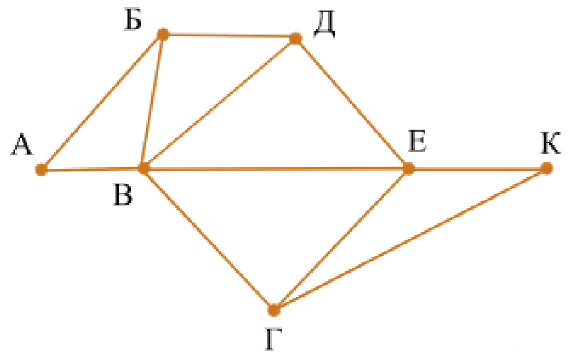
Пример тестовых заданий по вступительному испытанию
ИНФОРМАТИКА

ЯРОСЛАВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 1

На рисунке схема дорог Н-ского района изображена в виде графа, в таблице содержатся сведения о длинах этих дорог (в километрах).

	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7
П1		40		15			
П2	40			35		48	
П3					10	65	11
П4	15	35				22	33
П5			10			50	
П6		48	65	22	50		40
П7			11	33		40	



Так как таблицу и схему рисовали независимо друг от друга, нумерация населённых пунктов в таблице никак не связана с буквенными обозначениями на графе. Определите длину дороги из пункта Б в пункт Д. В ответе запишите целое число.

РЕШЕНИЕ

Есть только один пункт, из которого ведёт 5 дорог - это В, а в таблице - П6.
Из А ведёт две дороги и одна из них в В. В таблице такому соответствует П5.
Из Б ведёт 3 дороги, причём есть дороги в А и в В, в таблице под такое подходит только П3.
Из Д три дороги, две из которых в Б и в В, в таблице только один пункт такому соответствует - П7.
Таким образом, Б - это П3, а Д - П7.
Длина дороги между П3 и П7 - 11.

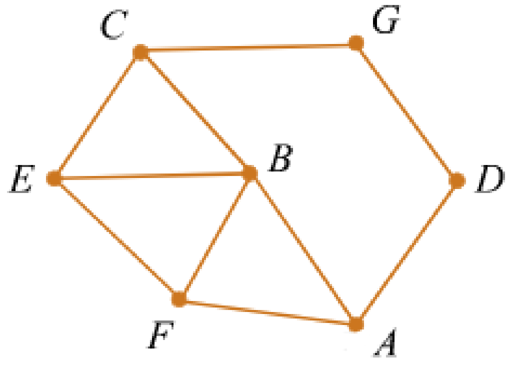
Ответ: 11

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 2

На рисунке слева изображена схема дорог N-ского района. В таблице звёздочкой обозначено наличие дороги из одного населённого пункта в другой. Отсутствие звёздочки означает, что такой дороги нет.

	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7
П1			*	*	*	*	
П2					*		*
П3	*					*	*
П4	*				*	*	
П5	*	*		*			
П6	*		*	*			
П7		*	*				



Каждому населённому пункту на схеме соответствует его номер в таблице, но неизвестно, какой именно номер. Определите, какие номера населённых пунктов в таблице могут соответствовать населённым пунктам E и F на схеме. В ответе запишите эти два номера в возрастающем порядке без пробелов и знаков препинания.

РЕШЕНИЕ

Заметим, что B — единственная вершина степени 4. Значит, B соответствует номер 1. G и D — вершины степени 2, следовательно, им соответствуют номера 2 и 7. Пункты A и C единственные вершины степени 3, соединённые с пунктами G и D, значит, A и C соответствуют номера 3 и 5. Таким образом, вершинам E и F соответствуют номера 4 и 6. Значит, ответ — 46.

Ответ: 46

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 3

Миша заполнял таблицу истинности функции (x ∧ y) ∨ (y ≡ z) ∨ w, но успел заполнить лишь фрагмент из трёх различных её строк, даже не указав, какому столбцу таблицы соответствует каждая из переменных w, x, y, z.

				$(x \wedge y) \vee (y \equiv z) \vee w$
	1	0	0	0
0		1		0
0	1		1	0

Определите, какому столбцу таблицы соответствует каждая из переменных w, x, y, z.

В ответе напишите буквы w, x, y, z в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы (сначала буква, соответствующая первому столбцу; затем буква, соответствующая второму столбцу, и т. д.). Буквы в ответе пишите подряд, никаких разделителей между буквами ставить не нужно.

Пример. Функция задана выражением ¬x ∨ y, зависящим от двух переменных, а фрагмент таблицы имеет следующий вид.

		$\neg x \vee y$
0	1	0

В этом случае первому столбцу соответствует переменная y, а второму столбцу – переменная x. В ответе следует написать yx.

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 3

РЕШЕНИЕ:

Рассмотрим данное выражение. Преобразуем логическое выражение (x ∧ y) ∨ (y ≡ z) ∨ w и получим систему, при которой оно ложно:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0, \end{array}\right. \\ y \neq z, \\ w = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Значение выражения ложно только тогда, когда переменная w равна 0, следовательно, столбцы, в которых содержится единица, не могут соответствовать переменной w, то есть переменной w соответствует первый столбец.

Значения переменных y и z не могут быть равны. Из первой строки заключаем, что третий и четвёртый столбец не могут соответствовать этим переменным, из третьей строки заключаем, что столбцы два и четыре не могут соответствовать этим переменным. Только столбцы два и три могут соответствовать переменным y и z, следовательно, четвёртый столбец соответствует переменной x.

Рассмотрим третью строку таблицы. Переменная x равна 1, значит, для ложности выражения переменная y должна принимать значение 0. Вторая переменная при этом равна 1, откуда получаем, что вторая переменная соответствует z. Оставшийся столбец — переменная y.

Таким образом, ответ: wzyx.

Ответ: wzyx

ЗАДАНИЕ 4

По каналу связи передаются сообщения, содержащие только семь букв: А, Б, Г, И, М, Р, Я. Для передачи используется двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Кодовые слова для некоторых букв известны: А — 010, Б — 011, И — 10. Какое наименьшее количество двоичных знаков потребуется для кодирования слова ГРАММ?

Примечание. Условие Фано означает, что ни одно кодовое слово не является началом другого кодового слова.

РЕШЕНИЕ

Для трёх букв кодовые слова уже известны, осталось подобрать для оставшихся четырёх букв такие кодовые слова, которые обеспечат наименьшее количество двоичных знаков для кодирования слова ГРАММ.

Закодируем букву М кодовым словом 00, поскольку буква М повторяется в слове ГРАММ два раза. Для буквы Г возьмём кодовое слово 110. Кодовое слово 111 взять не можем, поскольку для остальных букв не останется кодовых слов, удовлетворяющих условию Фано. Оставшиеся две буквы закодируем кодовыми словами длины 4.

Таким образом, наименьшее количество двоичных знаков, которые потребуются для кодирования слова ГРАММ, равно 3 + 4 + 3 + 2 + 2 = 14.

Ответ: 14

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 5

На вход алгоритма подаётся натуральное число N. Алгоритм строит по нему новое число R следующим образом.

1) Строится двоичная запись числа N.
2) К этой записи дописываются справа ещё два разряда по следующему правилу:

а) складываются все цифры двоичной записи числа N, и остаток от деления суммы на 2 дописывается в конец числа (справа). Например, запись 11100 преобразуется в запись 111001;
б) над этой записью производятся те же действия – справа дописывается остаток от деления суммы её цифр на 2.

Полученная таким образом запись (в ней на два разряда больше, чем в записи исходного числа N) является двоичной записью искомого числа R.

Укажите минимальное число R, которое превышает число 83 и может являться результатом работы данного алгоритма. В ответе это число запишите в десятичной системе счисления.

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим числа, большие 83, и найдем меньшее число, которое является результатом работы алгоритма.

84 = 10101002 — не является результатом работы алгоритма.

85 = 10101012 — не является результатом работы алгоритма.

86 = 10101102 — является результатом работы алгоритма для числа 101012.

Таким образом, искомое число — 86.

Ответ: 86

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 6

Исполнитель Черепаха действует на плоскости с декартовой системой координат. В начальный момент Черепаха находится в начале координат, её голова направлена вдоль положительного направления оси ординат, хвост опущен. При опущенном хвосте Черепаха оставляет на поле след в виде линии. В каждый конкретный момент известно положение исполнителя и направление его движения. У исполнителя существует две команды:

Вперёд n (где n — целое число), вызывающая передвижение Черепахи на n единиц в том направлении, куда указывает её голова,

и **Направо m** (где m — целое число), вызывающая изменение направления движения на m градусов по часовой стрелке. Запись

Повтори k [Команда1 Команда2 … КомандаS]

означает, что последовательность из S команд повторится k раз. Черепахе был дан для исполнения следующий алгоритм:

Повтори 8 [Вперёд 6 Направо 120]

Определите, сколько точек с целочисленными координатами будут находиться внутри области, ограниченной линией, заданной данным алгоритмом. Точки на линии учитывать не следует.

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

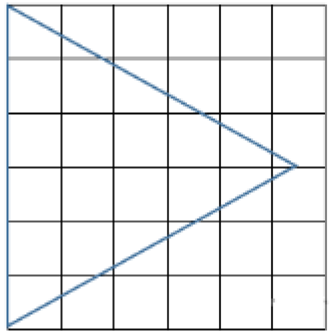
РЕШЕНИЕ

Заметим, что Исполнитель чертит равносторонний треугольник. Для построения такого рисунка можно использовать Word:

– Добавляем таблицу размером 6 на 6;

– Выбираем в меню Фигуры на вкладке Вставка равнобедренный треугольник, поворачиваем его вправо на 90 градусов и отрегулируем высоту так, чтобы она была равна 5,2 ячейкам; правая вершина на рисунке должна иметь x-координату:

$$6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 5,2;$$



– Посчитаем точки внутри треугольника.

Ответ: 13

ЗАДАНИЕ 7

Исполнитель Черепаха действует на плоскости с декартовой системой координат. В начальный момент Черепаха находится в начале координат, её голова направлена вдоль положительного направления оси абсцисс, хвост опущен. При опущенном хвосте Черепаха оставляет на поле след в виде линии. В каждый конкретный момент известно положение исполнителя и направление его движения. У исполнителя существует две команды:

Вперёд n (где n — целое число), вызывающая передвижение Черепахи на n единиц в том направлении, куда указывает её голова, и

Направо m (где m — целое число), вызывающая изменение направления движения на m градусов по часовой стрелке. Запись

Повтори k [Команда1 Команда2 … КомандаS]

означает, что последовательность из S команд повторится k раз. Черепахе был дан для исполнения следующий алгоритм:

Повтори 4 [Вперёд 6 Направо 150 Вперёд 6 Направо 30]

Определите, сколько точек с целочисленными координатами будут находиться внутри области, ограниченной линией, заданной данным алгоритмом. Точки на линии учитывать не следует.

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

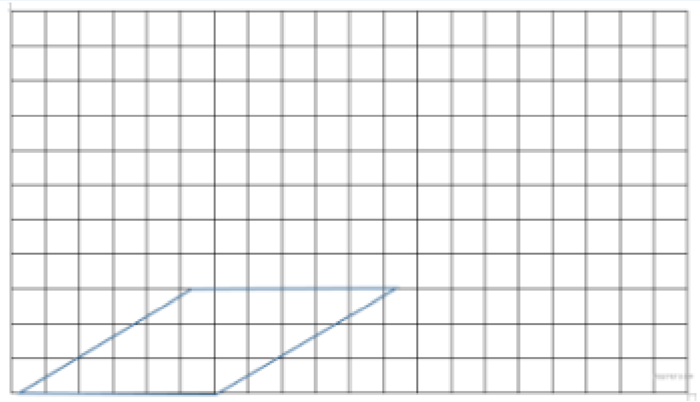
РЕШЕНИЕ

Заметим, что Исполнитель чертит Ромб. Для построения такого рисунка можно использовать Word:

– Добавляем таблицу размером 11 на 20;

– Выбираем в меню Фигуры на вкладке Вставка прямоугольник и через изменение узлов настроить ромб с нужными параметрами.

– Высота будет являться половиной гипотенузы и равняться 3;



– Посчитаем точки внутри ромба.

Ответ: 12

ЗАДАНИЕ 8

Музыкальный фрагмент был записан в формате стерео (двухканальная запись), оцифрован и сохранён в виде файла без использования сжатия данных. Размер полученного файла без учёта размера заголовка файла — 48 Мбайт. Затем тот же музыкальный фрагмент был записан повторно в формате моно и оцифрован с разрешением в 1,5 раза выше и частотой дискретизации в 3 раза меньше, чем в первый раз. Сжатие данных не производилось. Укажите размер в Мбайт файла, полученного при повторной записи. В ответе запишите только целое число, единицу измерения писать не нужно. Искомый объём не учитывает размера заголовка файла.

РЕШЕНИЕ

Найдём размер файла, получившегося при повторной записи:

$$\frac{48 \cdot 1,5}{3 \cdot 2} = 12.$$

Ответ:

1) 12
2) 24
3) 8
4) 64

ЗАДАНИЕ 9

Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААО
3. ААААУ
4. АААОА

……

Запишите слово, которое стоит на 210-м месте от начала списка.

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РЕШЕНИЕ

Заменим буквы А, О, У на 0, 1, 2(для них порядок очевиден – по возрастанию)

Выпишем начало списка, заменив буквы на цифры:

1. 00000
2. 00001
3. 00002
4. 00010

…

Полученная запись есть числа, записанные в троичной системе счисления в порядке возрастания. Тогда на 210 месте будет стоять число 209 (т. к. первое число 0). Переведём число 209 в троичную систему (деля и снося остаток справа налево):

209 / 3 = 69 (2)

69 / 3 = 23 (0)

23 / 3 = 7 (2)

7 / 3 = 2 (1)

2 / 3 = 0(2)

В троичной системе 209 запишется как 21202. Произведём обратную замену и получим УОУАУ.

Ответ:

1) УОУАУ
2) УОУАО
3) УОУАА
4) УОУОУ

ЗАДАНИЕ 10

Каждый сотрудник предприятия получает электронный пропуск, на котором записаны личный код сотрудника, номер подразделения и некоторая дополнительная информация. Личный код состоит из 14 символов, каждый из которых может быть заглавной латинской буквой (используется 20 различных букв) или одной из цифр от 0 до 9. Для записи кода на пропуске отведено минимально возможное целое число байт. При этом используют посимвольное кодирование, все символы кодируют одинаковым минимально возможным количеством бит. Номер подразделения — целое число от 1 до 1000, он записан на пропуске как двоичное число и занимает минимально возможное целое число байт. Всего на пропуске хранится 30 байт данных. Сколько байт выделено для хранения дополнительных сведений об одном сотруднике? В ответе запишите только целое число – количество байт.

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РЕШЕНИЕ

k бит позволяют кодировать 2k символов, поэтому для кодирования 30-символьного алфавита требуется 5 бит (ведь 2 в степени 5 = 32 больше или равно 30 правая круглая скобка . Для хранения 14 символов требуется 14 умножить на 5 = 70 бит. Минимальное количество байт, вмещающее в себя 70 бит — 9 байт (72 бит).

Для кодирования номера подразделения требуется k битов, при этом должно выполняться условие 2k ≥ 1000, следовательно, k = 10. Номер подразделения занимает целое число байт, следовательно, для его хранения необходимо выделить 2 байта.

Для хранения данных об одном сотруднике требуется 30 байт данных. Из них 9 байт отводится на хранение личного кода, ещё 2 байта требуется для хранения номера подразделения. Следовательно, для хранения дополнительных сведений о сотруднике отводится 19 байт.

Ответ: 19

ЗАДАНИЕ 11

Исполнитель Редактор получает на вход строку цифр и преобразовывает её. Редактор может выполнять две команды, в обеих командах v и w обозначают цепочки цифр.

А) заменить (v, w). Эта команда заменяет в строке первое слева вхождение цепочки v на цепочку w. Например, выполнение команды заменить (111, 27) преобразует строку 05111150 в строку 0527150. Если в строке нет вхождений цепочки v, то выполнение команды заменить (v, w) не меняет эту строку.

Б) нашлось (v). Эта команда проверяет, встречается ли цепочка v в строке исполнителя Редактор. Если она встречается, то команда возвращает логическое значение «истина», в противном случае возвращает значение «ложь». Строка исполнителя при этом не изменяется.

Цикл
  ПОКА условие
    последовательность команд
  КОНЕЦ ПОКА
выполняется, пока условие истинно.
В конструкции
  ЕСЛИ условие
    ТО команда1
  КОНЕЦ ЕСЛИ
выполняется команда1 (если условие истинно).
В конструкции
  ЕСЛИ условие
    ТО команда1
    ИНАЧЕ команда2
  КОНЕЦ ЕСЛИ
выполняется команда1 (если условие истинно) или команда2 (если условие ложно).

ЗАДАНИЕ 11

Дана программа для редактора:

```
НАЧАЛО
  ПОКА нашлось (01) ИЛИ нашлось (02) ИЛИ нашлось (03)
    заменить (01, 2302)
    заменить (02, 10)
    заменить (03, 201)
  КОНЕЦ ПОКА
КОНЕЦ
```

Известно, что исходная строка начиналась с нуля, а далее содержала только единицы, двойки и тройки. После выполнения данной программы получилась строка, содержащая 40 единиц, 10 двоек и 8 троек. Сколько единиц было в исходной строке?

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РЕШЕНИЕ

Заметим, что порядок цифр в исходной строке не важен. Из строки «01» сначала получается строка «2302», а потом получается строка «2310». Строка «02» преобразуется в строку «10». Строка «03» сначала преобразуется в строку «201», затем преобразуется в строку «22302», после чего получается строка «22310».

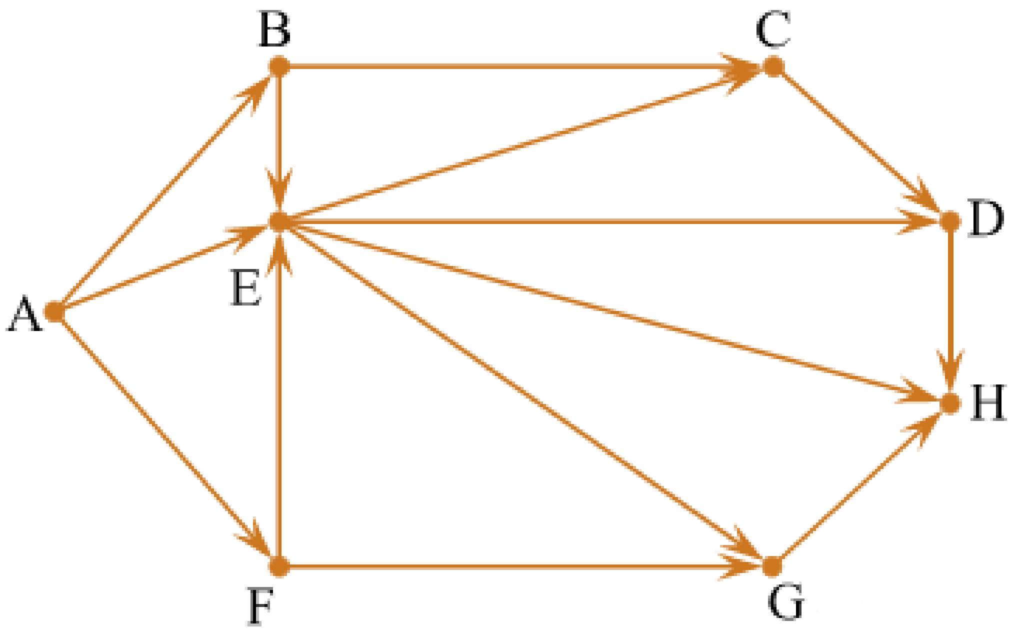
Заметим, что после преобразования исходной строки получилась строка, содержащая 8 троек. Если в исходной строке было 8 единиц, тогда в получившейся строке будет 8 троек и 8 двоек, что не подходит, поскольку двоек должно быть 10. Если в исходной строка было 7 единиц, тогда в получившейся строке будет 7 троек и 7 двоек, этот вариант тоже не подходит, поскольку при добавлении в исходную строку троек в получившейся в результате преобразований строке будет только 9 двоек. Если в исходной строке было 6 единиц, то после преобразования получится шесть единиц, шесть двоек и шесть троек. Далее, добавим к исходной строке две тройки. Тогда после преобразования строки, состоящей из нуля, шести единиц и двух троек получится строка, состоящая из восьми единиц, десяти двоек и восьми троек. Остальные цифры в исходной строке — двойки.

Таким образом, в исходной строке было шесть единиц.

Ответ: 6

ЗАДАНИЕ 12

На рисунке – схема дорог, связывающих города A, B, C, D, E, F, G H. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города A в город H?



РЕШЕНИЕ

Начнем считать количество путей с конца маршрута – с города H. NX — количество различных путей из города A в город X, N — общее число путей.

В "H" можно приехать из D, E, или G, поэтому N = NH = ND + NE + N G (1)

Аналогично:

ND = NC + NE;

NE = NC + NB + NA + NF;

NG = NE + NF.

Добавим еще вершины:

NC = NB + NE = 1 + 3 = 4;

NB = NA = 1;

NF = NA = 1;

Преобразуем вершины:

ND = NC + NE = 4 + 3 = 7;

NE = NB + NA + NF = 1 + 1 + 1 = 3;

NG = NE + NF = 3 + 1 = 4.

Подставим в формулу (1):

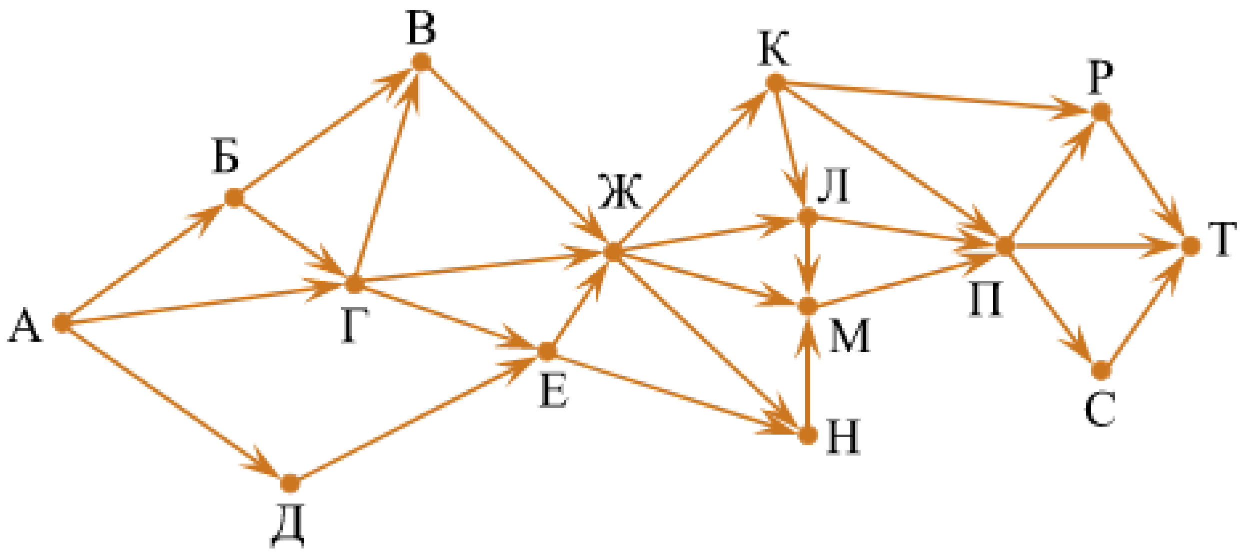
N = NK = 7 + 3 + 4 = 14.

Ответ: 14

ЗАДАНИЕ 13

На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, К, Л, М, Н, П, Р, С, Т. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой.

Сколько существует различных путей из города А в город Т, проходящих через город К?



РЕШЕНИЕ

Количество путей до города Х = количество путей добраться в любой из тех городов, из которых есть дорога в Х.

При этом, если путь не должен проходить через какой-то город, нужно просто не учитывать этот город при подсчёте сумм. А если город, наоборот, обязательно должен лежать на пути, тогда для городов, в которые из нужного города идут дороги, в суммах нужно брать только этот город.

С помощью этого наблюдения посчитаем последовательно количество путей до каждого из городов:

А = 1.

Б = А = 1.

Г = А + Б = 2.

Д = А = 1.

В = Б + Г = 3.

Е = Г + Д = 3.

Ж = В + Г + Е = 8.

К = Ж = 8.

Л = К = 8 (Ж не учитываем, поскольку путь должен проходить через К).

Н = Е + Ж = 11.

М = Л = 8 (Ж и Н не учитываем, поскольку путь должен проходить через К).

П = Л + М + К = 24.

Р = П + К = 32.

С = П = 24.

Т = Р + С + П = 80.

Примечание. Необходимо найти количество различных путей из города А в город Т, проходящих через город К.

Ответ: 80

ЗАДАНИЕ 14

Сколько единиц содержится в двоичной записи значения выражения 87 + 45 + 210 – 32?

РЕШЕНИЕ

Последовательно будем преобразовывать данное выражение:

$$8^7 + 4^5 + 2^{10} - 32 = 2^{21} + 2^{10} + 2^{10} - 2^5.$$

Сумма

$$2^{21} + 2^{10} + 2^{10}$$

в системе счисления с основанием 2 будет выглядеть как единица, девять нулей, единица и одиннадцать нулей. После вычитания из этой суммы 2 в степени 5 получится единица, десять нулей, шесть единиц и пять нулей.

Таким образом, всего семь единиц.

Ответ:

1) 7
2) 12
3) 5
4) 32

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 15

Для какого наименьшего целого неотрицательного числа А выражение

$(3x + 5y < A) \lor (x \geq y) \lor (y > 8)$

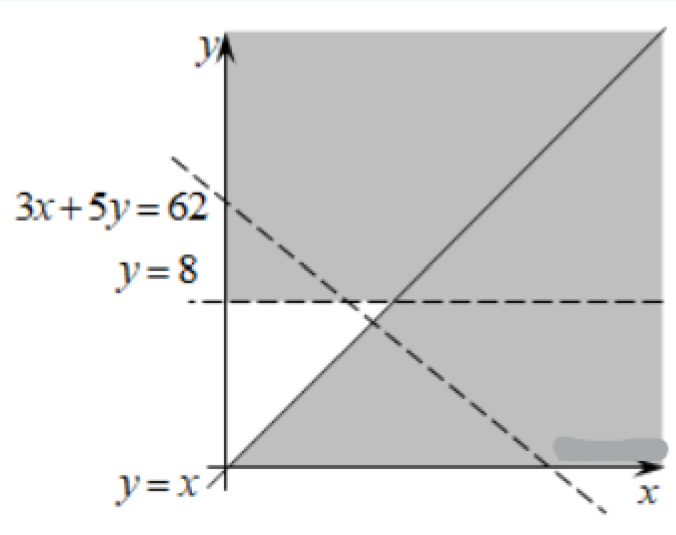
тождественно истинно, т. е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y?

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РЕШЕНИЕ

Решим задачу графически. Условия $(x \geq y)$ и $(y > 8)$ задают множество, отмеченное на рисунке закрашенной областью. Чтобы исходное выражение было тождественно истинно для любых целых и неотрицательных x и y, прямая $3x + 5y = A$ должна проходить выше точки (7; 8). Таким образом, наименьшее целое неотрицательное A, удовлетворяющее условию задачи — это A равное 62.

Ответ: 62



ЗАДАНИЕ 16

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа А формула

¬ДЕЛ(x, A) → (¬ДЕЛ(x, 21) ∧¬ ДЕЛ(x, 35))

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

ЗАДАНИЕ 16

РЕШЕНИЕ

Введём обозначения: A = ДЕЛ(x, A), D21 = ДЕЛ(x, 21), D35 = ДЕЛ(x, 35) и DN = ДЕЛ(x, N).
Введём множества:
A — множество натуральных чисел, для которых выполняется условие A,
D21 — множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D21,
D35 — множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D35,
…
Тогда исходное выражение

$$\neg\textbf{ДЕЛ}(x, A) \to (\neg\textbf{ДЕЛ}(x, 21) \wedge \neg\,\textbf{ДЕЛ}(x, 35))$$

принимает вид $\overline{A} \to (\overline{D_{21}} \cdot \overline{D_{35}})$, откуда в силу правила $A \to B = \overline{A} + B$ получаем:

$$\overline{A} \to (\overline{D_{21} + D_{35}}) = A + \overline{D_{21}} \cdot \overline{D_{35}}.$$

Заметим, что второе слагаемое принимает значение 0 для чисел кратных 21 или 35, то есть для чисел вида 21k и 35n, где k и n натуральные. Чтобы логическая сумма была тождественно истинной, для чисел указанного вида первое слагаемое должно обращаться в 1. Следовательно, число A должно быть таким, чтобы любое из чисел 21k и 35n делилось на него нацело. Общие делители чисел 21k и 35n, не зависящие от k и n, — суть числа 1 и 7. Наибольшее из них равно 7.

Ответ: 7

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 17

Алгоритм вычисления значения функции F(n), где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$F(1) = 1$
$F(n) = F(n–1) * (n + 2)$, при $n > 1$

Чему равно значение функции F(5)? В ответе запишите только натуральное число.

РЕШЕНИЕ

Посчитаем по порядку каждое F(n):

$F(2) = 1 * 4 = 4$

$F(3) = 4 * 5 = 20$

$F(4) = 20 * 6 = 120$

$F(5) = 120 * 7 = 840.$

Ответ:
1) 840
2) 120
3) 240
4) 6720

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 18

Обозначим остаток от деления натурального числа a на натуральное число b как a mod b.

Алгоритм вычисления значения функции F(n), где n — целое неотрицательное число, задан следующими соотношениями:

$F(0) = 0$;
$F(n) = F(n - 1) + 1$, если $n > 0$ и при этом $n \bmod 3 = 2$;
$F(n) = F((n - n \bmod 3) / 3)$, если $n > 0$ и при этом $n \bmod 3 < 2$.

Укажите наименьшее возможное n, для которого F(n) = 5

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РЕШЕНИЕ

Приведём программу на PascalABC, решающую данную задачу:

```
var n: longint;
i: integer;
function F(n: longint): longint;
  begin
    if n = 0
      then F := 0
    else if (((n mod 3) = 2) and (n > 0))
      then F := F(n - 1) + 1
    else if (((n mod 3) < 2) and (n > 0))
      then F := F((n - n mod 3) div 3);
  end;
begin
  for i := 1 to 1000 do
    if F(i) = 5 then begin
        writeln(i);
        break
    end;
end.
```

Результат работы программы — 242.

Посчитаем по порядку каждое F(n):

$F(2) = 1 * 4 = 4$

$F(3) = 4 * 5 = 20$

$F(4) = 20 * 6 = 120$

$F(5) = 120 * 7 = 840.$

Ответ: 840

ЗАДАНИЕ 19

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в три раза. Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 64. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 64 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней; $1 \le S \le 63$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т. е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

Укажите такое значение S, при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

РЕШЕНИЕ

Такое значение S — 21. Своим первым ходом Петя может получить позиции 22 и 63. В любом случае Ваня утраивает количество камней в куче в три раза и выигрывает своим первым ходом.

Ответ: 21

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 20

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в три раза. Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 64. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 64 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней; $1 \leq S \leq 63$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т. е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

Найдите два таких значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть первым ходом, но может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания без разделительных знаков.

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим значение S = 7. Своим первым ходом Петя может получить позицию 21, утроив количество камней в куче. После этого Ваня может получить позиции 22 и 63. В любой из позиций Петя может утроить количество камней в куче и выиграть своим вторым ходом.

Второе значение S — 20. Своим первым ходом Петя добавляет в кучу один камень и получает позицию 21. После этого Ваня может получить позиции 22 и 63. В любой из позиций Петя может утроить количество камней в куче и выиграть своим вторым ходом.

Таким образом, ответ — 720.

Ответ: 720

ЗАДАНИЕ 21

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в три раза. Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 64. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 64 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней; $1 \le S \le 63$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т. е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

Найдите значение S, при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, но у Вани нет стратегии, которая позволяла бы ему гарантированно выиграть первым ходом.

РЕШЕНИЕ

Такое значение S — 19. При S = 19 Петя своим первым ходом может получить одну из двух позиций: 20 или 57. Во втором случае Ваня утраивает количество камней в куче и выигрывает своим первым ходом. В первом случае Ваня добавляет в кучу один камень и получает позицию 21. При любом ходе Пети, Ваня своим вторым ходом утраивает количество камней в куче и выигрывает своим вторым ходом.

Ответ: 19

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 22

Исполнитель Вычислитель преобразует число на экране.

У исполнителя есть две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1.
2. Умножить на 2.

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая умножает его на 2.

Программа для Вычислителя — это последовательность команд.

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 1 результатом является число 21 и при этом траектория вычислений содержит число 10 и не содержит числа 16?

Траектория вычислений программы — это последовательность результатов выполнения всех команд программы. Например, для программы 121 при исходном числе 7 траектория будет состоять из чисел 8, 16, 17.

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 22

РЕШЕНИЕ

Искомое количество программ равно произведению количества программ, получающих из числа 1 число 10, на количество программ, получающих из числа 10 число 15 и на количество программ, получающих из числа 17 число 21, поскольку траектория вычислений не должна содержать числа 16.

Пусть R(n) — количество программ, которые число 1 преобразуют в число n, P(n) — количество программ, которые число 10 преобразуют в число n, а F(n) — количество программ, которые преобразуют число 17 в число n.

Верны следующие соотношения:

1. Если n не делится на 2, то тогда R(n) = R(n − 1), так как существует единственный способ получения n из n − 1 — прибавление единицы. То же самое аналогично для P(n) и F(n).

2. Пусть n делится на 2, тогда R(n) = R(n / 2) + R(n − 1). То же самое аналогично для P(n) и F(n).

Постепенно вычислим значения R(n):

R(1) = 1.
R(2) = 2.
R(3) = R(2) = 2.
R(4) = R(2) + R(3) = 4.
R(5) = R(4) = 4.
R(6) = R(3) + R(5) = 6.
R(7) = R(6) = 6.
R(8) = R(4) + R(7) = 10.
R(9) = R(8) = 10.
R(10) = R(5) + R(9) = 14.

Теперь вычислим значения P(n):

P(10) = P(11) = P(12) = P(13) = P(14) = P(15) = 1.

Далее вычислим значения F(n):

F(17) = F(18) = F(19) = F(20) = F(21) = 1.

Следовательно, количество программ, удовлетворяющих условию задачи, равно 14 ·1 ·1 = 14.

Ответ: 14

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 23

У исполнителя Прибавитель две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1,
2. увеличь старшую цифру числа на 1.

Первая из них увеличивает число на экране на 1, вторая увеличивает на 1 старшую (левую) цифру числа, например число 23 с помощью такой команды превратится в число 33. Если старшая цифра числа равна 9, то вторая команда оставляет это число неизменным. Программа для Прибавителя — это последовательность команд. Сколько есть программ, которые число 15 преобразуют в число 37?

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РЕШЕНИЕ

Обе команды увеличивают исходное число. Старшая цифра — 1, следовательно, использовать команду 2 более двух раз бессмысленно. Выпишем программы, в которых команда 2 используется два раза: 1122, 2211, 1212, 2121, 2112, 1221. Итого 6 программ.

Выпишем программы, в которых команда 2 используется один раз. Использовав эту команду в первой позиции, мы получим из числа 15 число 25, следовательно, после этого необходимо будет дописать ещё 12 команд 1 чтобы получить число 37. Таким образом, получаем программы: 211...1, 121...1, и. т. д. Итого имеем 13 программ (двойка побывала в каждой позиции).

Существует всего одна программа, в которой команда 2 не используется: 111....1. Таким образом, имеем 6 + 13 + 1 = 20 программ.

Ответ: 20