведены на рис. 2.

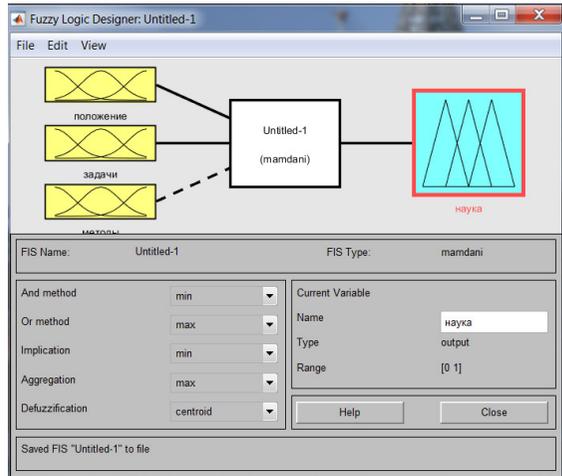


Рис. 2. Терм-множества входных переменных, влияющих на оценивание научных способностей обучающихся

Обозначим через x_1 – входную переменную «Способность формулировать основные положения научного исследования». Ее терм-множество, т.е. множество лингвистических значений, обозначим как $T_1 = \{\text{«низкая»}, \text{«хорошая»}, \text{«высокая»}\}$ или в символическом виде $T_1 = \{X_{1,1}, X_{1,2}, X_{1,3}\}$ с функциями принадлежности термов, изображенными на рис. 3.

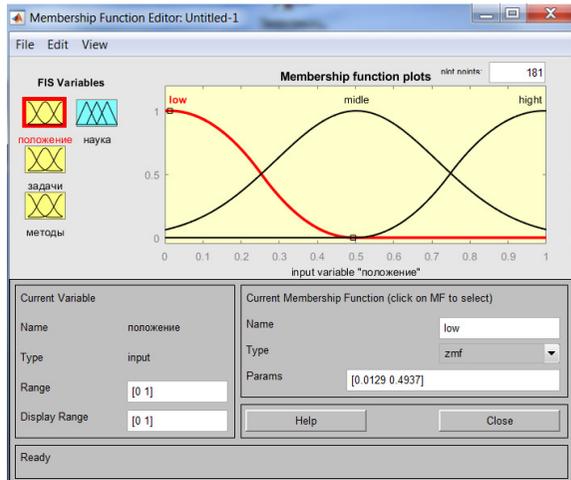


Рис. 3. Функции принадлежности для входной переменной «Способность формулировать основные положения научного исследования»

Обозначим через x_2 – входную переменную «Способность решать задачи ТРИЗ». Ее терм-множество, т.е. множество лингвистических значений, обозначим как $T_2 = \{\text{«низкая»}, \text{«хорошая»}, \text{«высокая»}\}$ или в символическом виде $T_2 = \{X_{2,1}, X_{2,2}, X_{2,3}\}$ с функциями принадлежности термов, изображенными на рис. 4.

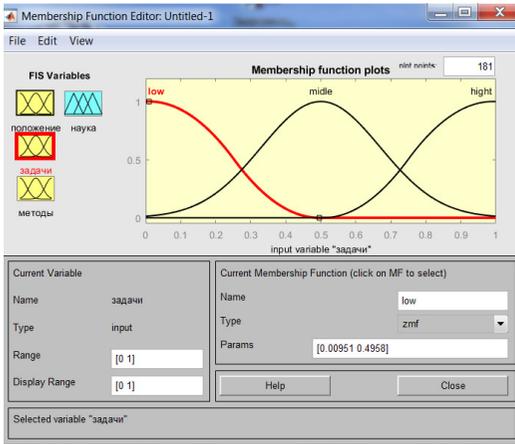


Рис. 4. Функции принадлежности для входной переменной «Способность решать задачи ТРИЗ»

Обозначим через x_3 – входную переменную «Владение методами исследования». Ее терм-множество, т.е. множество лингвистических значений, обозначим как $T_3 = \{\text{«низкая»}, \text{«хорошая»}, \text{«высокая»}\}$ или в символическом виде $T_3 = \{X_{3,1}, X_{3,2}, X_{3,3}\}$ с функциями принадлежности термов, изображенными на рис. 5.

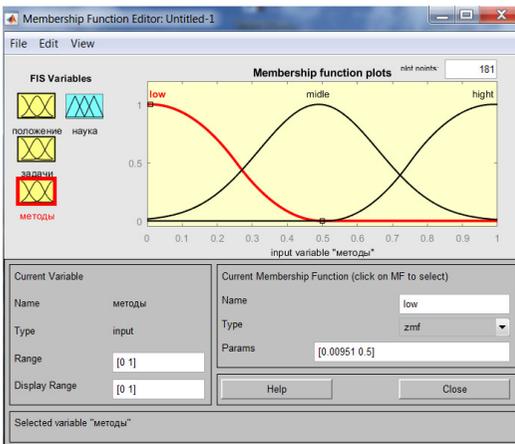


Рис. 5. Терм-множества входных переменных, влияющих на оценивание творческих способностей обучающихся

В качестве терм-множества выходной лингвистической переменной будем использовать «Научное мышление», множество лингвистических значений, запишем как $T_4 = \{\text{«низкие»}, \text{«средние»}, \text{«высокие»}\}$ которое в символическом виде запишем следующим образом $T_4 = \{Y_0, Y_1, Y_2\}$. Функции принадлежности термов изображены на рис. 6.

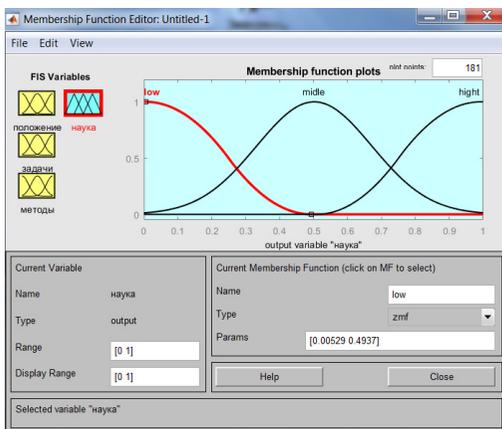


Рис. 6. Функции принадлежности для выходной переменной «Научное мышление»

В соответствии с механизмом нечёткого логического вывода, antecedentes и консеквенты правила вывода выходной лингвистической переменной «Научное мышление» в математической форме имеют вид, представленный на рис. 7.

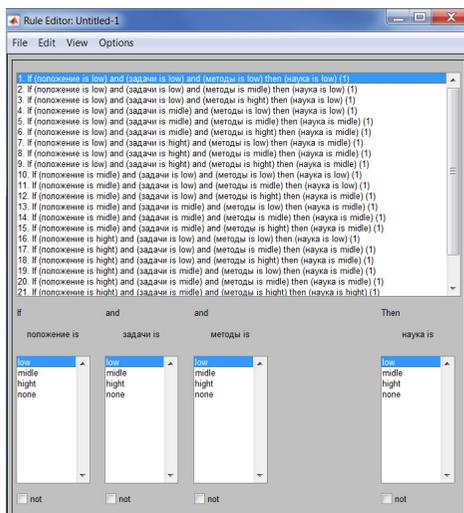


Рис. 7. Правила нечеткого вывода выходной лингвистической переменной «Научное мышление»

Далее определим терм-множества входных переменных, влияющих на оценивание творческих способностей обучающихся, которые приведены на рис. 8.

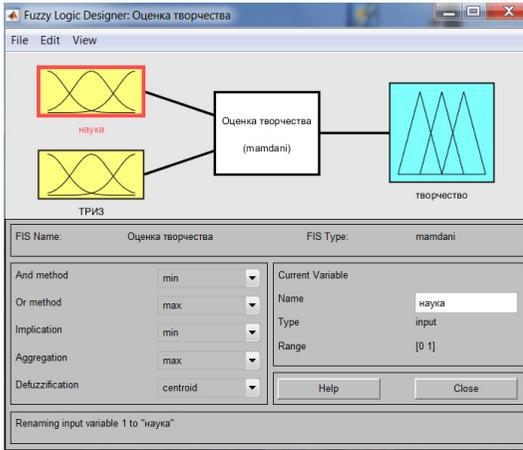


Рис. 8. Терм-множества входных переменных, влияющих на оценивание творческих способностей обучающихся

Обозначим через x_5 – входную переменную «Способность к научному мышлению». Ее терм-множество, т.е. множество лингвистических значений, обозначим как $T_5 = \{\text{«низкая»}, \text{«хорошая»}, \text{«высокая»}\}$ или в символическом виде $T_5 = \{X_{5,1}, X_{5,2}, X_{5,3}\}$ с функциями принадлежности термов, изображенными на рис. 9.

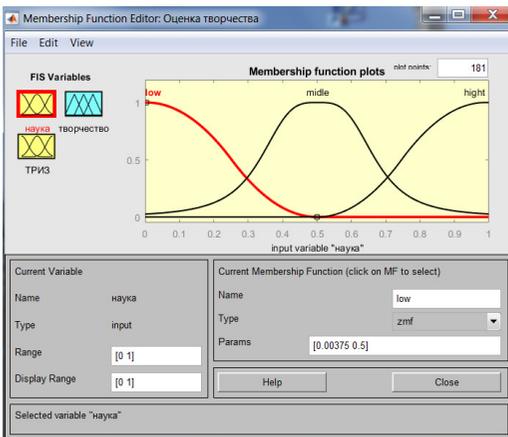


Рис. 9. Функции принадлежности для первой входной переменной «Способность к научному мышлению»

Другим влияющим фактором на оценивание научных способностей обучающихся, является способность к формулировке новой задачи ТРИЗ.

Обозначим через X_6 – входную переменную «Способность к формулировке новой задачи ТРИЗ». Ее терм-множество, т.е. множество лингвистических значений, запишем как $T_6 = \{\text{«не умеет»}, \text{«умеет»}, \text{«хорошо умеет»}\}$ или в символическом виде $T_6 = \{X_{6,1}, X_{6,2}, X_{6,3}\}$ с функциями принадлежности термов, изображенными на рис. 10.

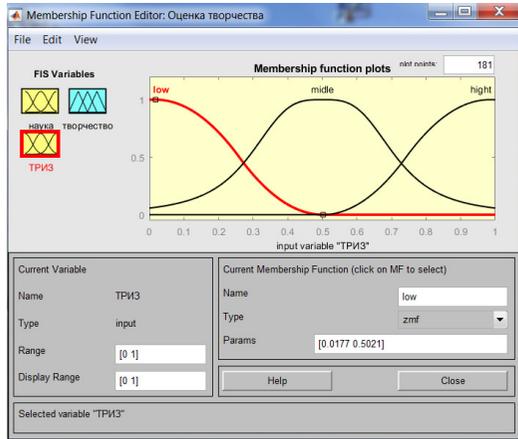


Рис. 10. Функции принадлежности для второй входной переменной «Способность сформулировать новую задачу ТРИЗ»

В качестве терм-множества выходной лингвистической переменной будем использовать «Творческие способности обучающихся», множество лингвистических значений, запишем как $T_7 = \{\text{«низкие»}, \text{«средние»}, \text{«высокие»}\}$ которое в символическом виде запишем следующим образом $T_7 = \{Y_0, Y_1, Y_2\}$. Функции принадлежности термов изображены на рис. 11.

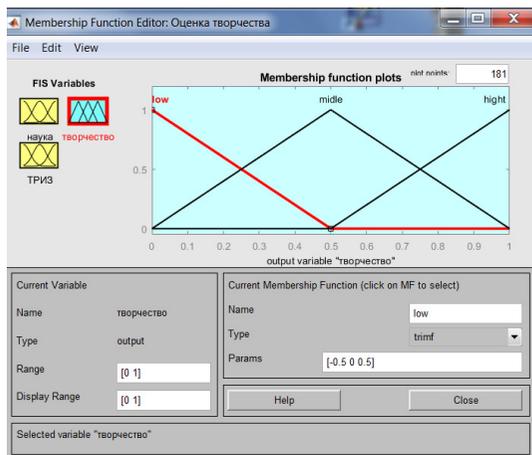


Рис. 11. Функции принадлежности для выходной переменной «Творческие способности обучающихся»

В соответствии с механизмом нечёткого логического вывода, антецеденты и консеквенты правила определяются нечёткими множествами и в математической форме имеют вид, представленный на рис. 12.

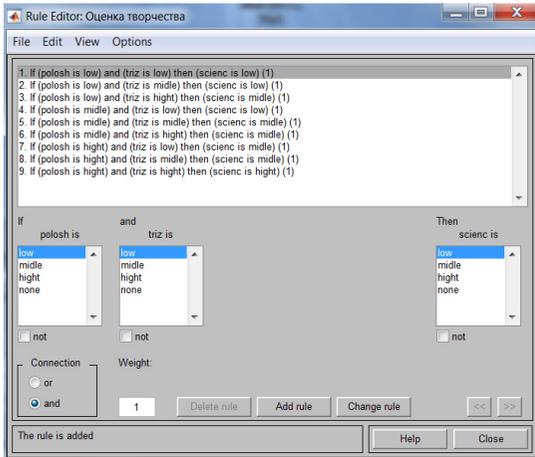


Рис. 12. Правила нечеткого вывода выходной лингвистической переменной «Творческое мышление»

Программная реализация разработанных правил нечёткого логического вывода на этапе дефаззификации при условиях: научное мышление 0,7; формулировка новой задачи ТРИЗ 0,6 представлена на рис. 13. При этих условиях значение выходной лингвистической переменной «Творческие способности обучающихся» равно 0,505.

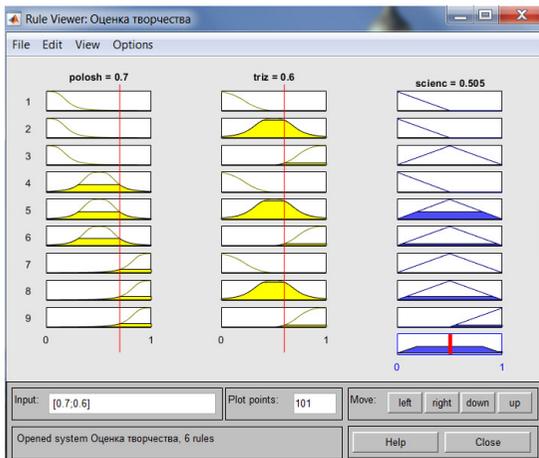
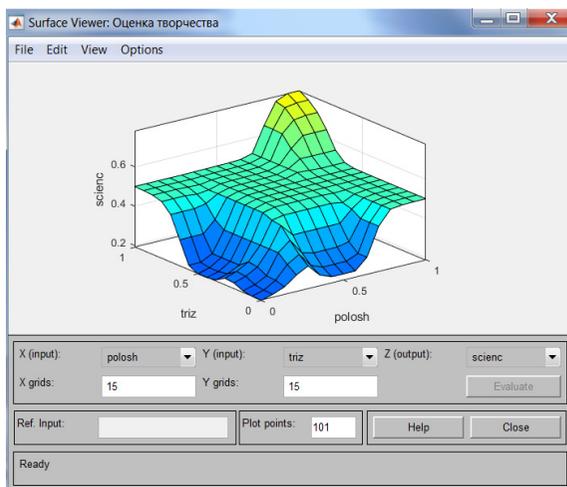


Рис. 13. Дефаззификация нечеткого вывода

Для проведения общего анализа адекватности построенной нечеткой модели и оценки влияния изменения значений входных нечетких переменных на значение выходной нечеткой переменной построена поверхность решений разработанной системы нечеткого вывода. Графическая зависимость выходной переменной от ее входных параметров научного мышления и формулировки новой задачи ТРИЗ приведена на рис. 14.

Рис. 14. График поверхности решений системы нечеткого вывода (зависимость от уровня научного мышления и способности сформулировать новую задачу ТРИЗ)



На рис. 14 наглядно прослеживается зависимость «Творческих способностей обучающихся» с изменением уровня научного мышления и способности сформулировать новую задачу ТРИЗ. Увеличение интенсивности окраски поверхности решений свидетельствует о повышении уровня творческих способностей обучающихся.

Таким образом, обоснована применимость аппарата нечеткой логики для оценки творческих способностей обучающихся, с учетом способности формулировать основные положения научного исследования, решать и придумывать задачи ТРИЗ.

Программно реализован, с применением математического пакета MatLab, механизм оценивания творческих способностей обучающихся.

Данный метод может быть использован при автоматизированной оценке творческих способностей обучающихся. Он обладает гибкостью, возможностью применения различных вариантов настройки разработанного аппарата нечеткой логики и позволяет обрабатывать одновременно как численные, так и лингвистические данные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Казаров Е.Г.* Формулировка названия научного исследования / Е.Г. Казаров, А.М. Рудаков // Вестник Ярославского высшего военного училища противовоздушной обороны. 2019. № 1. С 161-166.
2. *Новик А.В.* Совершенствование методической подготовки обучающихся старших курсов / А.В. Новик, Е.Г. Казаров, А.М. Рудаков // Вестник Ярославского высшего военного училища противовоздушной обороны. 2019. № 1. С 201-209.
3. Прикладное применение правил комбинирования экспертных оценок / Е.Г. Казаров, А.М. Рудаков, А.В. Новик, Т.И. Коваленко // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 12. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. С. 232-240.
4. *Казаров Е.Г.* Выбор предпочтительного варианта автоматизированной системы управления с применением теории многокритериальной функции полезности / Е.Г. Казаров, А.М. Рудаков // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 13. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2018. С. 166-172.
5. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечетких исходных данных. М.: Наука, 1981.
6. *Тарасян В.С.* Пакет Fuzzy Logic Toolbox for Matlab : учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2013. 112 с.

УДК 681.5.004.9

Р. А. Малышев, К. А. Пиксотов

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, e-mail: ramk2005@mail.ru, kostpiks@mail.ru.

АППАРАТНО-ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС КОНТРОЛЯ МИКРОКЛИМАТА И СПЕКТРА ОСВЕЩЕНИЯ ТЕПЛИЦЫ

Рассматривается система управления микроклиматом теплицы с функцией архивации данных. Регулируемые параметры: температура и влажность воздуха, температура и влажность грунта, концентрация углекислого газа, световой спектр, продолжительность светового дня.

Ключевые слова: регулирование микроклимата, теплица, освещенность, аппаратно-программный комплекс, температура, влажность.

R. A. Malyshev, K. A. Pikstov

P.A. Soloviev Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: ramk2005@mail.ru, kostpiks@mail.ru.

HARDWARE-SOFTWARE COMPLEX FOR CLIMATE CONTROL AND GREENHOUSE LIGHTING SPECTRUM

A greenhouse microclimate control system with a data archiving function is considered. Adjustable parameters: temperature and humidity, soil temperature and humidity, carbon dioxide concentration, light spectrum, daylight hours

Keywords: *climate control, greenhouse, lighting, hardware-software complex, temperature, humidity.*

Теплицы как объект управления микроклиматом относятся к наиболее сложным объектам автоматизации, определение их характеристик сопряжено с некоторыми трудностями, вытекающими из особенностей объекта и условий его функционирования [1].

Современная теплица как объект управления характеризуется крайне неудовлетворительной динамикой и нестационарностью параметров, вытекающими из особенностей технологии производства (изменение степени загрязнения ограждения, нарастание объема листостебельной массы и т. д.).

Существует ряд факторов, напрямую влияющих на процесс фотосинтеза растений. Прежде всего, интенсивность процесса напрямую зависит:

- от содержания двуокси углерода,
- температуры окружающего воздуха,
- достаточного обеспечения растения водой,
- интенсивности света.

Таким образом, важными параметрами микроклимата являются поддержание уровня температуры, влажности почвы и воздуха. В современной теплице не обойтись и без системы управления и регулирования освещенности. Регулирование освещенности вносит определяющее воздействие на сложные процессы фотосинтеза, что напрямую отражается на качестве и количестве урожая возделываемой культуры.

К основным параметрам регулирования также нужно отнести концентрацию углекислого газа во внутреннем помещении объекта управления. При добавлении углекислоты в воздух и повышении в нем ее концентрации можно повысить интенсивность фотосинтеза в 1,5-3 раза. На этом основан прием агротехники в условиях закрытого грунта - воздушное удобрение растений подкормкой углекислотой. Дозируя углекислый газ, можно эффективно добиться сокращения продолжительности вегетативной фазы развития растения, что обеспечит получение раннего, самого дорогого урожая овощей. При достаточной обеспеченности элементами минерального питания, эти подкормки всегда повышают

общую урожайность этих культур на 15-40%, увеличивая количество и массу плодов, и ускоряют их созревание на 5-8 дней.

Одного регулирования, без возможности анализа и коррекции в будущем регулируемых параметров, явно недостаточно, поэтому необходимо, предусмотреть возможность записи и архивации накопленных данных. Все это будет способствовать, непрерывному улучшению технологического процесса.

При проектировании системы регулирования теплицы никак нельзя обойти тему освещения, которое играет определяющую роль в процессе фотосинтеза.

Однако для того, чтобы растение развивалось оптимально, важно не только наличие световой энергии, но и световой спектр, а также длительность светового периода, когда растение бодрствует, и темного периода, когда оно отдыхает.

Если грамотно регулировать длительность светового дня, то стадиями роста растения можно управлять. Так, у растений длинного дня можно регулировать их вегетативную стадию, а также время цветения. В свою очередь, для растений короткого дня световой период должен оставаться на определенном уровне, ведь слишком длительный период света может существенно нарушить время его цветения. Существует и категория растений, которые растут в зависимости от наличия света, но при этом продолжительность темного и светлого периода суток на них не влияет.

Кроме спектральной составляющей, для растений очень важна необходимость соблюдения правильного соотношения мощности излучения красного и синего спектра, в зависимости от вегетативной фазы и сорта растения.

Таким образом, разрабатываемый аппаратно-программный комплекс должен обеспечивать:

- регистрацию, запись и регулирование температуры воздуха;
- регистрацию, запись и регулирование температуры грунта;
- регистрацию, запись и регулирование уровня освещенности;
- регистрацию, запись и регулирование концентрации углекислого газа;
- регистрацию, запись и регулирование влажности почвы;
- регистрацию, запись и регулирование влажности воздуха;
- регистрацию и запись температуры наружного воздуха;
- регистрацию и запись давления в теплице;
- регулирование спектра светового потока;
- регулирование интенсивности излучения различных спектров в один момент времени;
- регулирование длительности светового дня.

Система управления считывает данные с датчиков освещенности, температур, влажностей, CO₂, давления. Программа обрабатывает полученные данные, записывает в память и выдает с помощью системы управления необходимые управляющие сигналы в зависимости от необходимости для выращиваемых культур:

- для увеличения/уменьшения яркости светодиодов определенных цветов,
- включения/выключения вентиляции,
- включения/выключения нагревателя,
- включения/выключения насоса.

Датчик влажности почвы MP538 представляет собой два позолоченных контакта. Информация с датчика влажности выходит в относительных единицах с большим диапазоном расхождения, ориентировочные значения приведены ниже:

- 0...300 – сухая почва,
- 300...700 – влажная почва,
- 700...950 – вода.

Для измерения температуры грунта используется цифровой датчик температуры производства Dallas Semiconductor DS18B20.

ВМЕ 280 представляет собой интегрированный датчик окружающей среды, разработанный специально для мобильных устройств, где размер и низкое энергопотребление являются ключевыми. Устройство совмещает 3 высоко линейных и точных датчиков: давления, влажности и температуры

Схема информационных потоков изображена на рис. 1.

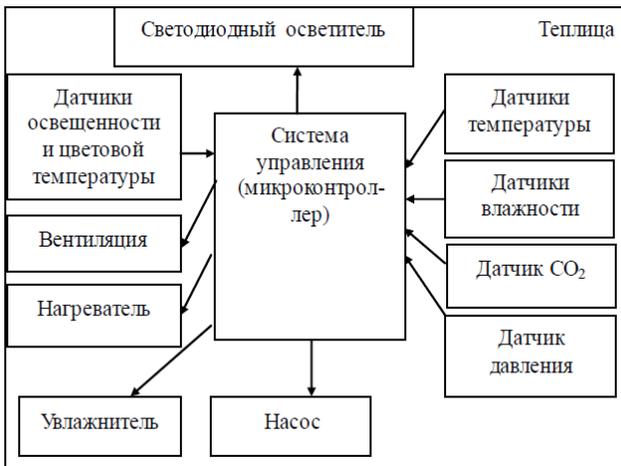


Рис. 1. Схема информационных потоков

Регулирование влажности почвы производится путем выключения/включения насоса по уровню влажности. Данная операция производится модулем с электромагнитным реле, что создает гальваническую развязку с таким мощным источником электромагнитных помех, как мотор гидравлического насоса.

Измерение содержания углекислого газа в воздухе осуществляется с помощью датчика SENSEAIR K33 LP T/RH, который подключается по протоколу I2C и будет работать на одной шине с датчиком BM280.

В качестве осветителя кроме основного источника света установлены дополнительные светодиоды разных цветов [2], и путем изменения яркости их свечения регулировать интенсивность света с той или иной длиной волны, смещая тем самым цветовую температуру в большую или меньшую сторону. Датчик спектра – AS7262-BLGT.

В качестве микроконтроллера был выбран ATmega 2560, который выполняет задачи сбора данных и регулирования исполнительных устройств.

Для связи микроконтроллера Arduino Mega с Интернетом используется Ethernet shield W5100. Протокол передачи данных между контроллером и сервером осуществляется по HTTP 1.1.

Разработка программного обеспечения для контроллера на языке C, C++, разработка серверной части на языке программирования Java.

Представленный аппаратно-программный комплекс может найти применение как в личном приусадебном хозяйстве, так и в больших тепличных комплексах, а также в научно-исследовательских институтах и лабораториях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тигранян Р.* Микроклимат. Электронные системы обеспечения // Додека. 2005. 210 с.
2. Пат. на полезную модель 118719 Российская Федерация, МПК F 21 L 17/00. Световой прибор / Коваленко О.Ю., Ашрятов А.А., Медведева А.А., Афонин В.В., Сарычев П.А., Колмакова Е.Д. заявл. 7.09.2011. № 2011137114/07. опубл. 27.07.2012. Бюл. №21.

УДК 697.341

О. Ю. Марьясин

Ярославский государственный технический университет
Россия, Ярославль, e-mail: maryasinou@ystu.ru

НОВЫЙ ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ ЭНЕРГОМОДЕЛИРОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ

Рассмотрены популярные пакеты для энергомоделирования, основанные на системе EnergyPlus и инструменты для оптимизации энергопотребления и параметрического анализа проектных вариантов. Разработано приложение на языке Python, позволяющее использовать все возможности системы EnergyPlus и обеспечивающее интеграцию с программами оптимизации энергопотребления и параметрического анализа. Использование языка Python открывает широкие возможности по дополнению программы различными средствами для выполнения математических расчетов и визуализации, оптимизации и анализа данных, взаимодействия с другими системами моделирования и приложениями.

Ключевые слова: энергомоделирование, оптимизация энергопотребления, EnergyPlus, Python, EpPy.

O. Yu. Maryasin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: maryasinou@ystu.ru

NEW TOOL FOR ENERGY SIMULATION AND OPTIMIZATION OF ENERGY CONSUMPTION

The article considers popular packages for energy modeling based on the EnergyPlus system and tools for optimizing energy consumption and parametric analysis of design options. A Python application has been developed that allows you to use all the features of the EnergyPlus system and provides integration with energy optimization and parametric analysis programs. Using the Python language opens up wide possibilities for supplementing the program with various tools for performing mathematical calculations and visualization, optimizing and analyzing data, and interacting with other modeling systems and applications.

Keywords: energy simulation, optimization of energy consumption, EnergyPlus, Python, EpPy.

Проблемы сохранения окружающей среды и снижения коммунальных платежей требуют выполнения мер по энергосбережению и повышению энергетической эффективности при проектировании зданий. В то же

время необходимо гарантировать комфортную и здоровую среду в помещениях. Все это создает благоприятные условия для более широкого использования моделирования энергопотребления зданий (BEM – Building Energy Modeling). Энергомоделирование в России пока является добровольным делом, если только не нужно сертифицировать здание на соответствие “зеленым” стандартам [1].

Сегодня стало возможным построение модели энергопотребления здания уже на этапе предпроектных решений. Основное внимание при этом уделяется компоновке здания, ориентации и взаимодействию с окружающей средой. Чаще всего эти работы выполняются архитекторами, имеющими соответствующий опыт и понимание принципов моделирования. В ходе дальнейшего проектирования постоянно уточняются исходные данные для BEM-расчетов, результаты которых, в свою очередь, служат для детализации архитектуры и определения влияния на здание в течение жизненного цикла. На стадии “Проект”, как правило, расчеты уже выполняют инженеры, поскольку необходимо определить, какие инженерные системы лучше всего подходят для здания и параметры их работы. При проектировании систем отопления, вентиляции и кондиционирования (ОВК или HVAC – Heating, Ventilation, & AirConditioning), в том или ином виде, приходится выполнять расчеты, связанные с теплообменом, обеспечением качества воздуха в помещениях и энергосбережением.

Возможность построить и рассчитать единую энергомодель здания в актуальных условиях эксплуатации, с учетом динамики и реальной физики процессов, дает огромные возможности для принятия проектных решений и контроля их качества. Почасовые профили холодильных и отопительных нагрузок, эффективность рекуперации и тепловых насосов, естественное освещение и влияние на соседние здания, оптимальная ориентация и состав ограждающих конструкций – целый комплекс инженерных расчетов, которые невозможно провести вручную. Но главное, в ходе работы возможен выбор между многими вариантами и их компоновками.

В настоящее время существует множество специализированных пакетов для BEM и моделирования HVAC: TraneTRACE 700, EnergyPlus, ESP-r, IDAICE, TRNSYS и другие. Эти пакеты выполняют моделирование на основе системы дифференциальных и/или алгебраических уравнений, определяющих теплофизические характеристики зданий и HVAC систем, в том числе с заданными стратегиями эксплуатации и управления. Для моделирования микроклимата, энергопотребления здания и HVAC оборудования можно использовать и популярные пакеты для научных и инженерных расчетов, такие как MATLAB/Simulink и системы на базе языка Modelica. Для этого имеются различные специализированные библиотеки [2].

Однако применение ВЕМ систем для проведения энергомоделирования, по мнению авторов, является предпочтительным, по следующим причинам:

- ВЕМ системы, при возможности импортировать данные из информационной модели здания (Building Information Model – BIM), позволяют полностью учитывать конструкцию здания;
- энергомодели ВЕМ многократно проверены и верифицированы;
- разработка аналогичной по сложности энергомодели в ВЕМ гораздо менее трудоемка и требует меньшей квалификации пользователя в области компьютерного моделирования.

На сегодняшний день наиболее популярной из ВЕМ систем является свободно-доступная программа EnergyPlus [3]. Применение этой системы стало общепринятой практикой при проведении энергомоделирования зданий. EnergyPlus является свободно-доступным, с открытыми исходными кодами, кроссплатформенным приложением. EnergyPlus позволяет, на основании описания конструкции здания, материалов, инженерных систем здания и т.д., рассчитать значение отопительных и холодильных нагрузок, необходимых для поддержания заданного теплового режима, потребление энергии основным оборудованием здания, а также многие другие детали моделирования, которые необходимы для проверки, того что моделирование выполнено так, как будет эксплуатироваться фактическое здание. EnergyPlus использует сложные динамические комбинированные модели переноса тепла, влаги и газовых примесей (CO₂). Это позволяет EnergyPlus моделировать широкий спектр зданий и инженерных систем при различных условиях.

EnergyPlus не имеет графического интерфейса пользователя (GUI). Она предназначена, для того чтобы быть ядром системы моделирования. Входная и выходная информация программы представляет собой текстовые файлы в формате ASCII. Для пользователей, работающих в среде ОС Windows, EnergyPlus включает дополнительные утилиты EP-Launch, которая помогают открыть редакторы для входных и выходных файлов, открыть табличный процессор или Web-браузер для просмотра файлов с результатами или запустить программу просмотра для графического файла. Вид главного окна программы EP-Launch показан на рис. 1. Для удобства работы с EnergyPlus сторонними разработчиками разработаны приложения, реализующие графический интерфейс к EnergyPlus. Наиболее популярными из них являются программы DesignBuilder, Simergy, OpenStudio.

DesignBuilder [4] предоставляет удобную среду моделирования, в которой учитывается целый ряд данных об экономических и экологических показателях, таких как потребление энергии, данные о внутреннем комфорте и параметры инженерного оборудования. В результате моделирования определяются параметры внутреннего воздуха, такие как средние

температуры и влажность, расход тепла через ограждающие конструкции здания, данные по инфильтрации и вентиляции, значение отопительных и холодильных нагрузок, выбросы CO₂ и других загрязняющих веществ и многое другое. Данные могут отображаться в графическом или табличном виде и могут быть экспортированы в различные форматы. Возможности оптимизации DesignBuilder позволяют определить варианты с наилучшими комбинациями затрат энергии и уровня комфорта, а также сориентироваться в сложной взаимосвязи между целями проектирования, ограничениями и возможными вариантами проектирования. DesignBuilder является коммерческим продуктом.

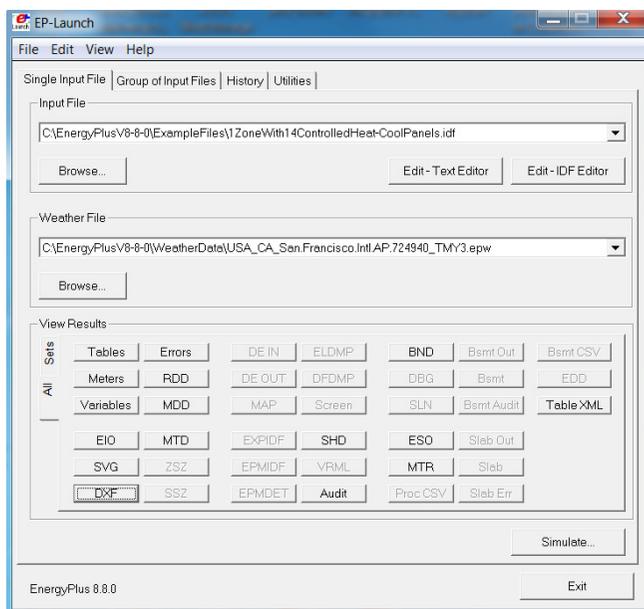


Рис. 1. Вид главного окна EP-Launch

OpenStudio [5] представляет собой свободно-доступное кроссплатформенное программное обеспечение с открытым программным кодом. OpenStudio использует для энергомоделирования систему EnergyPlus и кроме того может взаимодействовать с другими инструментами, например с Radiance для анализа освещенности помещений. OpenStudio предоставляет пользователям доступ к редактированию графиков загрузки здания, внутренних нагрузок и HVAC систем с помощью интуитивно понятного интерфейса, а также включает модули визуализации для просмотра ре-

зультатов моделирования в удобных графических форматах. В OpenStudio имеется возможность создавать и запускать сценарии (Open Studio measures) для работы с моделью. Имеется большая библиотека таких сценариев и возможность проведения параметрического анализа на их основе.

Simergy [6] – это еще один графический интерфейс для EnergyPlus. Simergy позволяет выполнить анализ альтернатив, связанных с геометрией здания, процентным соотношением окон к площади стен, внешним затенением, аспектами дневного освещения, наличием HVAC оборудования и т.д. В один проект может быть включено сразу несколько вариантов с разными параметрами, для того чтобы пользователь мог провести сравнительный анализ на ранних стадиях проектирования. Simergy имеет большой набор библиотек и шаблонов, в частности, шаблонов HVAC систем. Simergy также как и DesignBuilder является коммерческим продуктом.

В настоящее время, во многих случаях, использование энергомоделирования для получения регламентированных технико-экономических показателей уже становится недостаточным. Поэтому все чаще при проектировании зданий прибегают к использованию оптимизации энергопотребления и параметрическому анализу проектных вариантов. Параметрический анализ часто необходим для изучения вариантов проектирования, в случаях, когда методы оптимизации могут быть недоступны или результат оптимизации вызывает сомнения. Если применить параметрический анализ ко всем проектным параметрам одновременно, то формируется исчерпывающий поиск, который на достаточно мелкой сетке гарантирует поиск глобального оптимального решения. Оптимизация энергопотребления и параметрический анализ позволяют найти оптимальное сочетание технических решений по ограждающим конструкциям и инженерным системам здания. Это дает возможность экономить от 30 до 75% энергозатрат [7]. Проведение параметрического анализа и оптимизации энергопотребления является одним из этапов разработки энергоэффективного здания.

Хотя перечисленные ранее системы энергомоделирования DesignBuilder, Simergy и OpenStudio включают возможности оптимизации энергопотребления (DesignBuilder) и параметрического анализа проектных вариантов, но две их них являются коммерческими, а в системе OpenStudio выполнение параметрического анализа требует написания сценариев и поэтому не является тривиальной задачей. Кроме того, по мнению пользователей специализируемых форумов, программы оболочки, позволяют использовать далеко не все возможности системы EnergyPlus. В таких случаях, для проведения оптимизации энергопотребления и параметрического анализа, все чаще находят применение системы, основанные на анализе информации из текстовых входных и выходных файлов EnergyPlus. К таким системам относятся свободно-доступные программы GenOpt и jEPlus.

GenOpt [8] – это программа оптимизации для поиска минимума целевой функции, которая задана неявно, а может быть оценена внешней системой моделирования, такой как EnergyPlus, TRNSYS, Dymola, IDA-ICE или DOE-2. Она была разработана для задач оптимизации, в которых определение целевой функции связано с большими вычислительными затратами, а ее производные недоступны или могут не существовать. Вид главного окна GenOpt показан на рис. 2. GenOpt можно связать с любой системой моделирования, которая считывает свои входные данные из текстовых файлов и записывает полученные результаты снова в текстовые файлы. Независимые переменные, по которым выполняется поиск, могут быть непрерывными (возможно, с нижними и верхними границами), дискретными или обоих типов. Ограничения на зависимые переменные могут быть реализованы с использованием штрафных или барьерных функций. Программа GenOpt написана на Java и поэтому не зависит от компьютерной платформы.

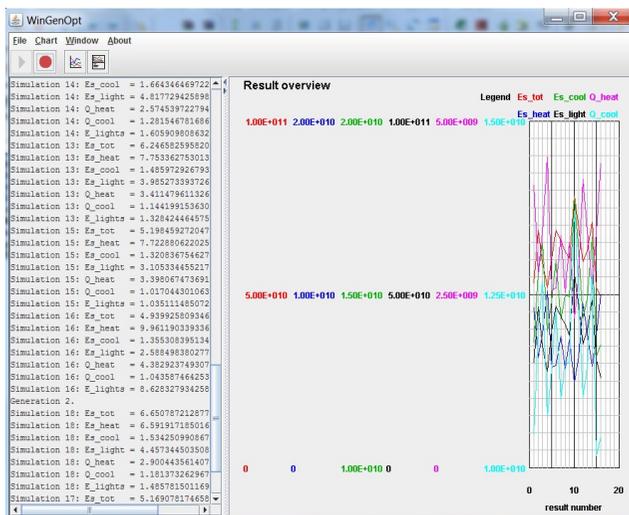


Рис. 2. Вид главного окна GenOpt

Программа jERPlus [9] была разработана как инструмент для выполнения комплексного параметрического анализа энергопотребления с помощью EnergyPlus. jERPlus предоставляет собой графический интерфейс для определения параметров проектирования, управления прогонами моделирования и вывода результатов. Вид главного окна jERPlus показан на рис. 3.

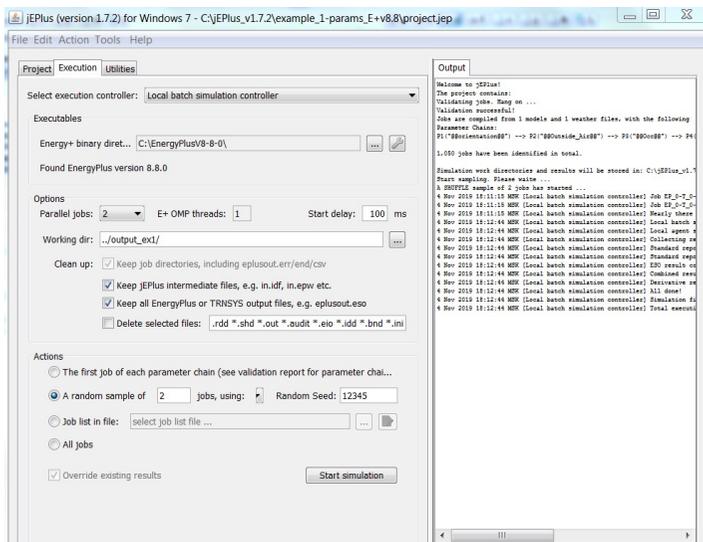


Рис. 3. Вид главного окна jEPlus

Результаты моделирования представляются в виде папок с различными файлами EnergyPlus и файлов в формате CSV. С помощью jEPlus могут быть созданы тысячи различных вариантов моделирования. Инструмент написан на Java, как проект с открытым исходным кодом. Он работает со всеми версиями EnergyPlus на платформах Windows, Mac и Linux.

Обеспечить использование всех возможностей системы EnergyPlus, с одной стороны, и интеграцию с системами GenOpt и jEPlus, с другой, позволяет разработанное автором приложение на языке Python. Данное приложение помогает пользователю выполнять редактирование входных IDF файлов системы EnergyPlus, запускать энергомоделирование, просматривать результаты моделирования, подготавливать файлы проектов и запускать приложения jEPlus и GenOpt для проведения анализа вариантов и оптимизации энергопотребления. Вид вкладки “Редактор и моделирование” разработанной программы показан на рис. 4. На данной вкладке можно выбирать IDF файл, просматривать его содержимое и изменять значения полей как в приложении IDFEditor системы EnergyPlus. Здесь же можно выбрать EPW файл с погодными данными и запустить энергомоделирование. Результаты моделирования включают множество текстовых файлов, а также файлов форматов CSV и/или htm, которые можно открыть в текстовом поле, в MSExcel или в любом Web-браузере непосредственно из приложения.

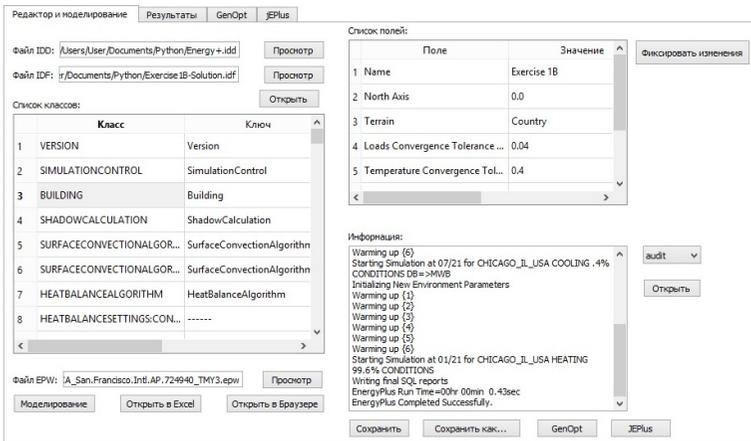


Рис. 4. Вид вкладки “Редактор и моделирование”

Просмотреть результаты моделирования в удобном табличном виде можно на вкладке “Результаты”. Вид данной вкладки показан на рис. 5. По сравнению с использованием Web-браузера такой способ обеспечивает быстрый доступ к необходимой таблице и просмотр ее содержимого.

Разработанное приложение позволяет значительно упростить подготовку шаблонов для jEPlus. Так как стандартный редактор IDFEditor не позволяет создавать шаблоны jEPlus, то для этих целей приходится использовать обычные текстовые редакторы типа Notepad, что существенно снижает удобство и скорость подготовки шаблонов. Дополнительно к шаблону, разработанное приложение позволяет создать заготовку файла проекта jEPlus, который затем можно открыть в jEPlus. Это ускоряет работу с проектом, так как часть параметров настраивается уже на этапе создания проекта. Аналогично, можно создать заготовку инициализационного файла и для системы GenOpt.

Одной из основных библиотек, использованных при разработке приложения, является библиотека ErPy [10]. ErPy позволяет эффективно работать с входными и выходными файлами системы EnergyPlus. С помощью ErPy можно осуществлять навигацию и поиск объектов во входных IDF файлах, выполнять редактирование IDF файлов, просматривать информацию из выходных файлов формата htm. Кроме того ErPy позволяет:

- делать большое количество изменений в IDF файле;
- использовать условия и фильтры при внесении изменений в IDF файл;

- вносить изменения сразу в несколько файлов IDF;
- основываясь на результатах моделирования EnergyPlus, сгенерировать входной файл для следующего прогона моделирования; и многое другое.

Редактор и моделирование Результаты GenOpt jEPlus

Открыть

Список таблиц:

- Site and Source Energy
- Site to Source Energy Conversion Factors
- Building Area
- End Uses
- End Uses By Subcategory
- Utility Use Per Conditioned Floor Area
- Utility Use Per Total Floor Area
- Electric Loads Satisfied
- On-Site Thermal Sources
- Water Source Summary
- Setpoint Not Met Criteria
- Comfort and Setpoint Not Met Summary
- General
- Window-Wall Ratio
- Conditioned Window-Wall Ratio
- Skylight-Roof Ratio
- Zone Summary
- End Uses
- End Uses By Subcategory
- Source Energy End Use Components Summ.
- Source Energy End Use Components Per Coi
- Source Energy End Use Components Per Tot
- ZONEHVAC:BASEBOARD:CONVECTIVE:ELEC
- AirTerminal:SingleDuct:VAV:NoReheat

Таблица:

	Electricity [W]	Natural Gas [W]	Propane [W]
1 Time of Peak	19-JAN-12:00	-	-
2 Heating	0.0	0.0	0.0
3 Cooling	10761.16	0.0	0.0
4 Interior Lighting	0.0	0.0	0.0
5 Exterior Lighting	0.0	0.0	0.0
6 Interior Equipment	90962.29	0.0	0.0
7 Exterior Equipment	0.0	0.0	0.0
8 Fans	5915.34	0.0	0.0
9 Pumps	0.0	0.0	0.0
10 Heat Rejection	0.0	0.0	0.0
11 Humidification	0.0	0.0	0.0
12 Heat Recovery	0.0	0.0	0.0
13 Water Systems	0.0	0.0	0.0
14 Refrigeration	0.0	0.0	0.0

Рис. 5. Вид вкладки “Результаты”

С помощью библиотеки ErPy можно выполнять большинство операций с файлами EnergyPlus с использованием минимального числа строк кода. Например, для загрузки содержимого IDF файла в память программы достаточно выполнить следующий Python код

```
IDF.setidfname(self.ui.lineIDDEdit.text())
self.idf1 = IDF(self.ui.lineIDFEdit.text())
objects = self.idf1.idfobjects
```

В первой строке загружается файл словаря данных системы EnergyPlus. Расположение файла в файловой системе компьютера определяется в текстовой строке, реализуемой компонентом lineIDDEdit. Во второй строке загружается содержимое IDF файла и присваивается переменной idf1. В последней строке в переменную objects передается список всех объектов системы EnergyPlus.

В настоящее время разработка программы еще не завершена. Планируется развитие программы в направлении углубления поддержки возможностей и обеспечения удобства работы с системой EnergyPlus, взаимодействия с системами GenOpt и jEPlus, добавления развитых

средств визуализации результатов энергомоделирования, собственных средств оптимизации энергопотребления и параметрического анализа. Использование популярного языка Python открывает широкие возможности по дополнению программы различными средствами для выполнения математических расчетов и визуализации, оптимизации и анализа данных, взаимодействия с другими популярными системами моделирования и приложениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Герасимов Н.А.* Моделирование энергопотребления зданий – краеугольный камень зеленого проектирования для инженеров // Энергосбережение. 2014. № 4, С. 28-33.
2. *Марьясин О.Ю.* Пакеты компьютерного моделирования HVAC систем и энергопотребления зданий / О.Ю. Марьясин, А.С. Колодкина // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 306–315.
3. EnergyPlus [Электронный ресурс]. URL: <https://energyplus.net/>(дата обращения 27.10.2019)
4. DesignBuilder Software Ltd - Home [Электронный ресурс]. URL: <https://designbuilder.co.uk/> (дата обращения 27.10.2019)
5. OpenStudio [Электронный ресурс]. URL: <https://www.openstudio.net/> (дата обращения 27.10.2019)
6. DigitalAlchemy [Электронный ресурс]. URL: <https://d-alchemy.com/products/simergy> (дата обращения 27.10.2019)
7. *Hayter S.J.* Энергоэффективное здание: оптимизация теплозащиты и систем ОВК / S. J. Hayter, P.A. Torcellini, R. Judkoff // Энергосбережение. 2000. № 4, С. 28–33.
8. GenOpt [Электронный ресурс]. URL: <https://simulationresearch.lbl.gov/GO/>(дата обращения 27.10.2019)
9. jEPlus.org [Электронный ресурс]. URL: <http://www.jeplus.org/wiki/doku.php?id=start> (дата обращения 27.10.2019)
10. Welcome to eppy's documentation! [Электронный ресурс]. URL: <https://eppy.readthedocs.io/en/latest/index.html> (дата обращения 27.10.2019)

УДК 004.932

А. Б. Раухваргер

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *email: abrrs@yandex.ru*

**ОБ УПРАВЛЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ ПИКСЕЛЯ
В RGB-ПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ЯРКОСТНО-КОНТРАСТНЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЦВЕТНЫХ ЦИФРОВЫХ
ИЗОБРАЖЕНИЙ И АЛГОРИТМЕ ЧАСТОТНО-
ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО РАСТЯЖЕНИЯ**

Исследованы вопросы движения цветного пикселя в RGB-пространстве для обеспечения требуемого алгоритмами яркостно-контрастных преобразований изменения яркости пикселя. Определены траектории такого движения с учетом возможности присутствия скрытых артефактов в изображении. Предложен новый алгоритм яркостно-контрастных преобразований, предназначенный для усиления различимости деталей цветных изображений, основанный на увеличении расстояний по шкале яркости между наиболее часто встречающимися в изображении значениями. Проведены исследования результатов применения предложенных методов.

Ключевые слова: пиксель, RGB-пространство, цифровое изображение, алгоритмы обработки изображений.

A. B. Raukhvarger

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, *e-mail: abrrs@yandex.ru*

**ABOUT THE CONTROL OF MOVEMENT OF A PIXEL IN RGB
SPACE IN BRIGHTNESS CONTRAST TRANSFORMATIONS OF
COLOR DIGITAL IMAGES AND THE ALGORITHM OF
FREQUENCY PROPORTIONAL STRETCHING**

The problems of motion of a color pixel in RGB-space to provide the required by algorithms of brightness-contrast transformations of pixel brightness changes are investigated. The trajectories of such motion are determined taking into account the possibility of the presence of hidden artifacts in the image. A new algorithm of brightness-contrast transformations is proposed, the algorithm is designed to enhance the distinguishability of details of color images, based on increasing the distance on the brightness scale between the most common values in the image. Researches of results of application of the offered methods are carried out.

Keywords: pixel, RGB-space, digital image, image processing algorithms.

Введение

Алгоритмы, производящие согласованные изменения яркостей пикселей цифровых изображений, предназначены в основном для усиления различимости деталей изображений [1-9]. Первоначальное тестирование таких алгоритмов следует проводить на изображениях в оттенках серого [3-10], так как переход на цветные изображения порождает дополнительные проблемы ввиду неоднозначности цветовой реализации требуемой яркости каждого пикселя. При этом следует учитывать возможности появления цветовых артефактов. Однако конечная цель таких алгоритмов предполагает использование их именно для цветных изображений.

В настоящей работе изменение яркости пикселя рассматривается как движение пикселя в RGB-пространстве. Определены траектории такого движения для максимального сохранения не связанных с яркостью параметров цвета и их возможные корректировки для устранения артефактов, обусловленных неточностью получения слабоконтрастных областей изображения и хранением изображений в сжатых форматах с неточным воспроизведением.

Предложен новый алгоритм яркостно-контрастных преобразований, производящий растяжение яркостной гистограммы увеличением разностей яркости соседних пикселей пропорционально их частотам.

1. Движения пикселя в RGB-пространстве

На рис. 1 изображен допустимый куб в RGB-пространстве, в рамках которого могут располагаться пиксели. Сохранению хроматичности (постоянное значение Hue в моделях HSV и HSL) соответствует закрашенный плоский треугольник, проходящий через начальное положение пикселя и линию серого.

Уравнение этой плоскости можно получить известными средствами аналитической геометрии, что дает следующее ограничение на возможные перемещения пикселя

$$(g_0 - b_0)\Delta r + (b_0 - r_0)\Delta g + (r_0 - g_0)\Delta b = 0, \quad (1)$$

где Δr , Δg , Δb – изменения соответствующих координат пикселя в RGB пространстве.

Наблюдаемая яркость пикселя определяется выражением

$$y = k_r r + k_g g + k_b b, \quad (2)$$

где k_r , k_g , k_b - коэффициенты, учитывающие восприятие цвета человеком и особенности условий воспроизведения, для которых выполняется соотношение

$$k_r + k_g + k_b = 1. \quad (3)$$

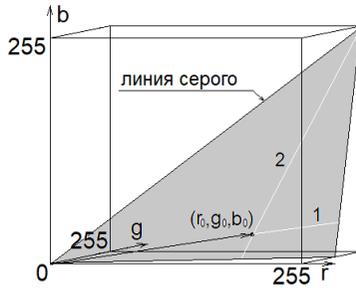


Рис. 1. Иллюстрация перемещений в RGB пространстве

Из равенства (2) следует дополнительное ограничение на перемещение пикселя в RGB пространстве для обеспечения заданного изменения яркости Δy

$$k_r \Delta r + k_g \Delta g + k_b \Delta b = \Delta y . \quad (4)$$

Если перемещение пикселя происходит только в объеме допустимого куба, не выходя на грани и ребра, можно задать дополнительное условие сохранения чистоты (насыщенности) цвета, чему соответствует движение вдоль радиус-вектора начальной точки (прямая 1 на рис. 1). Тогда перемещение определяется простыми выражениями

$$\Delta r = q r_0, \Delta g = q g_0, \Delta b = q b_0 . \quad (5)$$

Выражения (5) автоматически удовлетворяют (1), а подстановка их в (4) приводит к определению коэффициента q :

$$q = \frac{\Delta y}{y_0} . \quad (6)$$

При этом, однако, могут возникать артефакты следующего рода.

В очень темных слабоконтрастных областях изображения могут содержаться не видимые глазом дефекты фотографирования и хранения в сжатых форматах, состоящие в малом отклонении цвета некоторых пикселей от общего фона. При увеличении яркости с сохранением насыщенности, в этом случае, могут возникать точки и пятна, не соответствующего общему оттенку цвета области. Этого можно попытаться избежать уменьшением насыщенности. Наиболее удобно это сделать, составляя вектор перемещения из перемещения вдоль вектора начального положения и перемещения вдоль прямой, соединяющей начальное положение с точкой белого (прямая 2 на рис. 1), что гарантирует невозможность выхода из допустимого треугольника.

При перемещении только вдоль прямой 2 получим

$$\Delta r = f \cdot (255 - r_0), \Delta g = f \cdot (255 - g_0), \Delta b = f \cdot (255 - b_0). \quad (7)$$

Выражения (7) тоже автоматически удовлетворяют (1), а подстановка их в (4) определяет коэффициент f :

$$f = \frac{\Delta y}{255 - y_0}. \quad (8)$$

Составляя линейную комбинацию перемещений по выражениям (5) и (7), с учетом (6) и (8), получим

$$\begin{aligned} \Delta r &= \left[(1 - \eta)r_0 + \eta y_0 \frac{255 - r_0}{255 - y_0} \right] q, \\ \Delta g &= \left[(1 - \eta)g_0 + \eta y_0 \frac{255 - g_0}{255 - y_0} \right] q, \\ \Delta b &= \left[(1 - \eta)b_0 + \eta y_0 \frac{255 - b_0}{255 - y_0} \right] q, \end{aligned} \quad (9)$$

где η - задаваемый коэффициент в диапазоне от 0 до 1, определяющий степень уменьшения насыщенности.

Рассматриваемые артефакты актуальны только для темных пикселей, поэтому кроме параметра η нужно еще задавать критическое значение начальной яркости $y_{кр}$, ниже которого следует вместо (5) использовать (9). Назовем этот параметр критерием снижения насыщенности.

При уменьшении яркости пикселя, для любой начальной яркости y_0 и $|\Delta y| \leq y_0$, пиксель может быть безопасно перемещен по формулам (5).

При увеличении яркости возникает дополнительная проблема, связанная с возможностью перехода за грани допустимого куба при перемещении по формулам (5) или (9). В этом случае сохранение насыщенности при обеспечении требуемого изменения яркости невозможно. Предлагается следующая последовательность действий: в соответствии с заданным формулами (5) или (9) направлением движения пиксель перемещается только до пересечения с гранью или с ребром допустимого куба, а остаток требуемого изменения яркости реализуется движением по направлению к точке белого по грани или по ребру.

Если $\Delta y > 0$, определяется минимальная из начальных координат $m = \min(r_0, g_0, b_0)$, а также какая именно из координат имеет минималь-

ное значение. Для преобразованного по формулам (5) или (9) значения этой координаты $m_1 = m_0 + \Delta t$ производится проверка условия $m_1 \leq 255$. Если это условие не выполняется, из формулы, соответствующей этой координате в (5) или (9), определяется такое изменение яркости Δy_1 , при котором для данной координаты будет получен результат $m_1 = 255$. Другие значения пересчитываются по соответствующим формулам с изменением яркости Δy_1 . В результате будет получена точка на грани или на ребре. Далее производится вычисление по формулам (7) из этой точки для изменения яркости $\Delta y_2 = \Delta y - \Delta y_1$, что соответствует движению по грани или по ребру к точке белого.

Перед выполнением вычислений необходимо проверить требуемое конкретным алгоритмом изменение яркости данного пикселя на предмет того, уложится ли новое значение яркости $y_0 + \Delta y$ в допустимый диапазон $[0, 255]$. Если оно в данный диапазон не укладывается, то новые координаты пикселя задаются граничными значениями: 0, если происходит выход в отрицательную область, или 255, если новое значение яркости превосходит 255.

2. Краткий обзор известных алгоритмов яркостно-контрастных преобразований

Прежде, чем изложить новый алгоритм яркостно-контрастных преобразований, рассмотрим наиболее часто используемые известные алгоритмы и основные направления их модификации.

Кратное изменение яркости.

Яркость каждого пикселя изменяется пропорционально его исходной яркости

$$z = Q_y y, \quad (10)$$

где y – исходная яркость пикселя, z – новая яркость пикселя, Q_y – задаваемый коэффициент пропорциональности.

Этот алгоритм при надлежащем подборе коэффициента Q_y может усиливать различимость деталей в темных областях изображения, но в ярких областях детали вообще могут исчезать в связи с необходимостью замены новых значений яркости, превышающих 255, значением 255. Такие области становятся белыми. Минусом является и то, что при изменении яркости не учитывается, как часто встречаются в изображении те или иные значения яркости, так что визуального выделения отдельных объектов изображения не происходит.

Телевизионный алгоритм изменения контраста

Яркость каждого пикселя изменяется пропорционально отклонению его исходной яркости от средней яркости в изображении

$$z = y + Q_k (y - \bar{y}), \quad (11)$$

где \bar{y} – средняя яркость; Q_k – задаваемый коэффициент.

Лучше всего этот алгоритм усиливает различимость деталей (при соответствующем подборе коэффициента) для слабоконтрастных изображений, целиком лежащих в средней по шкале яркостей области, но в других случаях может и ухудшать различимость.

Алгоритм можно улучшить, сочетая его с кратным изменением яркости, так что вместо (11) новая яркость каждого пикселя будет задаваться выражением

$$z = Q_y (y + Q_k (y - \bar{y})). \quad (12)$$

Задаваемые параметры в (12) можно связать с исходными и ожидаемыми статистическими характеристиками изображен

$$Q_y = \frac{\bar{z}}{\bar{y}}, \quad Q_k = \frac{1}{Q_y} \frac{\sigma_z}{\sigma_y} - 1,$$

где \bar{z} - ожидаемая после преобразования средняя яркость пикселей; σ_y - среднеквадратичное отклонение яркостей пикселей в исходном изображении; σ_z - ожидаемое после преобразования среднеквадратичное отклонение яркостей пикселей. Таким образом, появляется возможность управления преобразованием на основе статистических характеристик исходного изображения и ожидаемых статистических характеристик нового изображения. Однако это не гарантирует усиление различимости деталей во всех областях изображения. В связи с этим разрабатываются и исследуются возможности локального применения такого подхода [6,7].

Преобразование гистограмм. Приведение к равномерному распределению

Эта группа алгоритмов основана на известном из теории вероятностей методе преобразования распределений непрерывных случайных величин, гарантирующем монотонное возрастание новой случайной величины при возрастании исходной.

В качестве исходной выборки рассматривается совокупность частот пикселей с заданными округленными до целого значениями яркостями, называемая яркостной гистограммой изображения

$$\omega_i = \frac{n_i}{n}, \quad (13)$$

где n_i - количество пикселей с яркостью i ; n - полное количество пикселей в изображении.

Наиболее часто используется приведение к равномерному распределению, для которого теория вероятностей дает

$$z = 255 \sum_{i=1}^y \omega_i .$$

Но равномерное распределение не содержит управляющих параметров и будет любое изображение приближать к заданной средней яркости $255/2 = 127,5$ и к заданной контрастности, определяемой среднеквадратичным отклонением $255/\sqrt{12} \approx 73,6$. Различимость деталей на изображениях с большим среднеквадратичным отклонением будет ухудшаться.

В работах [3–5, 8] исследованы и реализованы возможности приведения гистограммы изображения к другим распределениям, содержащим управляющие параметры.

3. Алгоритм частотно-пропорционального растяжения

Идея предлагаемого алгоритма состоит в том, чтобы увеличивать различие яркостей между пикселями с наиболее часто встречающимися значениями исходных яркостей.

Идея реализована следующим образом. Сначала вычисляется гистограмма округленных значений яркости (13). Далее производится изменение расстояний между яркостями по следующему правилу

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \\ d_i &= 0,5 + Q \cdot 255 \omega_i, \quad i \in [0, 255], \\ u_i &= u_{i-1} + d_{i-1} + d_i, \quad i \in [1, 255]. \end{aligned}$$

Новая шкала яркости u может выйти за предел 255, или наоборот сжаться. В связи с этим, она приводится к исходному размеру:

$$V = \frac{255}{u_{255}}, \quad z_{255} = 255, \quad z_i = V \cdot u_i \quad \text{при} \quad i \in [0, 254].$$

При наличии на гистограмме яркостей пробелов они перераспределятся так, чтобы пробелы между часто встречающимися значениями и соседними с ними увеличились. При отсутствии пробелов или при их недостаточности могут исчезнуть редко встречающиеся яркости. Это будет означать утрату мелких, возможно в принципе не обнаружимых глазом, деталей изображений, а также возможно точечных артефактов. Детали же с достаточно часто встречающимися яркостями будут более различимы в любых областях изображения.

4. Сравнительное исследование и примеры результатов

С помощью специально разработанной программы, реализующей функцию движения пикселя, описанную в первом разделе, алгоритм кратного изменения яркости, телевизионный алгоритм изменения контраста, приведение к равномерному распределению и алгоритм частотно-пропорционального растяжения, проводилась обработка ряда изображений.

Результаты свидетельствуют об эффективности функции движения пикселя и преимуществах алгоритма частотно-пропорционального растяжения.

Приведем некоторые примеры.

На рис. 2 приведена исходная фотография “Луг”.



Рис. 2. Исходное изображение “Луг”

Обработка алгоритмом кратного изменения яркости с коэффициентом 3 (рис. 3, *а*) усиливает различимость на земле, но облака на небе становятся совершенно неразличимыми.

Телевизионный алгоритм (рис. 3, *б*) в данном случае не дает положительного эффекта, а только ухудшает различимость, что характерно для изображений с явно выраженными светлой и темной частями.

Приведение к равномерному распределению (рис. 3, *в*) значительно усиливает различимость как на земле, так и на небе, но еще более это достигается частотно-пропорциональным алгоритмом (рис. 3, *г*), который к тому же обеспечивает большую общую яркость.

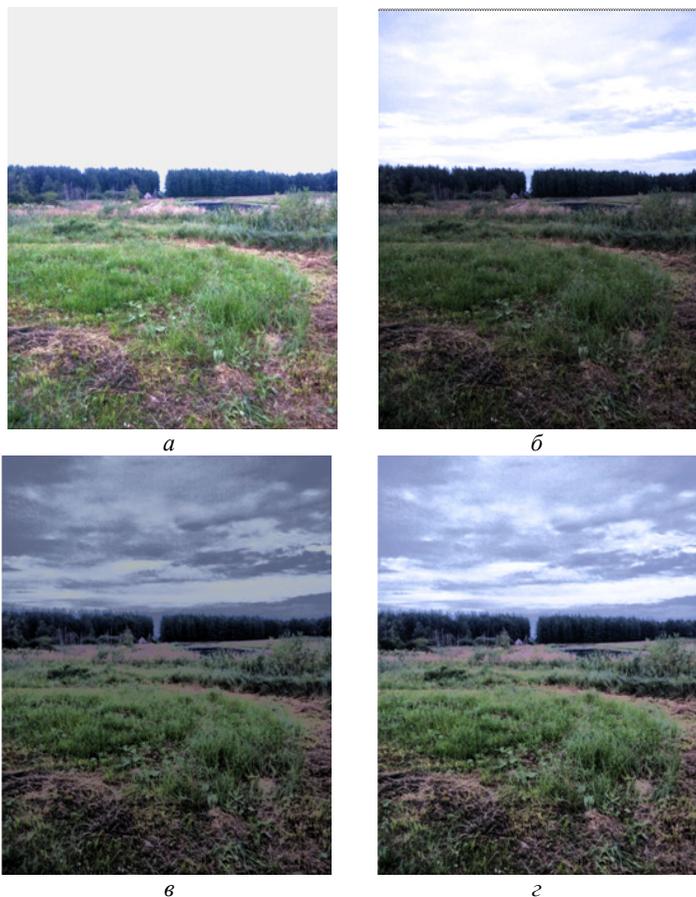


Рис. 3. Результаты обработки изображения “Луг”:
а - кратное увеличение яркости при $Q_y = 3$;
б – телевизионный алгоритм при $Q_k = 0,3$;
в – приведение к равномерному распределению;
г – частотно-пропорциональное растяжение при $Q = 3$

Ночная фотография сосны и результат ее обработки телевизионным алгоритмом приведены на рис. 4, а и б.

Значительно усилилась различимость веток, а также появилась трава на земле, но темный фон на заднем плане стал еще темнее, никакие объекты на заднем плане не проявились.

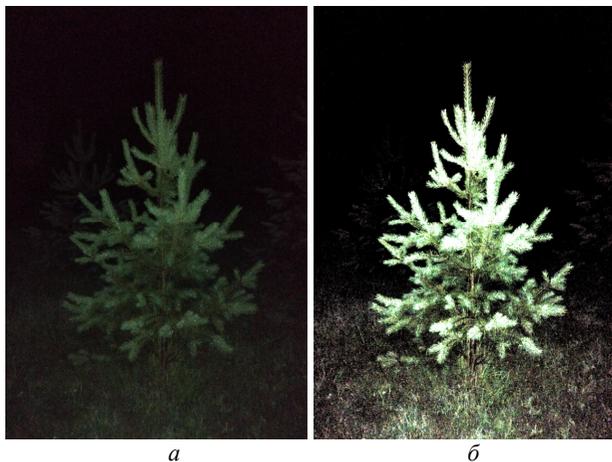


Рис. 4. Исходное изображение “Сосна” (а) и его обработка телевизионным алгоритмом при $Q_x = 5$ (б)

Использование других алгоритмов (рис. 5) обнаруживает еще две сосны на заднем плане, а также слабый силуэт леса в отдалении.

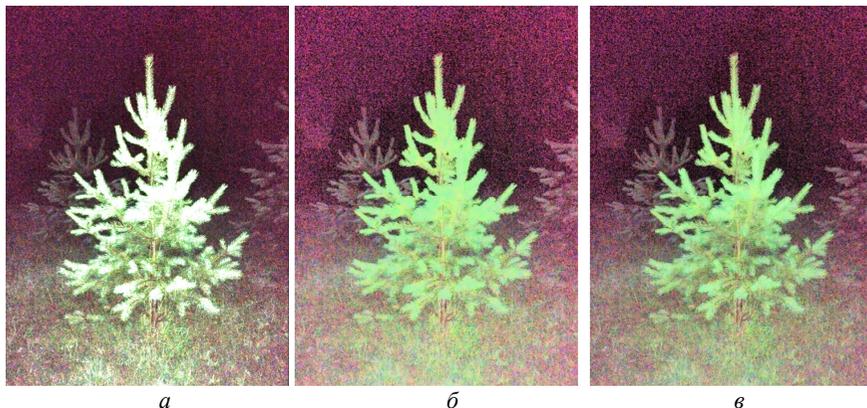


Рис. 5. Результаты обработки изображения “Сосна” без снижения насыщенности:

- a* – кратное увеличение яркости при $Q_x = 7$;
- б* – приведение к равномерному распределению;
- в* – частотно-пропорциональное растяжение при $Q = 2$

Кратное увеличение яркости (рис. 5, *a*) более контрастно воспроизводит траву на земле, по сравнению с приведением к равномерному распределению (рис. 5, *б*) и частотно-пропорциональным алгоритмом (рис. 5, *в*), но делает часть веток сосны совершенно белыми, а также гораздо слабее проявляет силуэт леса в отдалении.

Во всех результатах проявляются артефакты – множество красноватых точек на темном фоне, но при использовании частотно-пропорционального алгоритма они проявляются слабее, чем при приведении к равномерному распределению.

При обработке со снижением насыщенности (рис. 6) красноватость фона наиболее ослабевает при использовании частотно-пропорционального алгоритма.

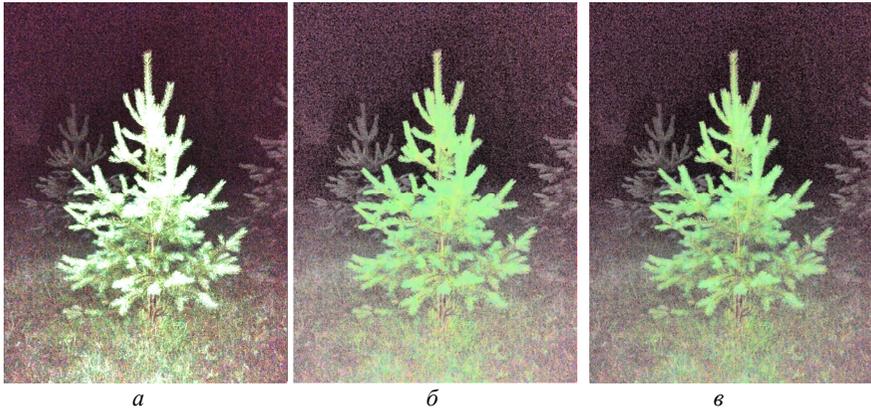


Рис. 6. Результаты обработки изображения “Сосна” со снижением насыщенности:

a – кратное увеличение яркости при $Q_y = 7, \eta = 0,5, y_{кр} = 20$;

б – приведение к равномерному распределению, $\eta = 0,7, y_{кр} = 30$;

в – частотно-пропорциональное растяжение при $Q = 2, \eta = 0,7, y_{кр} = 30$

Ночная фотография автомобиля и результат ее обработки телевизионным алгоритмом приведены на рис. 7, *a* и *б*. Телевизионный алгоритм обнаруживает форму автомобиля, двери домика за ним, но не все части автомобиля различимы, неразличимы и детали на земле.

На рис. 8 представлены результаты обработки этого изображения другими алгоритмами без снижения насыщенности.

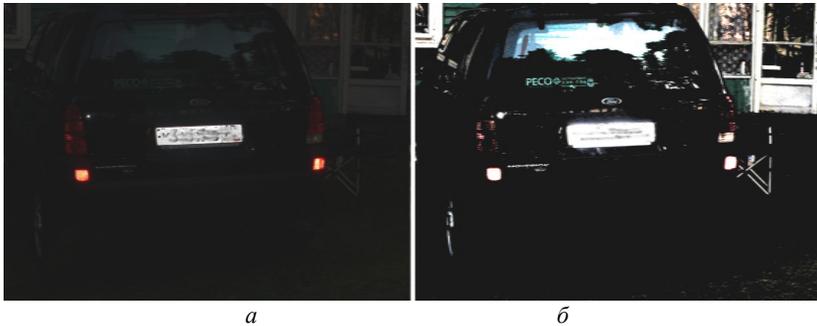


Рис. 7. Исходное изображение “Автомобиль” (а) и его обработка телевизионным алгоритмом при $Q_k = 20$ (б)

При кратном увеличении яркости (рис. 8, а) меньше артефактов, чем при использовании приведения к равномерному распределению (рис. 8, б) и частотно-пропорционального растяжения (рис. 8, в), но неразличимы детали поверхности земля в тени корпуса и слабо различимо отражение на заднем стекле и на корпусе. Артефакты более всего присутствуют на результате обработки приведением к равномерному распределению в виде неестественных включений разного цвета на деталях корпуса.

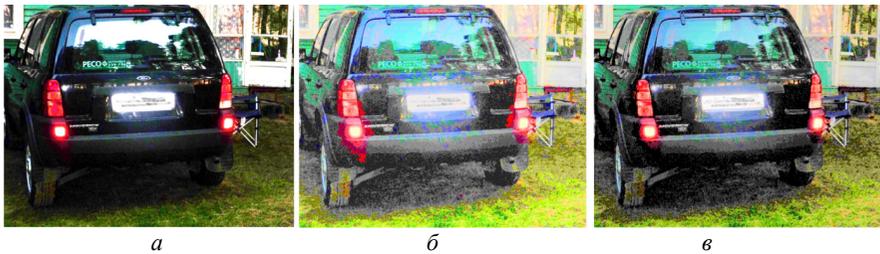


Рис. 8. Результаты обработки изображения “Автомобиль” без снижения насыщенности:

- a* – кратное увеличение яркости при $Q_y = 20$;
- б* – приведение к равномерному распределению;
- в* – частотно-пропорциональное растяжение при $Q = 5$

Частичное устранение артефактов обработками со снижением насыщенности (рис. 9) дает результаты, однозначно показывающие преимущество алгоритма частотно-пропорционального растяжения.

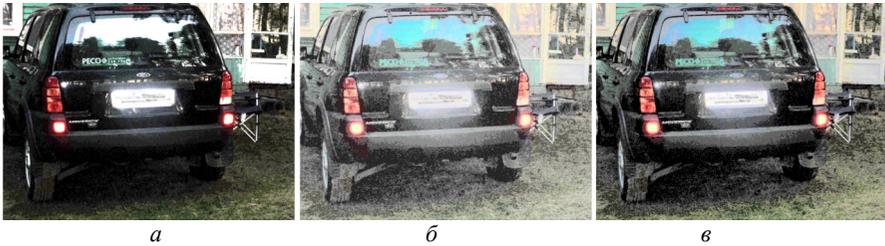


Рис. 9. Результаты обработки изображения “Автомобиль” со снижением насыщенности:

- а* – кратное увеличение яркости при $Q_y = 20$, $\eta = 0,7$, $y_{кр} = 10$;
б – приведение к равномерному распределению, $\eta = 0,9$, $y_{кр} = 10$;
в – частотно-пропорциональное растяжение при $Q = 5$, $\eta = 0,8$, $y_{кр} = 10$

Заключение

Алгоритм, основанный на рассмотренных аспектах движения пикселя в RGB-пространстве, позволяет успешно реализовывать алгоритмы яркостно-контрастных преобразований для цветных изображений.

Предложенный алгоритм частотно-пропорционального растяжения обладает рядом преимуществ по сравнению с другими алгоритмами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гонсалес Р.* Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. М.: Техносфера. 2012. 1104 с.
2. *Фисенко В.Т.* Компьютерная обработка и распознавание изображений / В.Т. Фисенко, Т.Ю. Фисенко. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2008. 192 с.
3. *Раухваргер А.Б.* О регулировании контраста черно-белого изображения с использованием нормального закона распределения / А.Б. Раухваргер, Д.А. Дудин // Математика и естественные науки. Теория и практика. Вып. 13. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2018. С. 230-236.
4. *Раухваргер А.Б.* Анализ условных интервальных дисперсий яркости на результатах контрастной обработки изображений / А.Б. Раухваргер, Д.А. Дудин // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф. В 12 т. Т. 6. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2019. С. 38-41.
5. *Раухваргер А.Б.* Обработка цифровых изображений приведением гистограммы яркости к двухуровневому кусочно равномерному распределению / А.Б. Раухваргер, Н.А. Пошехонов // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф. В 12 т. Т. 6 / под общ. ред. А.А. Большакова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2019. С. 42-45.
6. *Раухваргер А.Б.* Алгоритм реализации яркостно-контрастной лупы для усиления локальной различимости деталей цифровых изображений / А.Б. Раухваргер

- гер, П.А. Дурандин // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф. В 12 т. Т. 7 / под общ. ред. А.А. Большакова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2019. С. 3-6.
7. Раухваргер А.Б. Алгоритм локально-фрагментарного изменения контраста цифрового изображения / А.Б. Раухваргер, Р.И. Абунагимов // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф. В 12 т. Т. 7 / под общ. ред. А.А. Большакова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2019. С. 7-10.
 8. Раухваргер А.Б. О приведении гистограммы яркости цифрового изображения к симметричному относительно центра диапазона яркости параболическому распределению / А.Б. Раухваргер, А.А. Елисеев // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф. В 12 т. Т. 10 / под общ. ред. А.А. Большакова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2019. С. 64-67.
 9. Раухваргер А.Б. Об управлении яркостью и контрастом цифрового изображения преобразованием яркости пикселей степенной функцией / А.Б. Раухваргер, В.В. Мартыанов // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф. В 12 т. Т. 10 / под общ. ред. А. А. Большакова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2019. С. 68-71.
 10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018666658 РФ. Регулировка контраста черно-белых изображений с использованием непрерывных законов распределения (нормального, Рэлея, равномерного) / Дудин Д.А., Раухваргер А.Б.; зарегистр. 03.12.2018.

Содержание

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

1. **Ананьина С.А., Абрамов В.В.** О существовании седловой точки функции выигрыша в одной антагонистической игре..... 3
2. **Башкин М.А.** Об одном аналоге семейства Кураниси..... 9
3. **Бородин А.В.** Собственные значения и собственные операторы коммутатора. I..... 14
4. **Букушева А.В.** Об одном примере неголономного многообразия Кенмоцу..... 28
5. **Галаев С.В.** К-контактные метрические многообразия, оснащенные кососимметрической связностью..... 35
6. **Назимов А.Б., Очилова М.А.** О циклическом базисе и кратном определителе Вандермонда..... 41
7. **Ройтенберг В.Ш.** О грубости и бифуркациях уравнений Бернул-ли с периодическими коэффициентами..... 51

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

8. **Березина Л.В., Бурцев А.И., Васильева А.В.** Оценка соответствия сложности олимпиадных задач практическим результа-там..... 72
9. **Башкин М.А., Бурцев А.И.** О постзаключительном контроле знаний..... 78
10. **Войтишек Я.В.** Современные проблемы преподавания матема-тических дисциплин на первом курсе (пример экономического вуза)..... 81
11. **Войтко И.В., Гулевич Н.М., Кузнецов В.О.** О неравенствах в векторной алгебре..... 86
12. **Гулевич Н.М., Кузнецов В.О., Старостина С.А.** О матрице из единиц..... 91
13. **Леонтьев В.К., Кораблева О.Н., Малышкина О.В.** О движущейся силе процесса сушки..... 97
14. **Леонтьев В.К., Юровская М.А., Кучина Е.Е., Зазулина Е.Е.** Об определении продолжительности периода сушки..... 101
15. **Олейникова Е.В., Гусарова Н.И.** Использование элементов теории множеств для решения задач по теории вероятностей.... 105
16. **Оленикова Ю.К.** Анализ итогов межрегиональной студенче-ской олимпиады по математике..... 110

17. **Пугач А.Ю., Букина А.И., Табиханова З.Е.** Анализ знаний студентов первого курса на основе результатов математической олимпиады..... 117
18. **Ройтенберг В.Ш.** О задачах межрегиональной студенческой математической олимпиады (Ярославль-2019)..... 122
19. **Шишкина Н.А.** О применении математики в финансовых вычислениях..... 133

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

20. **Беккер В.Ф., Чеснов В.В., Банщикова Д.Д.** Прогнозирование изменения количества ученых в России на основе математических моделей..... 138
21. **Гусаров А.В.** Математическая модель распределения потока отраженных электронов в двухкоординатном датчике положения луча..... 147
22. **Каплина И.Е.** Анализ динамики показателей миграции Рязанской области..... 151
23. **Клочкова И.Ю., Винник Г.Н.** Математическая модель, описывающая первый этап прыжка парашютиста..... 155
24. **Королев Л.В., Бытев Д.О.** Применение марковской цепи в модели случайного процесса с эффектами памяти..... 159
25. **Кривчиков Ю.И., Дудин В.М.** Влияние состава минерального вяжущего на прочность асфальтогранулобетона при холодном ресайклинге..... 164
26. **Лискина Е.Ю., Щукина И.П.** Исследование региональных различий рынка труда Российской Федерации методами анализа панельных данных..... 168
27. **Наумов В.А.** Корреляционная функция ежедневных уровней воды в реке Преголе..... 173
28. **Очиров А.А., Артемова Т.К., Хотырев С.В.** О математическом моделировании цилиндрической антенны, имеющей в составе жидкое вещество..... 183
29. **Яблоков С.Н., Соловьёв М.Е.** Моделирование броуновской динамики с химической реакцией..... 188
30. **Язев В.А.** Имитационное моделирование процессов агломерации и измельчения..... 193

КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ НАУКИ

31. **Егоров Д.Н.** Анализ методов перехвата функций x86-совместимых Windows приложений..... 199

32. Казаров Е.Г., Рудаков А.М. Применение нечеткой логики при оценке творческих способностей обучающихся.....	206
33. Малышев Р.А., Пиксотов К.А. Аппаратно-программный комплекс контроля микроклимата и спектра освещения теплицы.....	216
34. Марьясин О.Ю. Новый инструмент для энергомоделирования и оптимизации энергопотребления.....	221
35. Раухваргер А.Б. Об управлении перемещением пикселя в RGB-пространстве при яркостно-контрастных преобразованиях цветных цифровых изображений и алгоритме частотно-пропорционального растяжения.....	231

Научное издание

**МАТЕМАТИКА
И
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 15

Ответственный редактор А.Н. Жаров

Редактор М.А. Канакотина

Подписано в печать 14.02.20. Формат 60x84 1/16. Бумага белая.
Гарнитура Таймс. Офсетная печать
Усл. печ. л. 14,42. Уч.-изд. л. 14,38. Тираж 25. Заказ 619.

Ярославский государственный технический университет
152023, Ярославль, Московский пр., 88

Отпечатано в Издательском доме ЯГТУ
150000, Ярославль, ул. Советская, 14а