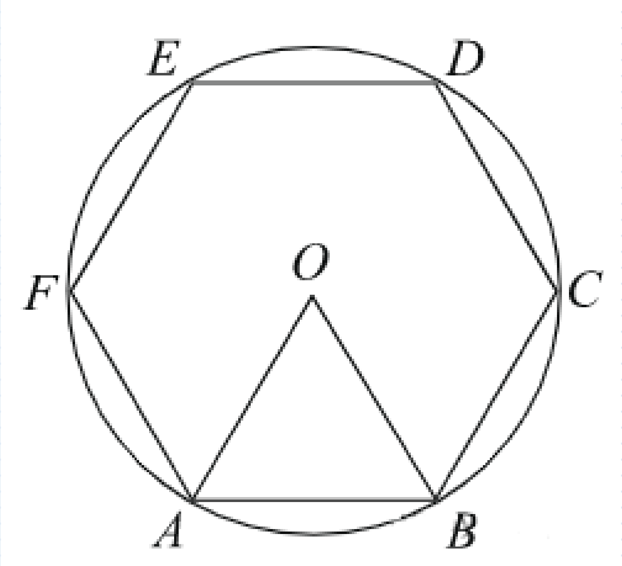
Пример тестовых заданий по вступительному испытанию

МАТЕМАТИКА

ЯРОСЛАВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 1

Периметр правильного шестиугольника равен 72. Найдите диаметр описанной окружности.



РЕШЕНИЕ

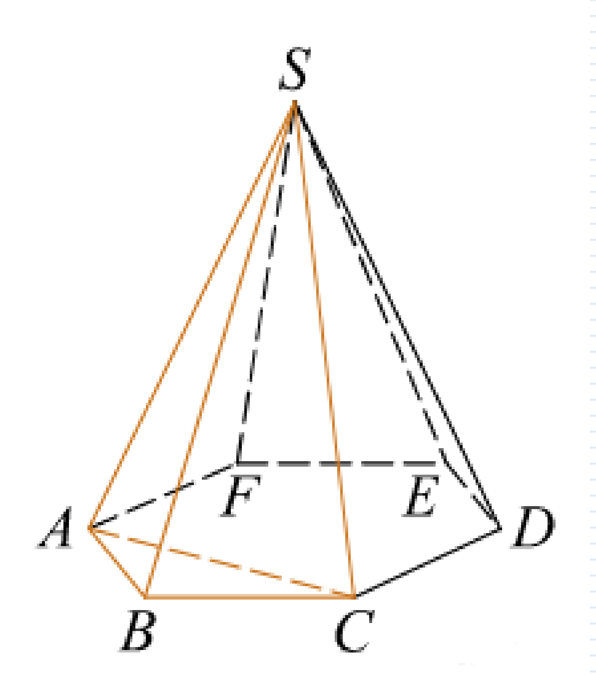
Найдем сторону шестиугольника: 72 : 6 = 12.

Рассмотрим треугольник AOB. Радиус описанной вокруг шестиугольника окружности равен его стороне, а диаметр вдвое больше. Поэтому он равен 24.

Ответ: 24

ЗАДАНИЕ 2

Объем треугольной пирамиды SABC, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды SABCDEF, равен 23. Найдите объем шестиугольной пирамиды.



РЕШЕНИЕ

Данные пирамиды имеют общую высоту, поэтому их объемы соотносятся как площади их оснований.
Площадь правильного шестиугольника со стороной а равна:

$$S_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

Площадь равнобедренного треугольника АСВ с боковой стороной а и углом при вершине 120° равна:

$$S_\Delta = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Таким образом, площадь шестиугольника больше площади треугольника в

$$\frac{S_6}{S_\Delta} = 6$$

раз, поэтому искомый объем равен 23 ·6 = 138.

Ответ: 138

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 3

В сборнике билетов по философии всего 20 билетов, в 19 из них встречается вопрос по теме "Пифагор". Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по теме "Пифагор".

РЕШЕНИЕ

Из 20 билетов 1 не содержат вопроса по теме "Пифагор", поэтому вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по теме "Пифагор", равна

$$\frac{1}{20} = 0,05.$$

Ответ: 0,05

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 4

Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 75 выступлений — по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день 33 выступления, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой.

Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

РЕШЕНИЕ

На третий день запланировано

$$\frac{75-33}{2}=21$$

выступлений. Значит, вероятность того, что выступление представителя из России окажется запланированным на третий день конкурса, равна

$$\frac{21}{75}=0,28.$$

Ответ: 0,28

ЗАДАНИЕ 5

В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,9 погода завтра будет такой же, как и сегодня. 5 апреля погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 8 апреля в Волшебной стране будет отличная погода.

РЕШЕНИЕ

Для погоды на 6, 7 и 8 апреля есть 4 варианта: ХХО, ХОО, ОХО, ООО (здесь Х — хорошая, О — отличная погода). Найдем вероятности наступления такой погоды:

$P(XXO) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}081;$
$P(XOO) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}081;$
$P(OXO) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001;$
$P(OOO) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}081.$

Указанные события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:
$P(XXO) + P(XOO) + P(OXO) + P(OOO) = 0{,}081 + 0{,}081 + 0{,}001 + 0{,}081 = 0{,}244.$

Ответ: 0,244

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 6

Найдите корень уравнения:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4$$

РЕШЕНИЕ

Перейдем к одному основанию степени:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow 6-2x=-2 \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: 4

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 7

Найдите значение выражения

$$\frac{a^{3,21} \cdot a^{7,36}}{a^{8,57}}$$

при a=12.

РЕШЕНИЕ

Выполним преобразования:

$$\frac{a^{3,21} \cdot a^{7,36}}{a^{8,57}} = a^{3,21+7,36-8,57} = a^2 = 144.$$

Ответ:

1) 144
2) 36
3) 125
4) 264

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 8

Найдите значение выражения

$$16\sqrt{2}\cos 585^\circ$$

РЕШЕНИЕ

В силу периодичности косинуса

$$\cos 585^\circ = \cos(585^\circ - 360^\circ) = \cos 225^\circ$$

По формуле приведения

$$\cos 225^\circ = -\sin(270^\circ - 225^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно,

$$16\sqrt{2}\cos 585^\circ = 16\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -16.$$

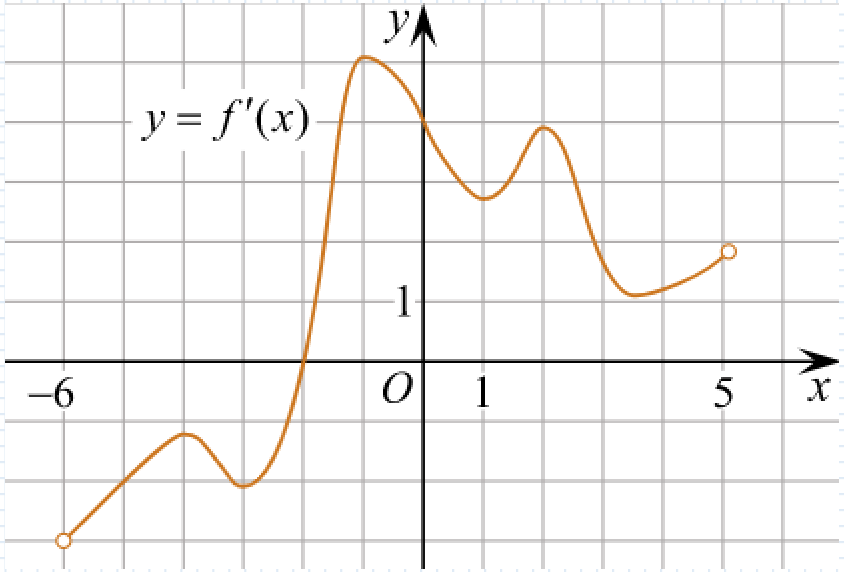
Ответ:

1) -16
2) 0
3) 2
4) -4

ЗАДАНИЕ 9

На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (−6; 5).

Найдите точку экстремума функции f(x) на отрезке [−5; 4].



РЕШЕНИЕ

Если производная в некоторой точке равна нулю, а в ее окрестности меняет знак, то это точка экстремума.

На отрезке [−5; 4] график производной пересекает ось абсцисс, производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, точка −2 является точкой экстремума.

Ответ:

1) -2
2) 0
3) -1
4) 1

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 10

Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу m = 1260 тонн, представляют собой две пустотелые балки длиной l = 18 метров и шириной s метров каждая.

Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой:

$$p = \frac{mg}{2ls}$$

где m – масса экскаватора (в тоннах), l – длина балок в метрах, s – ширина балок в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте g=10м/с в квадрате).

Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление p не должно превышать 140 кПа. Ответ выразите в метрах.

РЕШЕНИЕ

Задача сводится к решению неравенства:
p ≤140 кПа при известных значениях длины балок l=18 м, массы экскаватора m=1260 т:

$$p \leqslant 140 \Leftrightarrow \frac{1260 \cdot 10}{2 \cdot 18s} \leqslant 140 \Leftrightarrow s \geqslant 2,5 \text{ м.}$$

Ответ:

1) 2,5
2) 1,8
3) 3,2
4) 4,8

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 11

При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон:

$$pV^k = 1,2 \cdot 10^8 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$$

, где p – давление газа в паскалях, V – объем газа в кубических метрах, k= 5/3. Найдите, какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p, равном:

$$3,75 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

РЕШЕНИЕ

Поскольку произведение давления на степень объёма постоянно, а давление не ниже

$$3,75 \cdot 10^6$$

, при заданных значениях параметров k= 5/3 и

$$\text{const} = 1,2 \cdot 10^8 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$$

имеем неравенство:

$$3,75 \cdot 10^6 V^{\frac{5}{3}} \leqslant 1,2 \cdot 10^8 \Leftrightarrow V^{\frac{5}{3}} \leqslant 32 \Leftrightarrow V \leqslant 32^{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow V \leqslant 8 \text{ м}^3.$$

Значит, наибольший объем, который может занимать газ, равен 8 м3.

Ответ:

1) 8
2) 36
3) 78
4) 2

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 12

Из пункта А и пункт В, расстояние между которыми 90 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 16 км больше, чем велосипедист. Найдите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 2 часа позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

РЕШЕНИЕ

Пусть v км/ч — скорость велосипедиста, тогда скорость мотоциклиста равна v+16 км/ч. Велосипедист был в пути на 2 часа больше, отсюда имеем:

$$\frac{90}{v} - \frac{90}{v+16} = 2 \Leftrightarrow \frac{90 \cdot 16}{v(v+16)} = 2 \underset{v>0}{\Leftrightarrow} 90 \cdot 8 = v(v+16)$$

$$\underset{v>0}{\Leftrightarrow} 90 \cdot 8 = v(v+16) \Leftrightarrow v^2 + 16v - 720 = 0$$

$$v^2 + 16v - 720 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 20; \\ v = -36 \end{array}\right. \underset{v>0}{\Leftrightarrow} v = 20.$$

Таким образом, скорость велосипедиста была равна 20 км/ч.

Ответ:

1) 20
2) 15
3) 8
4) 24

ЗАДАНИЕ 13

От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 110 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним со скоростью на 1 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт B он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

РЕШЕНИЕ

Пусть u км/ч — скорость второго теплохода, тогда скорость первого теплохода равна u-1 км/ч. Первый теплоход находился в пути на 1 час больше, чем второй, отсюда имеем:

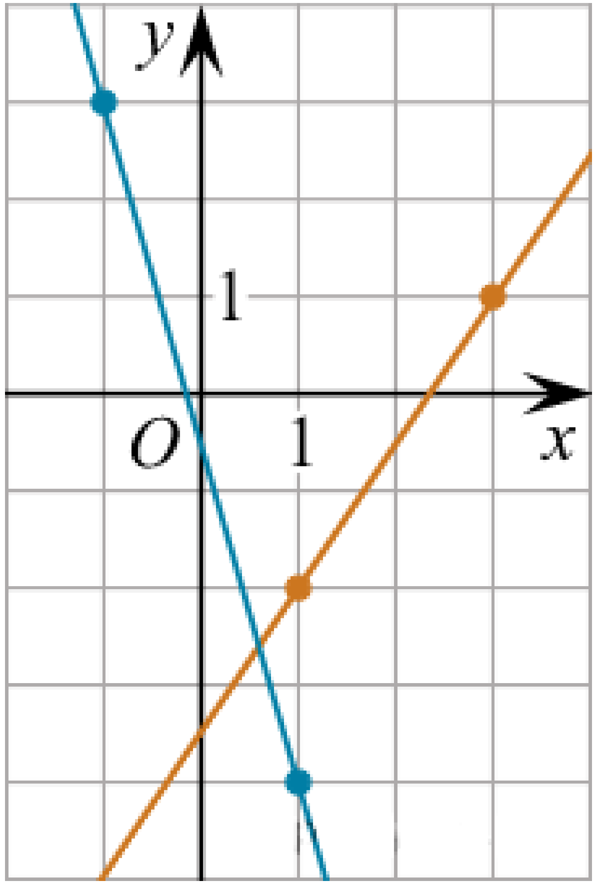
$$\frac{110}{u-1}-\frac{110}{u}=1 \Leftrightarrow \frac{110}{u^2-u}=1 \Leftrightarrow 110=u^2-u \Leftrightarrow u^2-u-110=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=11; \\ u=-10 \end{array}\right. \underset{u>0}{\Leftrightarrow} u=11.$$

Ответ: 11

ЗАДАНИЕ 14

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



РЕШЕНИЕ

По рисунку определяем, что данные прямые являются графиками функций y=1,5x минус 3,5 и y= минус 3,5x минус 0,5. Абсциссу точки пересечения найдём, решив уравнение:

$$1,5x - 3,5 = -3,5x - 0,5 \Leftrightarrow 5x = 3 \Leftrightarrow x = 0,6.$$

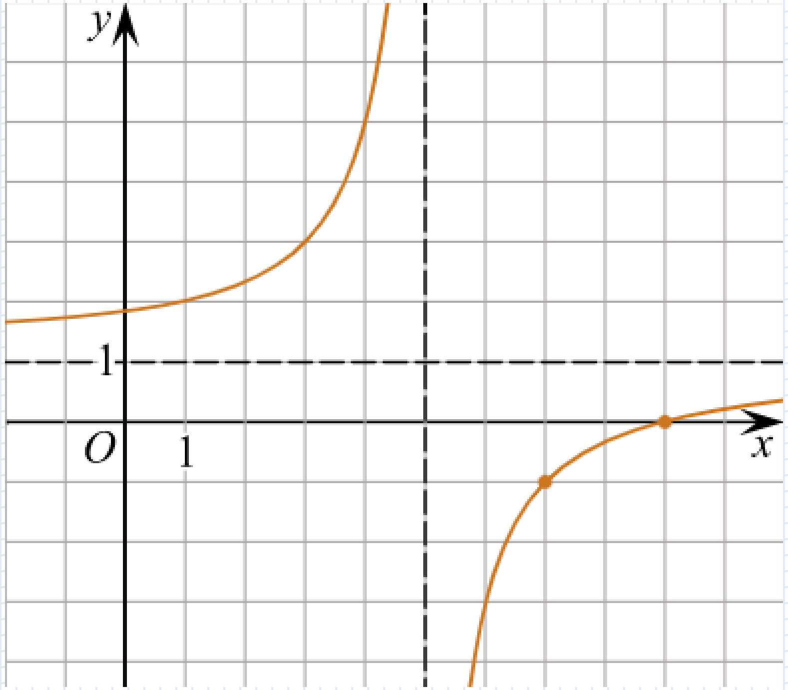
Ответ: 0,6

ЗАДАНИЕ 15

На рисунке изображён график функции вида:

$$f(x)=\frac{a}{x+b}+c$$

где числа a, b и c — целые. Найдите f(10).



РЕШЕНИЕ

График функции имеет горизонтальную асимптоту y=1, значит, c=1.
График функции имеет вертикальную асимптоту x=5, значит, b= минус 5.
По графику f(7)= -1, тогда

$$\frac{a}{7-5}+1=-1 \Leftrightarrow a=-4.$$

Таким образом, $f(x)=\frac{-4}{x-5}+1$. Найдём $f(10)$.

$$f(10)=\frac{-4}{10-5}+1=0,2.$$

Ответ:

1) 0,2
2) 0
3) 0,5
4) 1

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 16

Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 6x + 9$$

на отрезке [27;46].

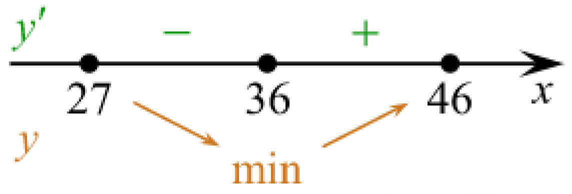
РЕШЕНИЕ

Найдем производную заданной функции: $y' = \sqrt{x} - 6.$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} \sqrt{x} - 6 = 0, \\ 27 \leqslant x \leqslant 46 \end{cases} \Leftrightarrow x = 36.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Найденная производная обращается в нуль на заданном отрезке, функция имеет минимум на нём, поэтому наименьшим значением функции на отрезке является y(36)=144-216+9=-63.

Ответ: -63

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

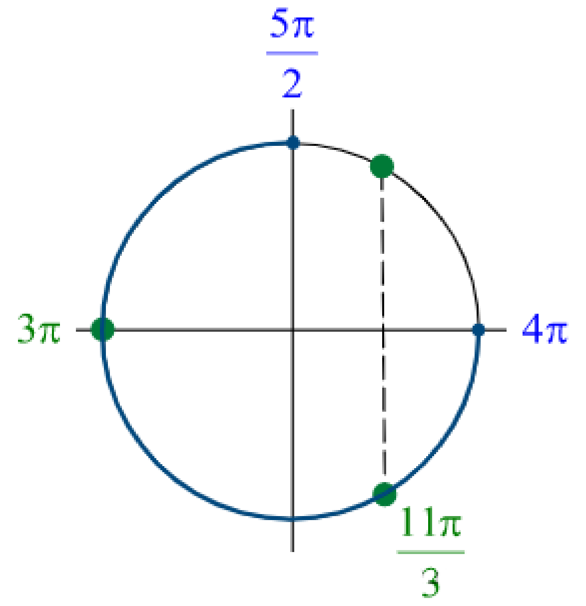
ЗАДАНИЕ 17

Определите, какие из корней уравнения:

$$9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0.$$

принадлежат отрезку

$$\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$$



РЕШЕНИЕ

1) Пусть $t = 9^{\cos x}$, тогда:

$$9t^2 - 28t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{9}, \\ t = 3. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} 9^{\cos x} = \frac{1}{9}, \\ 9^{\cos x} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1, \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

2) Корни, принадлежащие промежутку отберем на тригонометрической окружности. Получим числа: $3\pi;\ \frac{11\pi}{3}$

Ответ:

1) $3\pi;\ \frac{11\pi}{3}$

2) 3π

3) $\frac{5\pi}{3};\ \frac{17\pi}{3}$

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

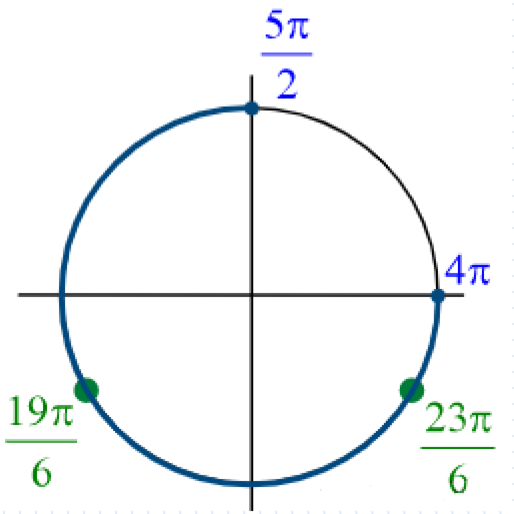
ЗАДАНИЕ 18

Определите, какие из корней уравнения:

$$\frac{3\,\mathrm{tg}^2 x - 1}{2\sin x - 1} = 0$$

принадлежат отрезку

$$\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$$



ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РЕШЕНИЕ

1) Уравнение равносильно системе: $\begin{cases} \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{3}, \\ \sin x \neq \frac{1}{2}, \end{cases}$

откуда следует, что:

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \mathrm{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

при условии $\sin x \neq \frac{1}{2}.$

Получаем, что

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

2) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку. Получаем: $\frac{19\pi}{6}$, $\frac{23\pi}{6}$

ЗАДАНИЕ 19

Решите неравенство

$$4^{x-3}-2^{x-3}\left(16-x^2\right)-16x^2\geqslant 0.$$

РЕШЕНИЕ

Запишем исходное неравенство в виде:

$$4^{x-3}-16\cdot 2^{x-3}+2^{x-3}x^2-16x^2\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^{x-3}\left(2^{x-3}+x^2\right)-16\left(2^{x-3}+x^2\right)\geqslant 0\Leftrightarrow\left(2^{x-3}+x^2\right)\left(2^{x-3}-16\right)\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^{x-3}-16\geqslant 0\Leftrightarrow x-3\geqslant 4\Leftrightarrow x\geqslant 7.$$

Ответ:

1) [7;+∞)
2) [4;7]
3) (-∞;7]
4) (0; +∞)

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ 20

31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на a%), затем Олег переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Найдите a.

РЕШЕНИЕ

Пусть Олег взял S рублей, $1 + 0{,}01a = b$, тогда долг на конец года будет соответственно составлять:

1-й год $Sb - 328\,050$.

2-й год $(Sb - 328\,050)b - 328\,050 = Sb^2 - 328\,050(b+1)$.

3-й год

$$(Sb^2 - 328\,050(b+1))b - 328\,050 = Sb^3 - 328\,050((b+1)b+1).$$

4-й год

$$(Sb^3 - 328\,050((b+1)b+1))b - 328\,050 = Sb^4 - 328\,050((b+1)b^2+b+1).$$

Значит, $Sb^4 - 328\,050(b+1)(b^2+1) = 0$

При схеме выплаты за два года, получим:

1-й год $Sb - 587\,250$.

2-й год $Sb^2 - 587\,250(b+1)$.

Значит, $Sb^2 - 587\,250(b+1) = 0$.

ЗАДАНИЕ 20

31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на a%), затем Олег переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Найдите a.

РЕШЕНИЕ

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} Sb^4 = 328\,050(b+1)(b^2+1), \\ Sb^2 = 587\,250(b+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 587250b^2 = 328\,050(b^2+1), \\ \dfrac{Sb^2}{b+1} = 587\,250 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 259\,200b^2 = 328\,050, \\ \dfrac{Sb^2}{b+1} = 587\,250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \dfrac{81}{64}, \\ \dfrac{Sb^2}{b+1} = 587\,250 \end{cases} \underset{b>0}{\Leftrightarrow} b = \frac{9}{8}.$$

Значит, $1 + 0{,}01a = \dfrac{9}{8} \Leftrightarrow a = 12{,}5.$

Ответ: 12,5