



Ярославский государственный  
технический университет

Кафедра «Теоретическая и  
прикладная механика»

# Консультация по дисциплинам ТМ и СМ для поступающих в магистратуру

Рабочая группа:

**Капранова Анна Борисовна**, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. каф. «ТиПМ»;  
**Таршис Михаил Юльевич**, доктор техн. наук, доцент, профессор каф. «ТиПМ»;  
**Шеронина Ирина Станиславовна**, канд. техн. наук, доцент каф. «ТиПМ»



## Основные понятия и определения статики

*Статика* изучает условия, при которых механическое взаимодействие тел не нарушает их относительного покоя или равномерного прямолинейного поступательного движения.

- ▶ **Материальное тело** – некоторое количество вещества, заполняющее определенный объем.
- ▶ **Абсолютно твердое тело (АТТ)** – такое воображаемое тело, расстояние между точками которого не изменяется при любых условиях.
- ▶ **Материальная точка** – тело, размерами которого можно пренебречь, но масса его есть величина конечная.
- ▶ **Свободной** называется материальная точка, на перемещение которой не наложено никаких ограничений.
- ▶ **Изолированной** называется материальная точка, на которую не действуют другие тела.
- ▶ **Сила  $\vec{F}$**  есть мера механического воздействия одного тела на другое, в результате которого взаимодействующие тела могут сообщить друг другу ускорения или деформироваться. Сила характеризует величину и направление этого взаимодействия (рис. 1.1).

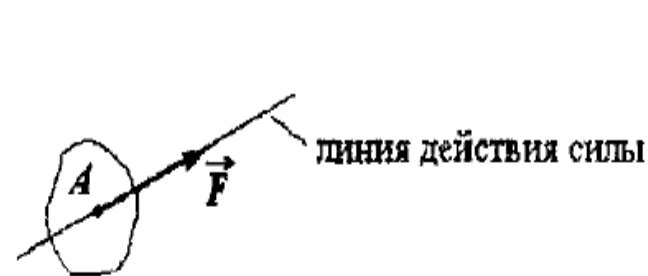


Рис. 2.1

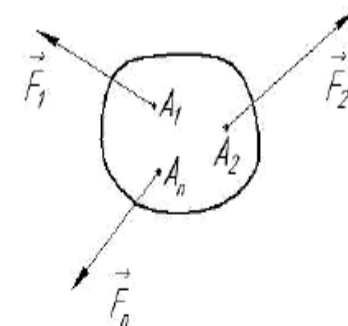


Рис. 2.2

- ▶ **Система сил** – совокупность сил, приложенных к телу (рис. 2.2).

Систему сил обозначают так:

$$\begin{pmatrix} \vec{F}_1 & \vec{F}_2 & \dots & \vec{F}_n \\ A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow S.$$

$\Leftrightarrow$  - знак эквивалентности.

- ▶ **Уравновешенной или эквивалентной нулю ( $S \Leftrightarrow 0$ )** называют такую систему сил, которая, будучи приложенной к АТТ, не изменяет его кинематического состояния.



## Основные понятия и определения статики

- ▶ Любая из сил уравновешенной системы сил является **уравновешивающей** для остальных сил.
- ▶ Под **равновесием** материальной точки понимают ее относительный покой или равномерное прямолинейное движение. Тело находится в равновесии, когда все его точки находятся в равновесии.
- ▶ **Система сходящихся сил (ССС)** - это такая система сил, линии действия сил которой пересекаются в точке, называемой точкой схода.
- ▶ **Плоской** называется такая **система сил (ПСС)**, линии действия которой расположены в одной плоскости, например, в плоскости  $xOy$ .
- ▶ **Приведением системы сил** называют замену данной системы простейшей, ей эквивалентной.

—♦ *Равнодействующей* данной системы сил называют силу, которая производит на тело такое же действие, как и вся система сил. Равнодействующая равна геометрической сумме всех сил системы.

$$\vec{R} = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v.$$

—♦ *Главным вектором системы сил*  $\vec{R}$  – называют сумму всех сил системы. В отличие от равнодействующей, которая определяется тремя факторами, главный вектор не имеет точки приложения.

- ▶ Если одну систему сил, действующую на АТТ, заменить другой и от этого кинематическое состояние тела не изменится, то эти системы называют **эквивалентными** ( $S_1 \Leftrightarrow S_2$ ).

*Замечание.* Если две системы сил эквивалентны порознь третьей, то они эквивалентны между собой:  $S_1 \Leftrightarrow S_3; S_2 \Leftrightarrow S_3 \Rightarrow S_1 \Leftrightarrow S_2$ .

# Теоретическая механика. Раздел «СТАТИКА»

## Основные понятия и определения статики

- **Проекция силы на ось** - алгебраическая величина отрезка, получаемого в результате опускания из начала и конца вектора силы перпендикуляра на эту ось.



*Замечание.* Это скалярная величина (рис. 2.3). Проекция имеет знак плюс, если перемещение от ее начала к концу происходит в положительном направлении оси.

$$\begin{aligned} \text{Пр}_l \vec{F} &= F \cos \alpha, \\ \text{Пр}_l \vec{N} &= -N \cos \beta, \\ \text{Пр}_l \vec{P} &= 0. \end{aligned}$$

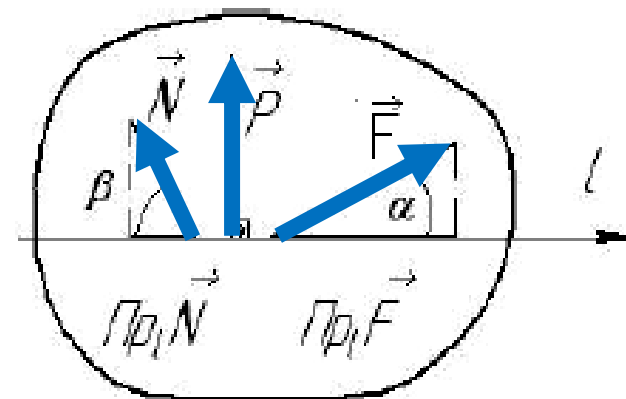


Рис. 2.3

## Основные понятия и определения статики

- **Проекция силы на плоскость** – это вектор, заключенный между проекциями начала и конца силы на эту плоскость (рис. 1.4).

⚙ *Замечание.* Эта величина характеризуется не только величиной, но и направлением в плоскости.

⚙ *Замечание.* В некоторых случаях бывает удобнее для нахождения проекции силы на ось сначала найти **проекцию силы на плоскость**, в которой лежит ось, а затем данную проекцию спроецировать на ось (метод двойного проецирования).

$$\vec{Q} = \text{Пр}_{xoy} \vec{F},$$

$$Q = F \cos \alpha,$$

$$\text{Пр}_x \vec{F} = F \cos \alpha \cdot \cos \beta,$$

$$\text{Пр}_y \vec{F} = F \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\text{Пр}_z \vec{F} = F \sin \alpha.$$

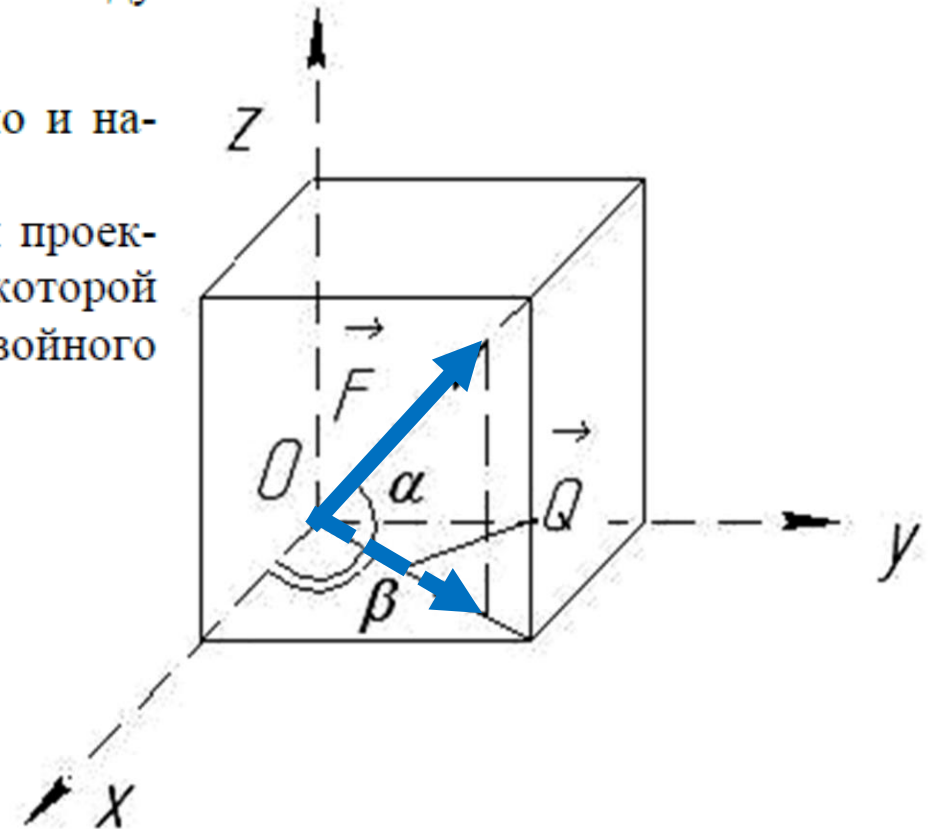


Рис. 2.4

## Основные понятия и определения статики

Методы определения главного вектора системы сил:

### 1. Геометрический метод

Дано:  $\begin{pmatrix} \vec{F}_1 & \vec{F}_2 & \vec{F}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}$  (рис. 2.5). Построить:  $\vec{R} = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v$ .

Решение. Выбираем произвольную точку  $O$  и строим силовой многоугольник, сторонами которого являются данные силы (рис. 2.6). Главный вектор  $\vec{R}$  соединяет точку  $O$  с конечной точкой последней силы.

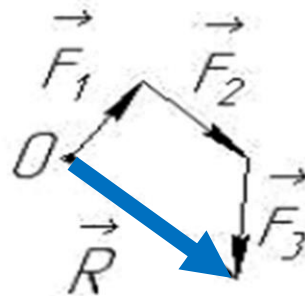


Рис. 2.6

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

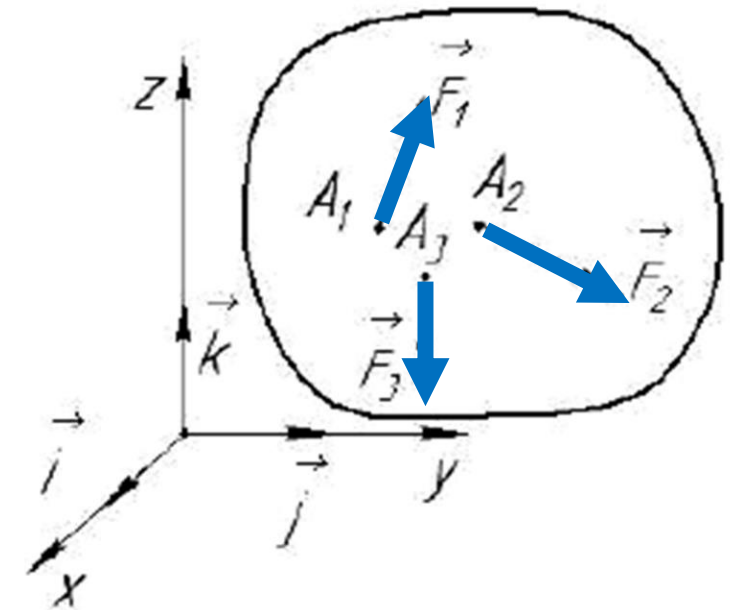


Рис. 2.5



## Основные понятия и определения статики

Методы определения главного вектора системы сил:

### 2. Аналитический метод

$$R_x = \sum_{v=1}^n X_v, \quad R_y = \sum_{v=1}^n Y_v, \quad R_z = \sum_{v=1}^n Z_v, \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$
$$\cos(\vec{R} \wedge \vec{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R} \wedge \vec{j}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R} \wedge \vec{k}) = \frac{R_z}{R}.$$

где  $X_v, Y_v, Z_v$  - проекции каждой из сил на оси  $x, y, z$ ;  $R_x, R_y, R_z$  и  $R$  - проекции и модуль главного вектора СС;  $\cos(\vec{R} \wedge \vec{i}), \cos(\vec{R} \wedge \vec{j}), \cos(\vec{R} \wedge \vec{k})$  - его направляющие косинусы.



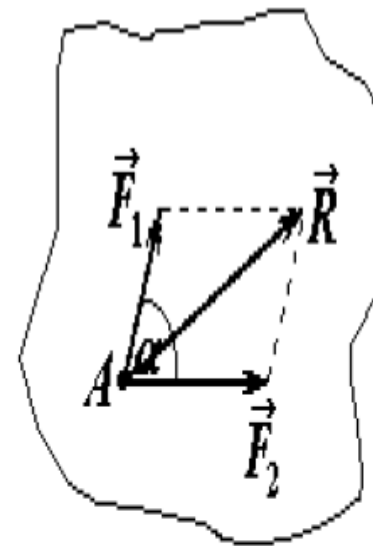
## Аксиомы статики

- ▶▶ *Аксиома I (аксиома инерции).* Существует по крайней мере одна система отсчета, относительно которой изолированная материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно [13].
- ▶▶ *Аксиома II (о равновесии двух сил).* Для равновесия АТТ под действием 2 сил необходимо и достаточно, чтобы силы были равны по величине, противоположны по направлению и действовали вдоль одной прямой (рис. 2.7).
- ▶▶ *Аксиома III (о присоединении и отбрасывании).* Уравновешенную систему сил, приложенную к абсолютно твердому телу, можно присоединять или отбрасывать, не изменяя кинематического состояния тела.
  - *I следствие из аксиомы III.* Для АТТ сила есть вектор скользящий (т.е. силу можно переносить по линии ее действия).
  - *II следствие из аксиомы III.* Любая из сил уравновешенной системы, взятая с противоположным знаком, является равнодействующей для остальных.

## Аксиомы статики

- **Аксиома IV (о равнодействующей двух сил).** Равнодействующая двух неуравновешенных сил, приложенных в одной точке тела, всегда существует и определяется по правилу сложения векторов  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  (рис. 2.7-2.9).

● **Следствие из аксиомы IV (теорема о трех непараллельных силах).** Для равновесия свободного абсолютно твердого тела под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, необходимо, но недостаточно, чтобы эти силы пересекались в одной точке.



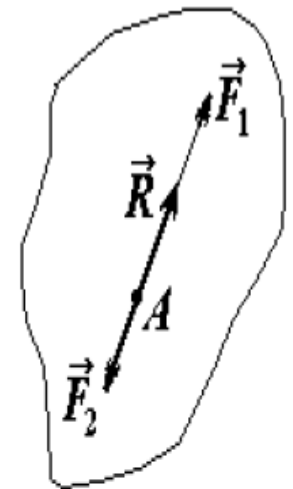
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$$

Рис. 2.7



$$R = F_1 + F_2$$

Рис. 2.8



$$R = F_1 - F_2$$

Рис. 2.9

- **Аксиома V (о равенстве действия и противодействия).** Всякому действию есть равное и противоположно направленное противодействие.
- **Аксиома VI (аксиома отвердевания).** Равновесие реального тела не нарушится, если оно внезапно отвердеет.

## Связи и их реакции

- ▶ Если объект имеет любые перемещения, то он называется **свободным** [13].
- ▶ Если же на перемещение объекта наложены ограничения, то такой объект **несвободный**.
- ♦ Тела, которые ограничивают перемещение данного объекта, называются *связями*.



*Замечание.* Связи реализуются в виде поверхностей, нитей, стержней и т.д.

- ♦ Сила, с которой связь действует на объект, называется силой реакции связи или *реакцией связи*.

▶▶▶ *Принцип освобожденности от связей.* Любой несвободный объект можно рассматривать как свободный, освободив его от связей и заменив их силами реакций связей.

## Типы связей

1. Связь осуществляется посредством **гладкой, неподвижной поверхности**, на которую тело  $M$  опирается точкой или линией (рис. 2.10).

Реакция  $\vec{R}_A$  направлена по нормали к этой поверхности.

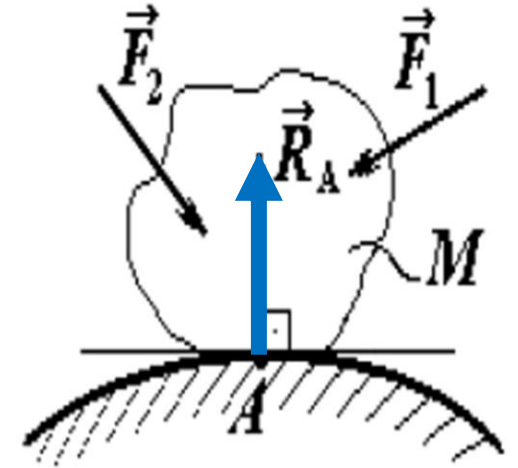


Рис. 2.10

2. Тело  $M$  опирается на **неподвижную точку или гладкую линию** (рис. 1.11). Реакции  $\vec{R}_A, \vec{R}_B$  направлены по нормали к поверхности рассматриваемого тела  $M$ .

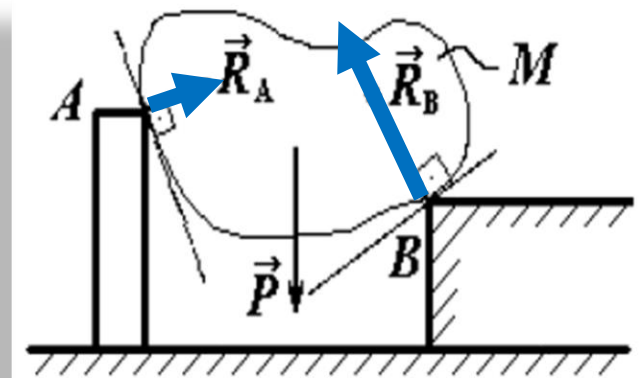


Рис. 2.11

## Типы связей

### 3. Гибкие связи (цепи, канаты, тросы) (рис. 2.12).

Реакции  $\vec{T}_A, \vec{T}_B, \vec{T}_C$  направлены вдоль связей от тела  $M$ .

### 4. Связь осуществляется посредством **неподвижного цилиндрического шарнира** или **подшипника**.

На неподвижный болт  $A$  надета втулка, жестко скрепленная с телом  $M$ , причем внутренний диаметр втулки почти равен диаметру болта. Тело  $M$  может, очевидно, вращаться вокруг оси шарнира, перпендикулярной к плоскости рисунка. Внешние силы, действующие на тело  $M$ , должны лежать в плоскости перпендикулярной оси шарнира, чтобы втулка не была снята с болта. Если пренебречь трением в шарнире, то реакция неподвижного болта направлена по нормали к его цилиндрической поверхности и, в зависимости от величин и направлений сил, приложенных к телу, может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Так как направление реакции неизвестно, то при решении задач эту реакцию представляют двумя составляющими и ищут эти составляющие:

$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A, \quad R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}.$$

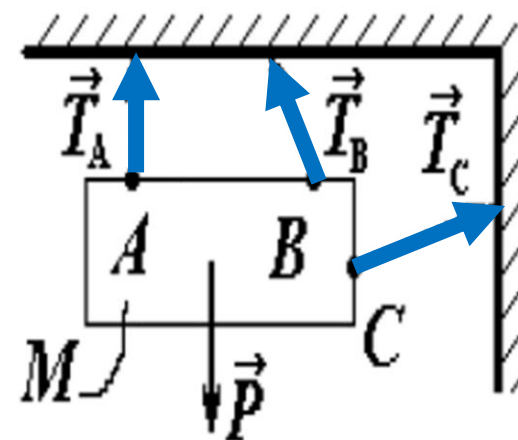


Рис. 2.12

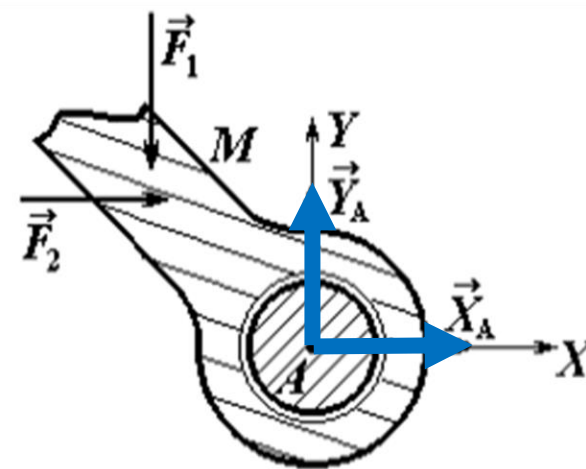


Рис. 2.13

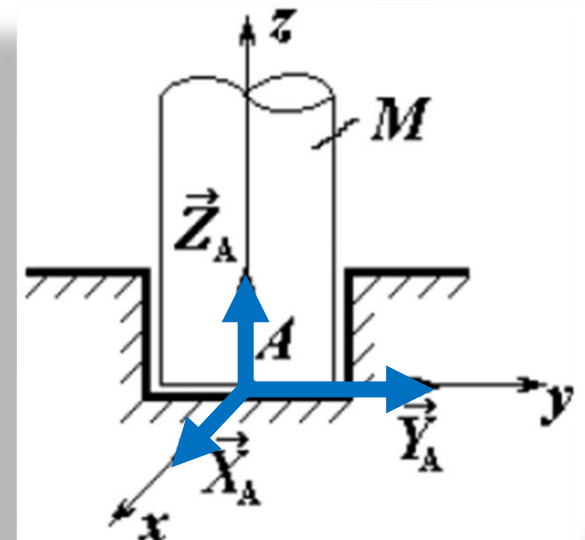
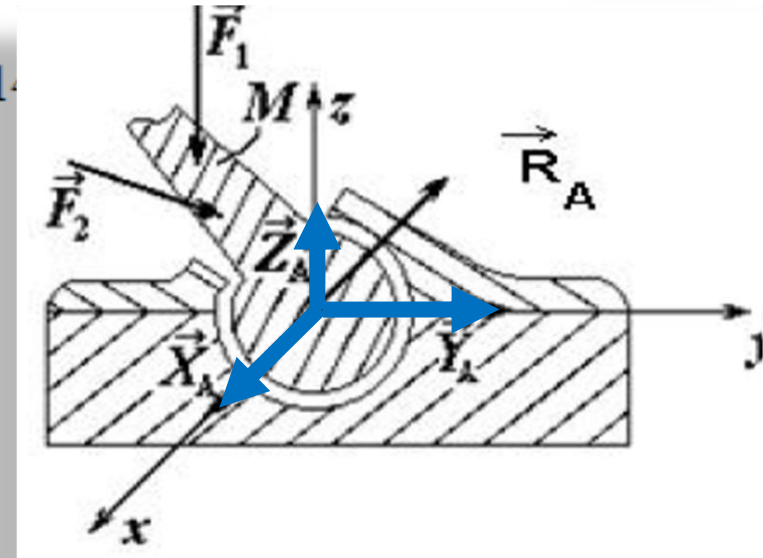
## Типы связей

5. Связь осуществляется посредством **сферического шарнира** (рис. 2.1) или **подпятника** (рис. 2.15).

Реакция  $\vec{R}_A$  может иметь любое направление. При решении задач реакцию представляют тремя составляющими  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$  по осям координат:  $\vec{X}_A = X_A \cdot \vec{i}$ ;  $\vec{Y}_A = Y_A \cdot \vec{j}$ ;  $\vec{Z}_A = Z_A \cdot \vec{k}$ , где через  $X_A, Y_A, Z_A$  обозначены проекции  $\vec{R}_A$  на координатные оси.

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}.$$

Составляющие реакции направляют в сторону положительных направлений осей. Если в результате решения задачи проекция составляющей будет иметь отрицательное значение, составляющая направлена в отрицательную сторону соответствующей оси.



## Типы связей

Опоры балок представлены на рис. 2.17 - 2.20.

6. **Стержни**  $CD$  - невесомые (1.17, 1.18), в точках  $C$  и  $D$  находятся шарниры. Сила реакции стержня направлена вдоль прямой  $CD$  (Аксиома II).

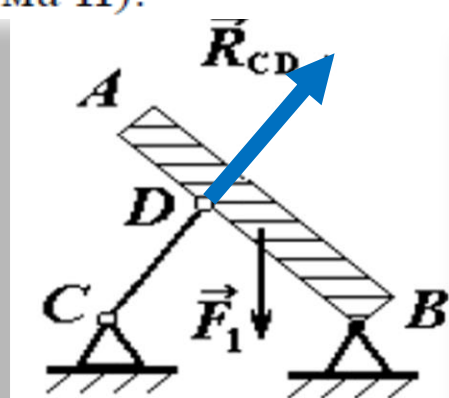


Рис. 2.17

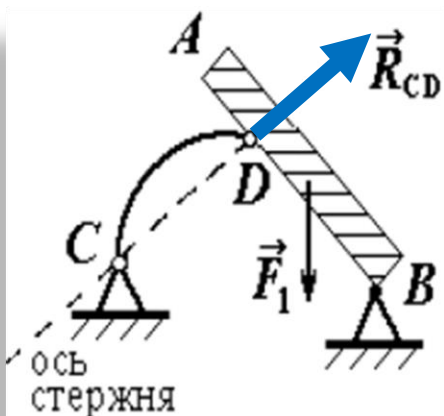


Рис. 2.18

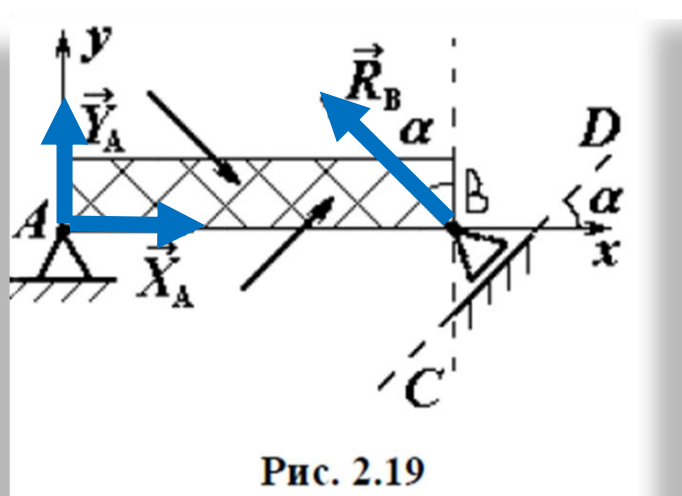


Рис. 2.19

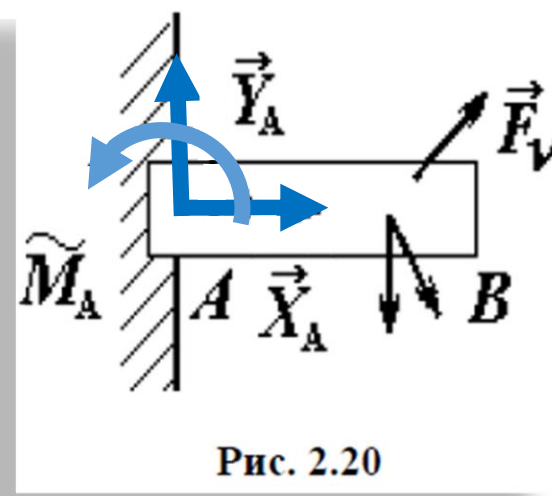


Рис. 2.20

В точке  $A$  (рис. 2.19) имеется неподвижная шарнирная опора (см. пояснения в пункте 4)  $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$ ;  $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$ .

7. В точке  $B$  (рис. 1.19) – шарнирно-подвижная опора.  $\vec{R}_B$  перпендикулярна плоскости  $CD$ .

8. **Жесткая заделка балки.** На балку  $AB$  действует плоская система сил (рис. 1.20). Реакция жесткой заделки эквивалентна силе  $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$  и паре сил с моментом  $\tilde{M}_A$  (считаем  $\tilde{M}_A > 0$ ).



## Основные виды распределенных нагрузок

- Система сил, действующих на твердое тело, может состоять как из **сосредоточенных** (или приложенных к точке) сил, так и сил, **распределенных по линии, по поверхности, по объему** [13].

⚙ *Замечание.* Например, силы тяжести распределены по объему тела.

—♦ *Линейные распределенные силы* - силы, распределенные по линии.

—♦ *Интенсивность  $q$  линейных распределенных сил* – сила, действующая на единицу длины линии.

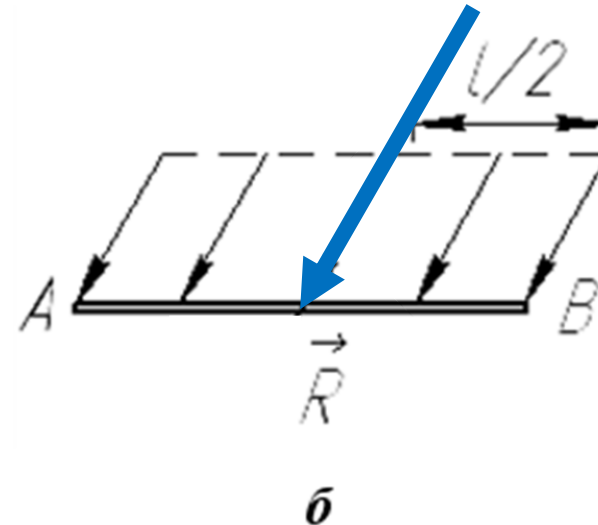
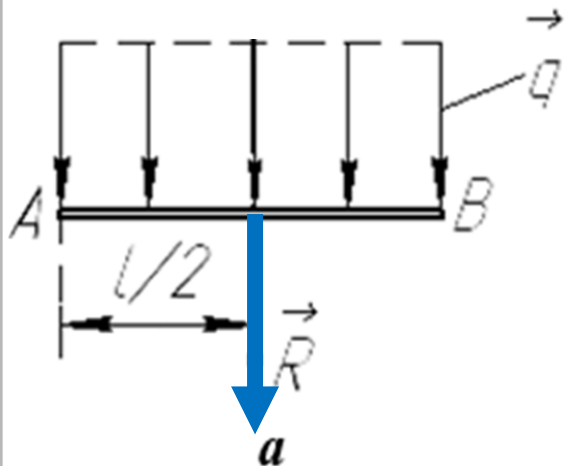
⚙ *Замечание.* Интенсивность  $q$  измеряется в ньютонах на метр (Н/м) в системе единиц СИ.

## Основные виды распределенных нагрузок

Виды нагрузок:

1. **Интенсивность  $q$  постоянна** (рис. 2.21, *a*, *б*). На участке  $AB$  прямой линии длиной  $l$  распределены параллельные силы, которые приводятся к равнодействующей  $\vec{R}$ , направленной параллельно силам и проходящей через середину отрезка  $AB$ .

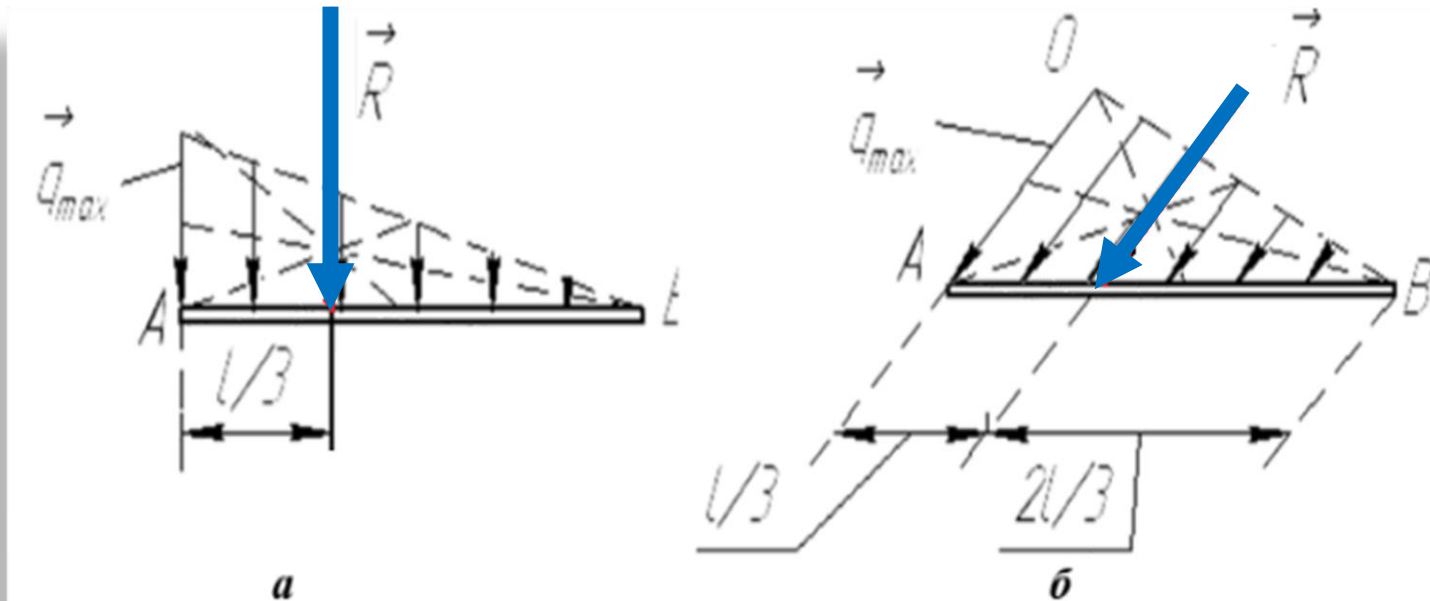
Если  $q = \text{const.}$  то модуль  $R = ql$ .



## Основные виды распределенных нагрузок

**2. Интенсивность  $q$  изменяется по линейному закону от  $q_{\max}$  до нуля (рис. 1.47, а, б). Такая система сил приводится к равнодействующей  $\vec{R}$ , направленной параллельно силам, линия ее действия проходит через центр тяжести треугольника  $AOB$ .**

Если  $q \in [0, q_{\max}]$ , то модуль  $R = \frac{q_{\max} l}{2}$ .



## Элементы теории моментов

—♦ *Момент силы относительно точки* есть векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы  $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$  на силу  $\vec{F}$  [13]:

$$\overrightarrow{mom}_O \vec{F} = [\vec{r} \cdot \vec{F}].$$

- ⚙ **Замечание.** Модуль момента силы относительно точки равен  $|\overrightarrow{mom}_O \vec{F}| = |[\vec{r} \cdot \vec{F}]| = rF \sin \alpha$ .
- ⚙ **Замечание.** Из точки  $O$  на линию действия силы опустим перпендикуляр, длина которого равна  $h$ , где  $h$  - **плечо силы относительно точки  $O$**  (рис. 2.23).  $h = r \sin \alpha$ , тогда

$$|\overrightarrow{mom}_O \vec{F}| = |\vec{F}| h = Fh \quad \text{или} \quad |\overrightarrow{mom}_O \vec{F}| = 2S_{\triangle ABC}.$$

- ⚙ Вектор  $\overrightarrow{mom}_O \vec{F}$  направлен перпендикулярно плоскости, в которой находятся векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , в ту сторону, откуда виден воображаемый поворот от вектора  $\vec{r}$  к вектору  $\vec{F}$  на наименьший угол против часовой стрелки.

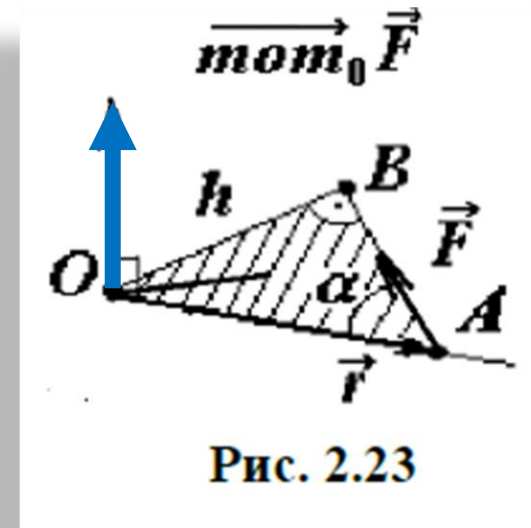


Рис. 2.23



## Элементы теории моментов

### Свойства момента силы относительно точки:

1. Момент силы относительно точки не изменится, если силу перенести вдоль линии ее действия.
2. Момент силы относительно точки не изменится, если точку перенести вдоль линии, параллельной линии действия силы.
3. Момент силы относительно точки **равен нулю**, если линия действия проходит через точку.

4.  $\overrightarrow{mom}_O \vec{F} = -\overrightarrow{mom}_O (-\vec{F})$ , при условии, что силы  $\vec{F}$  и  $-\vec{F}$  направлены по одной прямой.

## Элементы теории моментов

—♦ *Скалярный момент силы относительно точки* есть произведение модуля силы на плечо, взятое со знаком «+», если сила стремится повернуть тело вокруг данной точки против стрелки часов, и знак «-», если сила стремится повернуть тело вокруг данной точки по часовой стрелке.



$h_1$  - плечо силы  $\vec{F}_1$  относительно точки  $A$ ,

$h_2$  - плечо силы  $\vec{F}_2$  относительно точки  $A$  (рис. 2.25).

$$m\tilde{o}m_A \vec{F}_1 = +F_1 h_1,$$

$$m\tilde{o}m_A \vec{F}_2 = -F_2 h_2,$$

$$m\tilde{o}m_A \vec{F}_3 = 0,$$

так как плечо силы  $\vec{F}_3$  относительно точки  $A$  равно нулю.

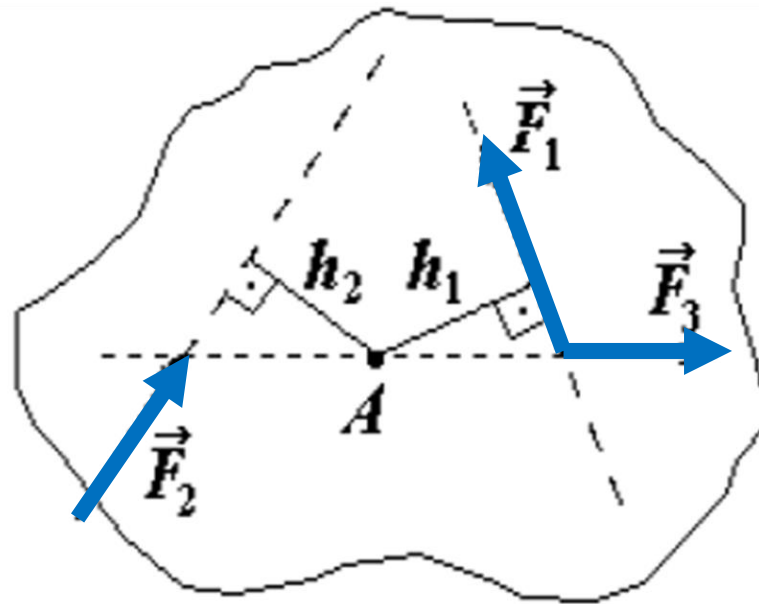


Рис. 2.25

$$m\tilde{o}m_A \vec{F} = \pm F \cdot h.$$

## Элементы теории моментов

—♦ *Главный момент системы сил относительно некоторого центра  $O$  есть сумма моментов всех сил системы относительно этого центра.*

$$\vec{M}_O = \sum_{v=1}^n \overrightarrow{Om_0} \vec{F}_v.$$

- *Теорема (Вариньона для системы сходящихся сил). Сумма моментов всех сил неуравновешенной сходящейся системы относительно центра или оси равна моменту равнодействующей этой системы относительно этого центра или этой оси.*

$$\sum_{v=1}^n \overrightarrow{Om_B} \vec{F}_v = \overrightarrow{Om_B} \vec{R},$$

$$\sum_{v=1}^n mom_l \vec{F}_v = mom_l \vec{R}.$$

# Теоретическая механика. Раздел «СТАТИКА»

## Элементы теории пар

Две контрпараллельные силы, равные по модулю, линии действия которых не совпадают, называются **парой сил**.



Пару сил (рис. 1.38) можно рассматривать как предельный случай двух контрпараллельных сил, не равных по модулю, когда  $F_2 \rightarrow F_1$ .

Если  $F_2 \rightarrow F_1$ , то  $R \rightarrow 0$ ,

$$C = \underbrace{AB}_{\text{wavy}} \frac{F_1}{R} = AB \frac{F_2}{F_2 - F_1}.$$

Если  $F_2 \rightarrow F_1$ , то  $BC \rightarrow \infty$ .

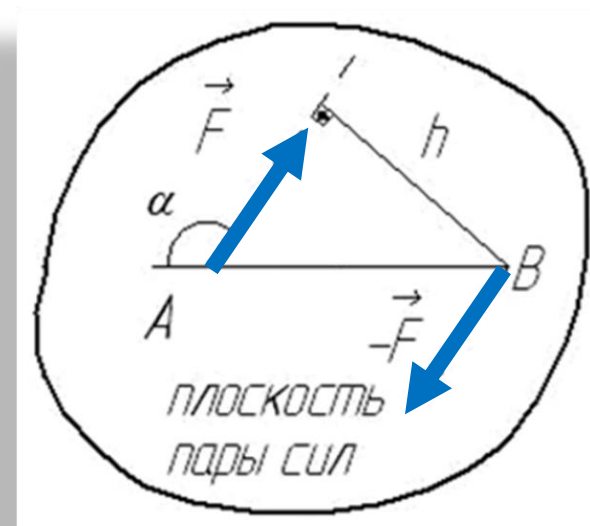


Следовательно, **пару сил нельзя упростить**, т.е. пара сил – первичный неприводимый механический элемент.



Пара сил представляет неуравновешенную систему, которая не может быть заменена одной силой. Так как главный вектор пары сил равен нулю, то **момент пары сил  $\vec{M}^{\Pi}$  не зависит от выбора точки**.

$$\vec{M}^{\Pi} = \vec{M}_B + \overrightarrow{tom_B} \vec{F} + \overrightarrow{tom_B} (-\vec{F}), \quad \vec{M}^{\Pi} = [\vec{BA} \cdot \vec{F}],$$



# Теоретическая механика. Раздел «СТАТИКА»

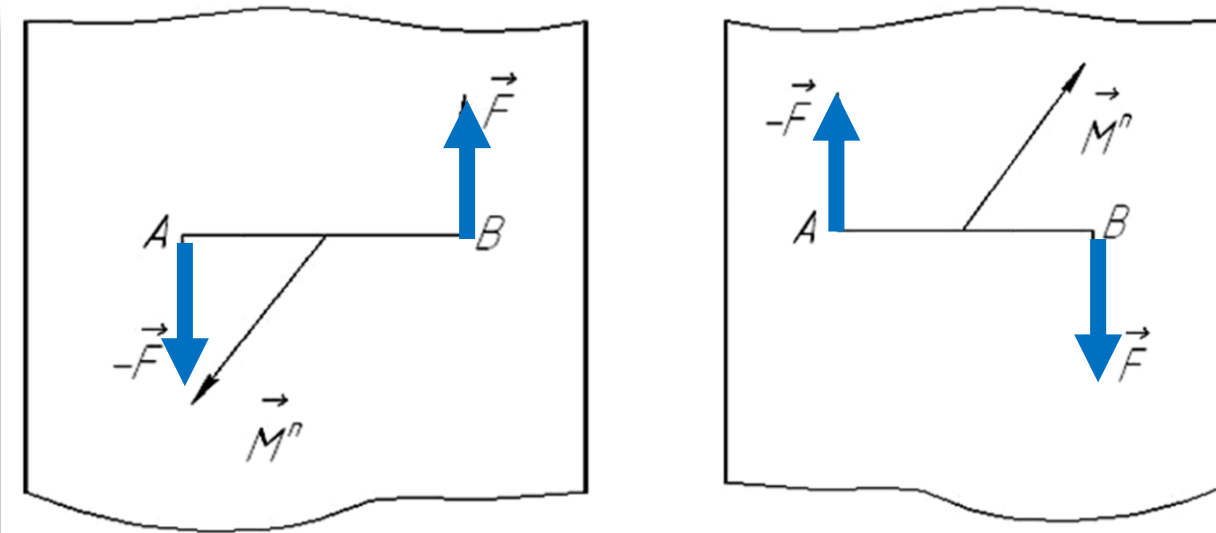
## Элементы теории пар

—♦ *Момент пары сил* перпендикулярен к плоскости пары сил и направлен в ту сторону, откуда видно вращение плоскости пары сил против часовой стрелки (рис. 2.29, 2.30).

$$\vec{M}^{\Pi} = [\vec{BA} \cdot \vec{F}].$$

⚙ *Замечание. По модулю момент пары сил равен произведению модуля одной из сил пары на плечо пары  $h$ .*

$$M^{\Pi} = F \cdot h.$$



$$M^{\Pi} = F \cdot h.$$



## Элементы теории пар



### *Теоремы об эквивалентности пар:*

1. Действие пары на абсолютно твердое тело не изменится, если пару перенести в другую плоскость, параллельную плоскости данной пары.
2. Действие пары на абсолютно твердое тело не изменится, если пару перенести в ее плоскости в любое другое место.
3. Действие пары на абсолютно твердое тело не изменится, если изменить величину силы и плечо пары так, чтобы момент этой пары не изменился.



*Следствие (из трех теорем об эквивалентности пар):* две пары сил эквивалентны между собой, если их моменты равны.

## Условия равновесия системы сходящихся сил

### 1. Векторная форма условий равновесия ССС

*Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к свободному абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил был равен нулю*

$$\vec{R} = 0.$$

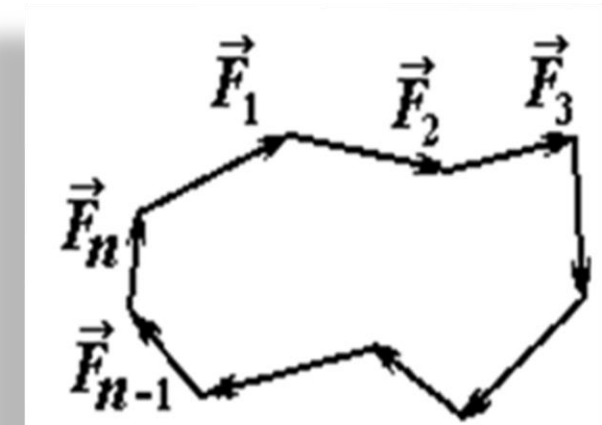
### 2. Геометрическая форма условий равновесия ССС

*Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к свободному абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник был замкнут.*

### 3. Аналитическая форма условий равновесия ССС

*Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к свободному абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю*

$$\sum_{v=1}^n X_v = 0, \quad \sum_{v=1}^n Y_v = 0, \quad \sum_{v=1}^n Z_v = 0.$$



## Условия равновесия плоской системы сил

### 1. Векторная форма

Для равновесия плоской системы сил, приложенной к свободному абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор был равен нулю и главный момент системы относительно произвольной точки был равен нулю.

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_0 = 0.$$

### 2. Аналитическая форма

**Аналитическая форма 1.** Для равновесия плоской системы сил, приложенной к свободному абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил на оси  $x$  и  $y$  были равны нулю, и сумма скалярных моментов сил относительно произвольной точки была равна нулю.

$$\sum_{v=1}^n X_v = 0, \quad \sum_{v=1}^n Y_v = 0, \quad \sum_{v=1}^n m \tilde{m}_0 \vec{F}_v = 0.$$

**Аналитическая форма 2.**  $\sum_{v=1}^n m \tilde{m}_A \vec{F}_v = 0, \quad \sum_{v=1}^n m \tilde{m}_B \vec{F}_v = 0, \quad \sum_{v=1}^n m \tilde{m}_C \vec{F}_v = 0$ , где  $A, B, C \in \Delta ABC$ .

**Аналитическая форма 3.**  $\sum_{v=1}^n m \tilde{m}_A \vec{F}_v = 0, \quad \sum_{v=1}^n m \tilde{m}_B \vec{F}_v = 0, \quad \sum_{v=1}^n \text{Pr}_l \vec{F}_v = 0$ , где ось  $l \nparallel AB$ .



## Примеры решения задач на равновесие плоской системы сил

### 1. Равновесие тела под действием плоской системы сходящихся сил (три силы)

При решении задач на равновесие тела под действием плоской системы трех сходящихся сил можно воспользоваться двумя способами. В частности, первый способ является наиболее наглядным и предполагает использование теоремы о трех силах (следствие IV аксиомы статики). Второй способ относится к равновесию тела под действием плоской произвольной СС (см. п.2).



**Следствие из аксиомы IV (теорема о трех непараллельных силах).** Для равновесия свободного абсолютно твердого тела под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, необходимо, но недостаточно, чтобы эти силы пересекались в одной точке (точке схода).

## Примеры решения задач на равновесие плоской системы сил

### 1. Равновесие тела под действием плоской системы сходящихся сил (три силы)

 **Пример 1.** Плоское тело  $AB$  произвольной симметричной формы весом  $G = 10 \text{ Н}$  в точке  $A$  закреплено шарнирно, а в точке  $B$  – с помощью нити  $BC$  под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту. Определить реакцию шарнира  $A$ .

*Дано:*  $G = 10 \text{ Н}$ ;  $\alpha = 45^\circ$ .

*Найти:*  $R_A$  – реакцию шарнира  $A$  для схемы, показанной на рис. 1.

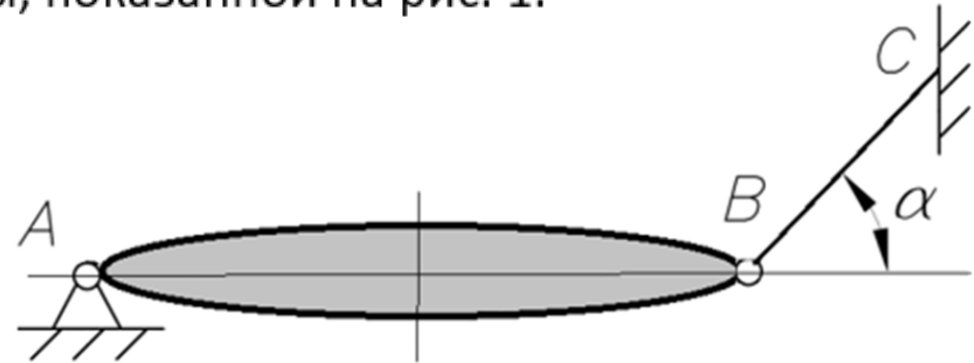


Рис. 1

## Примеры решения задач на равновесие плоской системы сил

### 1. Равновесие тела под действием плоской системы сходящихся сил (три силы)

Решение:

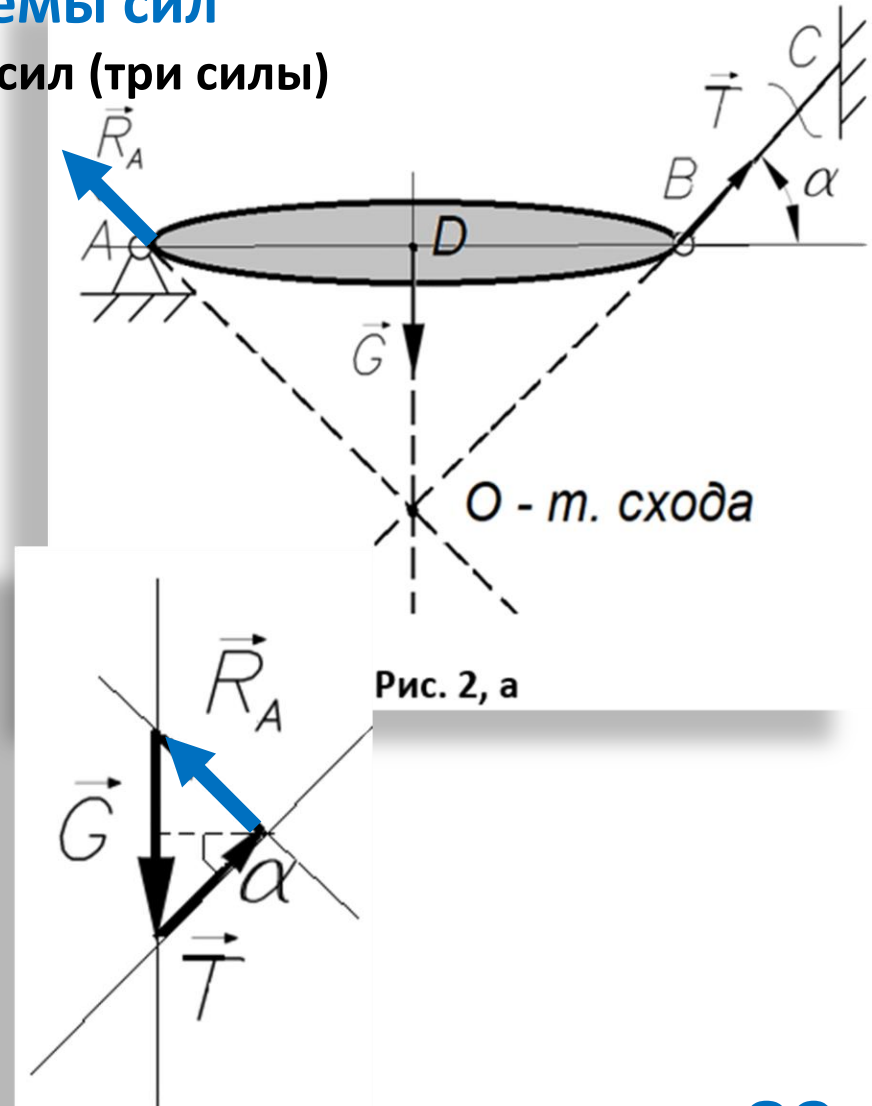
- 1) Рассмотрим равновесие тела  $AB$  (расчетная схема на рис. 2, а).
- 2) Согласно принципу освобождения от связей имеем

$$\{\vec{G}, \vec{R}_A, \vec{T}\} \sim 0,$$

при этом линия действия искомой силы реакции  $\vec{R}_A$  определяется по теореме о трех силах, а направление  $\vec{R}_A$  - из силового треугольника (рис. 2, б).

3) Плоская система сходящихся трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости.

4) Условие равновесия данной СС – замкнутость силового треугольника  $\Delta \vec{G}, \vec{R}_A, \vec{T}$  (рис. 2, б).



## Примеры решения задач на равновесие плоской системы сил

### 1. Равновесие тела под действием плоской системы сходящихся сил (три силы)

Из геометрии (рис. 2, б) видно, что при  $\alpha = 45^\circ$  модули сил  $\bar{R}_A, \bar{T}$  равны  $R_A = T$ , при этом выполняется соотношение

$$2R_A \cos \alpha = G,$$

тогда

$$R_A = \frac{G}{2 \cos \alpha} = \frac{G}{2 \cos 45^\circ} = \frac{10 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \approx 7,07 \text{ (Н)}.$$

Ответ:  $R_A \approx 7,07 \text{ (Н)}$ .

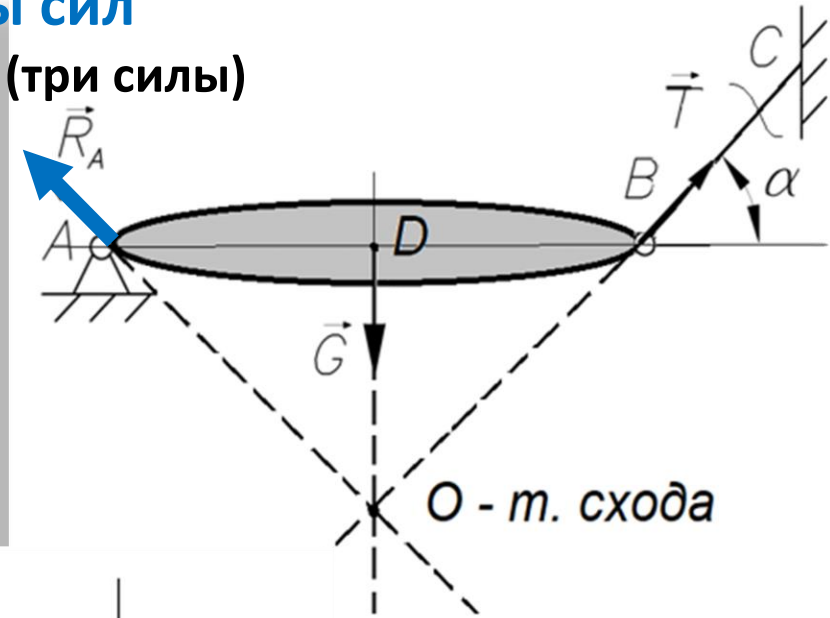
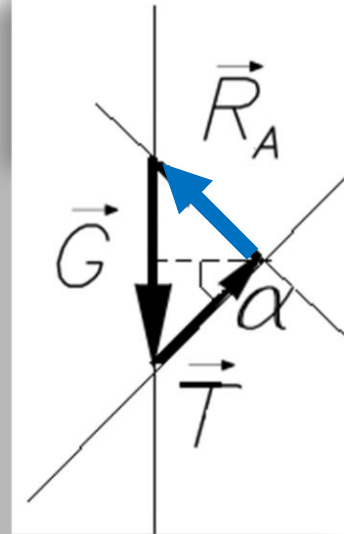


Рис. 2, а



## Примеры решения задач на равновесие плоской системы сил

### 1. Равновесие тела под действием плоской системы сходящихся сил (три силы)

#### Пример 2.

Подъемный кран  $ABC$  удерживается в равновесии тросом  $BO$  (рис. 1.25). Определить натяжение троса, а также величину и направление реакции шарнира  $C$ , если вес поднимаемого груза равен  $P$ . Часть  $BC$  стрелы вертикальна, а трос  $BO$  является продолжением  $AB$ . Даны размеры: Весом стрелы пренебречь.

Дано:  $P$ ,  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $AC = a$ .

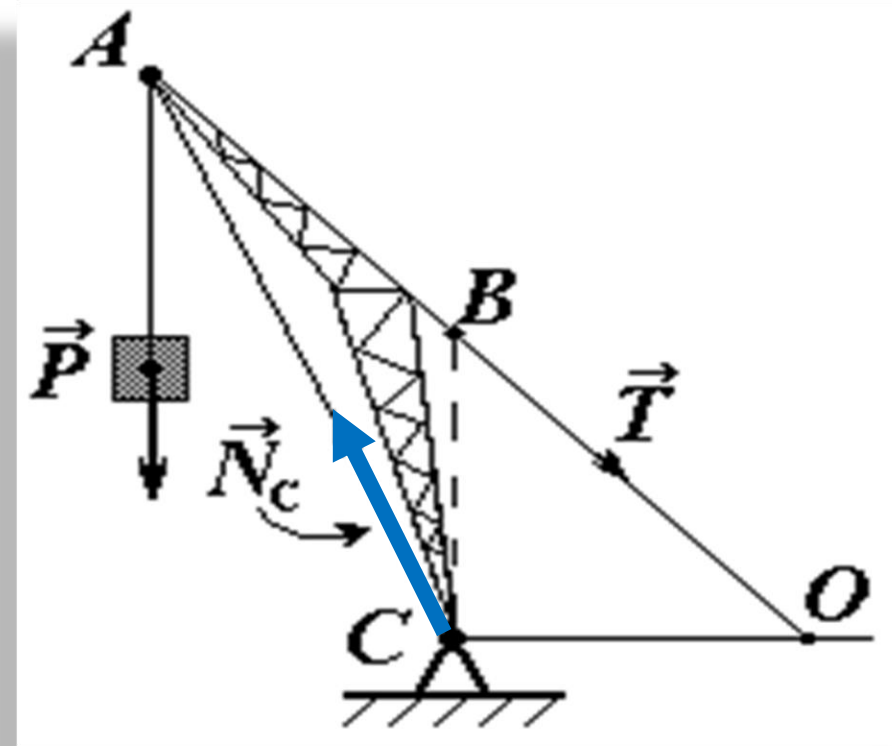
Определить: натяжение троса

$\vec{T}$  и реакцию  $\vec{N}_C$ .

Решение.

1. Рассмотрим равновесие крана  $ABC$ .

2. На кран  $ABC$  действуют три силы: активная сила  $\vec{P}$  и реакции связей в точках  $B$  и  $C$ .



## Примеры решения задач на равновесие плоской системы сил

### 1. Равновесие тела под действием плоской системы сходящихся сил (три силы)

По следствию из VI аксиомы реакция  $\vec{N}_C$  в точке  $C$  должна проходить через точку  $A$   $(\vec{P}, \vec{T}, \vec{N}_C) \Leftrightarrow 0$ .

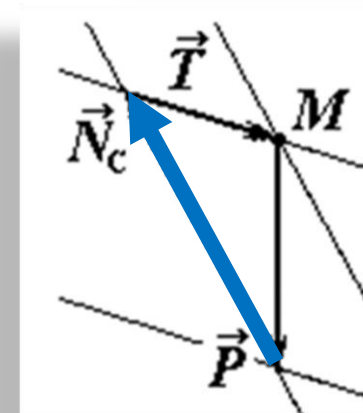
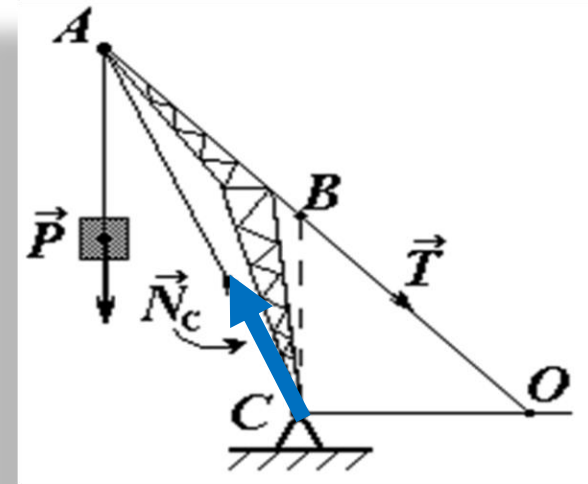
3. Полученная система сил - плоская система сходящихся сил.

4. Воспользуемся условиями равновесия плоской системы сходящихся сил в геометрической форме.

Для равновесия крана  $ABC$  под действием плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой треугольник был замкнут.

Строим силовой треугольник и решаем его. Выбираем на плоскости произвольную точку  $M$  и строим вектор в произвольном масштабе (рис. 1.26).

Затем, через начало и конец вектора  $\vec{P}$  проводим прямые, параллельные силам  $\vec{T}$  и  $\vec{N}_C$ .



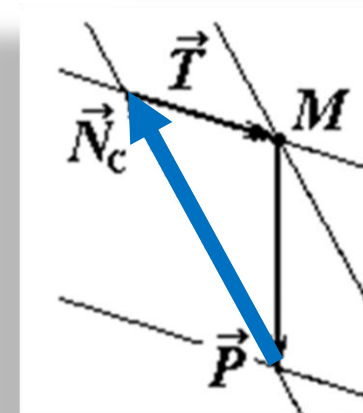
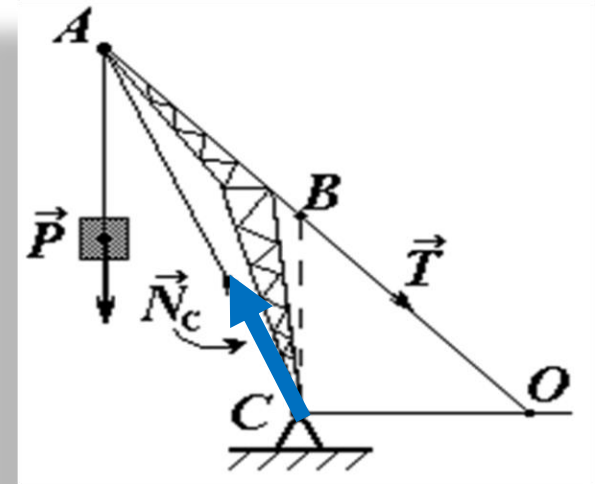
## Примеры решения задач на равновесие плоской системы сил

### 1. Равновесие тела под действием плоской системы сходящихся сил (три силы)

Силовой треугольник подобен треугольнику  $ABC$ .

$$\frac{P}{b} = \frac{T}{a}; \quad T = \frac{Pa}{b}; \quad \frac{N_c}{c} = \frac{P}{b}; \quad N_c = P \frac{c}{b}.$$

Ответ:  $T = \frac{Pa}{b}$ ;  $N_c = \frac{Pc}{b}$ ; реакция  $\vec{N}_c$  направлена по прямой  $CA$ .



## Примеры решения задач на равновесие плоской системы сил

### 2. Равновесие тела под действием плоской системы сходящихся сил (более трех сил)

**Пример 3.** Груз весом 2 кН поднимается краном ВАС посредством цепи, перекинутой через блоки А и D. Определить усилия в невесомых стержнях АВ и АС (рис. 1.27).

Дано:  $P = 2$  кН.

Определить:  $S_{AB}, S_{AC}$ .

Решение.

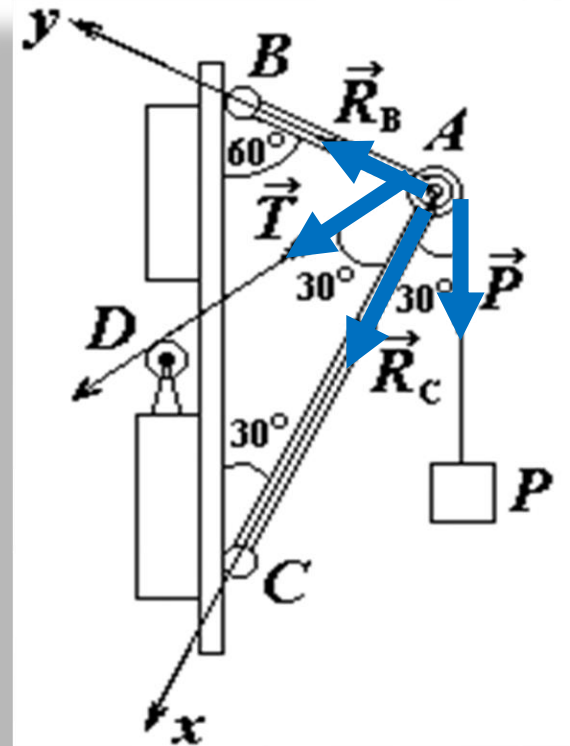
1. Рассмотрим равновесие точки А.

2. Считаем, что стержни АВ и АС растянуты,  $\vec{R}_B, \vec{R}_C, \vec{P}, \vec{T}$  - силы, действующие на точку А. Так как груз поднимают равномерно, то

$$(\vec{R}_B, \vec{R}_C, \vec{P}, \vec{T}) \Leftrightarrow 0, \quad T = P.$$

3. На точку А действует плоская система сходящихся сил.

4. Воспользуемся условиями равновесия в аналитической форме.



## Примеры решения задач на равновесие плоской системы сил

### 2. Равновесие тела под действием плоской системы сходящихся сил (более трех сил)

Для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил на две координатные оси были равны нулю.

$$\sum_{v=1}^n X_v = 0, \quad R_C + P \cos 30^\circ + T \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum_{v=1}^n Y_v = 0. \quad R_B + T \cos 60^\circ - P \cos 60^\circ = 0,$$

$$R_C = -2P \cos 30^\circ,$$

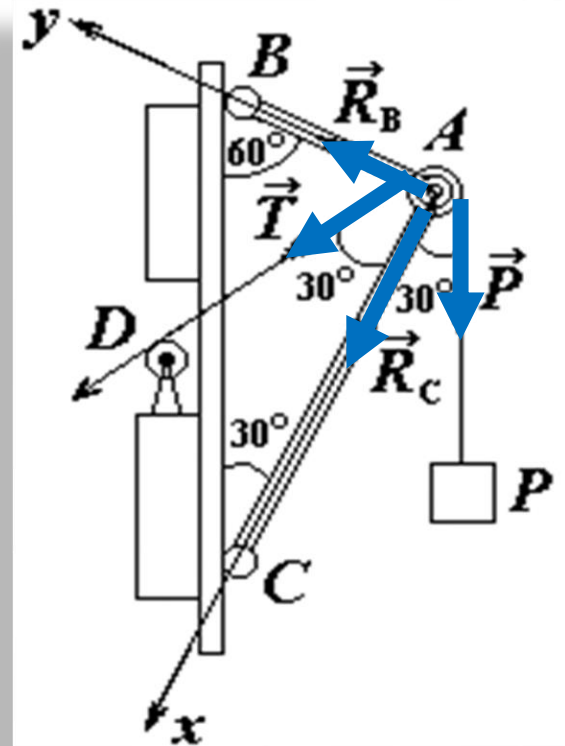
$$R_C = -3,46 \text{ кН},$$

$$R_B = 0.$$

По пятой аксиоме статики усилия в стержнях (т.е. силы, приложенные к стержням со стороны их конечных точек равны по величине соответствующим реакциям).

$$\text{Ответ: } \vec{S}_{AB} = -\vec{R}_B; \quad S_{AB} = 0; \quad \vec{S}_{AC} = -\vec{R}_C; \quad S_{AC} = -3,46 \text{ кН}.$$

Знак “-” для  $S_{AC}$  показывает, что стержень  $AC$  сжат, а не растянут.



# Теоретическая механика. Раздел «СТАТИКА»

## Примеры решения задач на равновесие плоской системы сил

### 3. Равновесие одного тела под действием плоской произвольной системы сил

При решении задач на равновесие плоской системы сил, приложенной к свободному абсолютно твердому телу, можно пользоваться любой из трех форм условий равновесия, число независимых скалярных уравнений во всех случаях равно трем.

#### Пример 4.

Дано:  $q = 5 \text{ кН/м}$ ;  $P = 2 \text{ кН}$ ;  
 $G = 10 \text{ кН}$ ;  $M = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $a = 4 \text{ м}$ ;  
 $b = 2 \text{ м}$ ;  $c = 2 \text{ м}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ .

Найти: реакции опор для схемы, показанной на рис. 3.

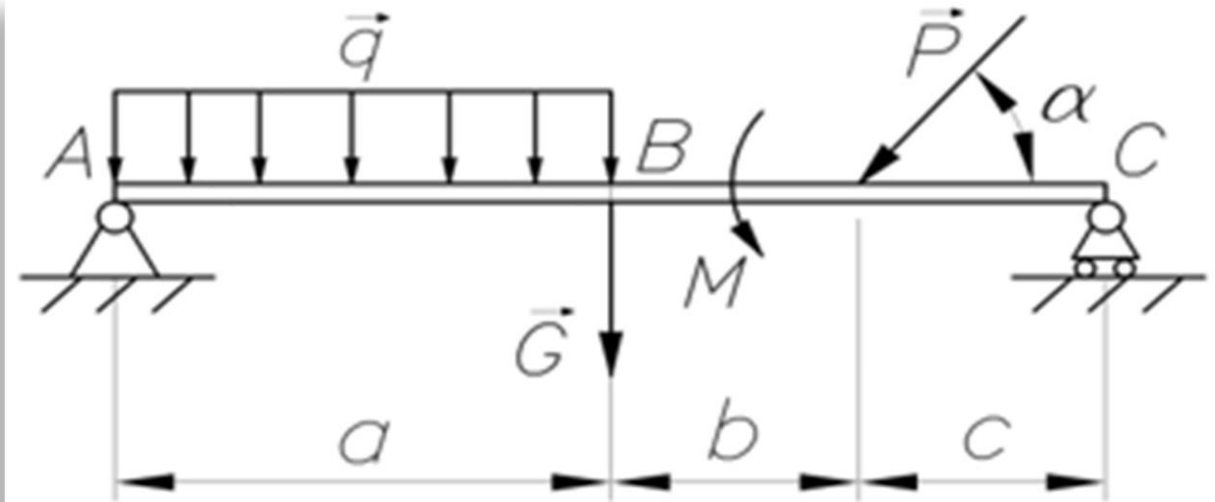


Рис. 3

# Теоретическая механика. Раздел «СТАТИКА»

## Примеры решения задач на равновесие плоской системы сил

### 3. Равновесие одного тела под действием плоской произвольной системы сил

Решение:

1) Рассмотрим равновесие балки AC (расчетная схема на рис. 4).

2) Применим принцип освобождения от связей:

$$\{\vec{Q}, \vec{G}, \vec{P}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_C, \vec{M}\} \sim 0,$$

$$Q = q \cdot AB = q \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (кН)}.$$

3) Плоская система сил.

4) Составим уравнения равновесия:

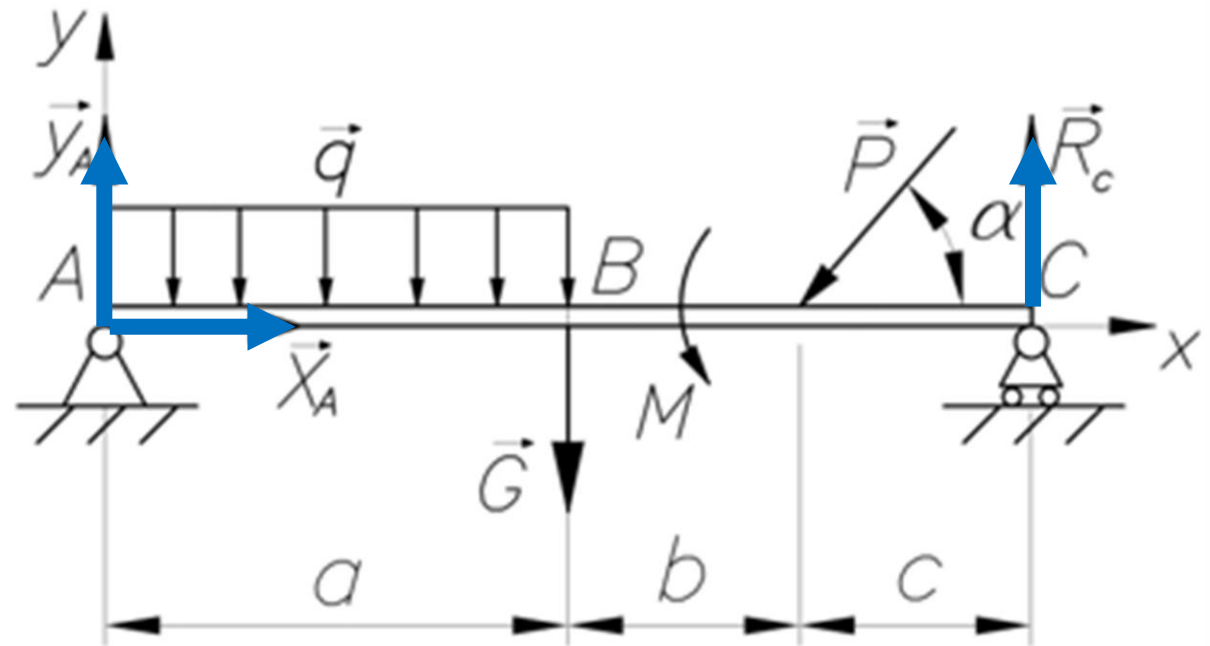


Рис. 4

## Примеры решения задач на равновесие плоской системы сил

### 3. Равновесие одного тела под действием плоской произвольной системы сил

Решение:

$$\sum_{v=1}^n X_v = 0; \quad X_A - P \cos 30^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{v=1}^n Y_v = 0; \quad Y_A - q \cdot 4 - P \sin 30^\circ - G + R_C = 0, \quad (2)$$

$$\sum_{v=1}^n m \tilde{O} m_A \bar{F}_v = 0; \quad -q \cdot 4 \cdot 2 - G \cdot 4 + M - P \sin 30^\circ \cdot 6 + R_C \cdot 8 = 0 \quad (3)$$

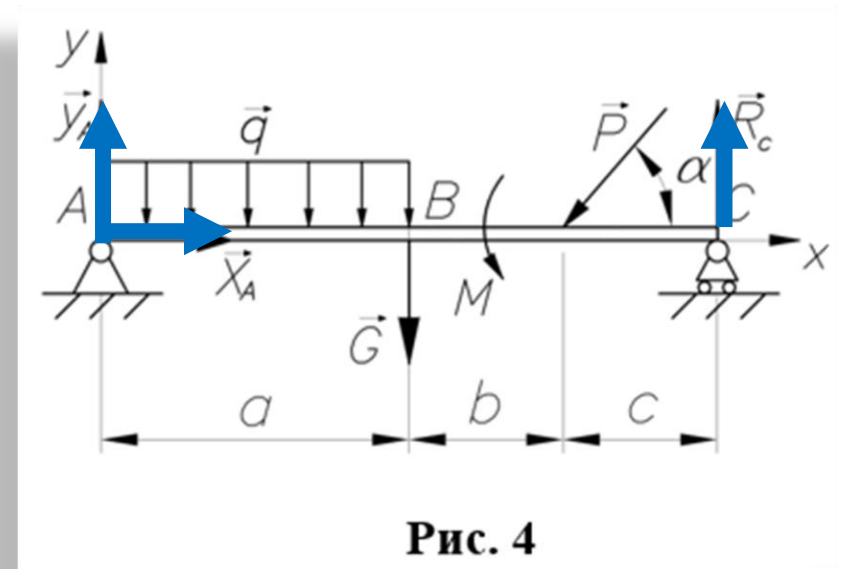


Рис. 4

Из уравнения (1):

$$R_C = (5 \cdot 4 \cdot 2 + 10 \cdot 4 - 2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 6) / 8 = 10,5 \text{ кН.}$$

$$X_A = P \cos 30^\circ; \quad X_A = 2 \cdot 0,866 = \quad \text{Из уравнения (2):}$$

Из уравнения (3):

$$Y_A = q \cdot 4 + P \sin 30^\circ + G + R_C; \quad Y_A = 5 \cdot 4 + 2 \cdot 0,5 + 10 - 10,5 = 20,5 \text{ кН.}$$

$$R_C = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 + G \cdot 4 - M + P \sin 30^\circ \cdot 6}{8}; \quad \text{Ответ: } X_A = 1,732 \text{ кН, } R_C = 10,5 \text{ кН, } Y_A = 20,5 \text{ кН.}$$

# Теоретическая механика. Раздел «СТАТИКА»

## Примеры решения задач на равновесие плоской системы сил

### 3. Равновесие одного тела под действием плоской произвольной системы сил

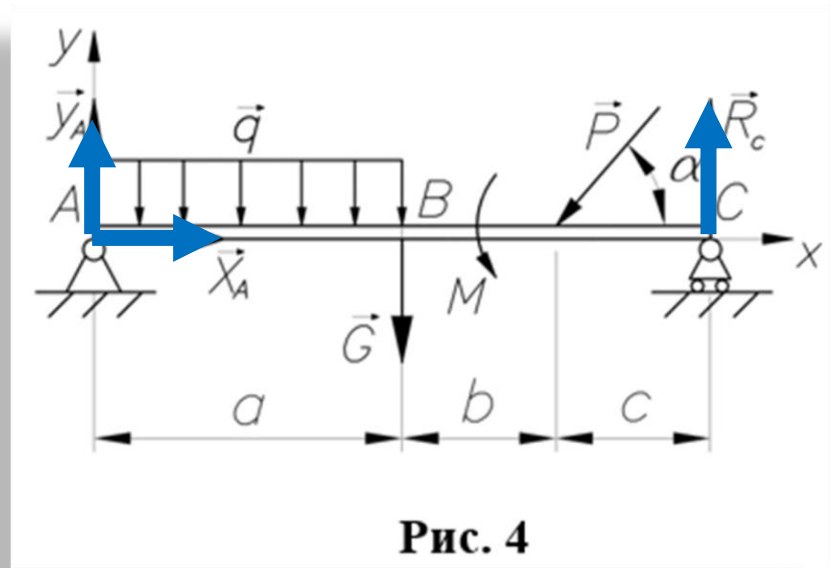
Решение:

$$R_C = (5 \cdot 4 \cdot 2 + 10 \cdot 4 - 2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 6) / 8 = 10,5 \text{ кН.}$$

Из уравнения (2):

$$Y_A = q \cdot 4 + P \sin 30^\circ + G + R_C; Y_A = 5 \cdot 4 + 2 \cdot 0,5 + 10 - 10,5 = 20,5 \text{ кН.}$$

$$\text{Ответ: } X_A = 1,732 \text{ кН, } R_C = 10,5 \text{ кН, } Y_A = 20,5 \text{ кН.}$$



# Теоретическая механика. Раздел «СТАТИКА»

## Примеры решения задач на равновесие плоской системы сил

### 3. Равновесие одного тела под действием плоской произвольной системы сил

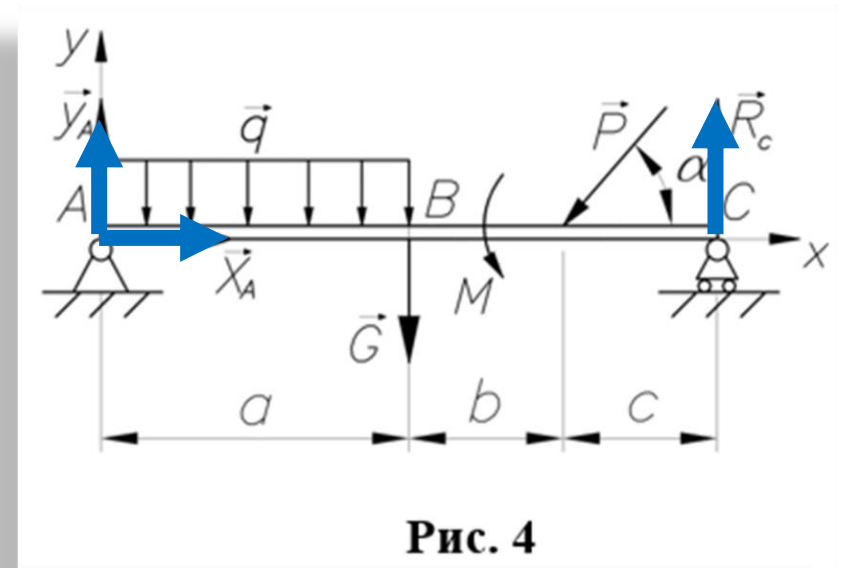
Решение:

$$R_C = (5 \cdot 4 \cdot 2 + 10 \cdot 4 - 2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 6) / 8 = 10,5 \text{ кН.}$$

Из уравнения (2):

$$Y_A = q \cdot 4 + P \sin 30^\circ + G + R_C; Y_A = 5 \cdot 4 + 2 \cdot 0,5 + 10 - 10,5 = 20,5 \text{ кН.}$$

Ответ:  $X_A = 1,732 \text{ кН}$ ,  $R_C = 10,5 \text{ кН}$ ,  $Y_A = 20,5 \text{ кН}$ .





## Основная задача сопротивления материалов

Все твердые тела в той или иной степени должны обладать свойствами прочности и жесткости, т.е. в определенных пределах должны воспринимать внешние нагрузки без разрушения и без существенного изменения геометрических размеров. Указанные свойства твердых тел определили их широкое применение при создании элементов инженерных конструкций. Изучение прочности и жесткости твердых тел занимается наука, называемая механикой твердого тела, а учебная дисциплина, которая позволяет ввести студентов технических вузов в мир инженерных расчетов, называется «Сопротивление материалов».

**Основная цель курса «Сопротивления материалов» - задача создания практичных, простых и надежных методов расчета типовых, наиболее часто встречающихся элементов инженерных конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.**



**Прочность** - способность конструкции, ее частей и деталей выдерживать определенную нагрузку не разрушаясь.



**Жесткость** - способность конструкции или ее элементов сопротивляться возникновению больших деформаций (изменению формы и размеров) под действием внешних нагрузок.



**Устойчивость** - способность конструкции или ее элементов сохранять определенную, начальную форму упругого равновесия.

Для того, чтобы конструкция в целом отвечала требованиям прочности, жесткости и устойчивости, а также была надежной в эксплуатации, необходимо придать ее элементам наиболее рациональную форму, т.е. в зависимости от свойств материалов, из которых они изготовлены определить соответствующие размеры и форму. На первый взгляд для увеличения прочности детали, необходимо увеличить ее размеры. Однако, простое увеличение размеров и формы не всегда может привести к желаемому результату, т.е. это приводит к увеличению ее веса и сил инерции. Конструкции должны быть прочными и надежными в эксплуатации, но в то же время легкими и дешевыми.



## Задачи и методы сопротивления материалов

**Первая задача курса сопротивления материалов:**

**изложение методов расчета элементов конструкции на прочность.**

**Вторая задача курса:**

**изложение методов расчета элементов конструкции на жесткость.**

**Третья задача курса:**

**изложение методов расчета элементов конструкции на устойчивость.**

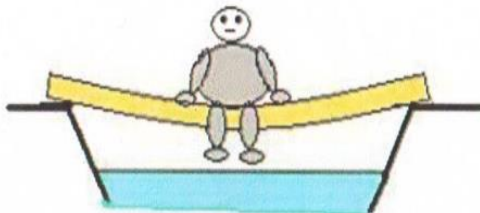
## Расчетная схема

В сопротивлении материалов, как и в любой естественной науке, расчет конструкции начинается с выбора расчетной схемы, т.е. прежде всего необходимо установить, что является несущественным и может быть отброшено без сколько-нибудь заметного влияния на суть решения задачи.

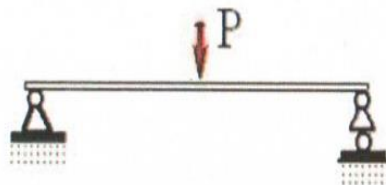
**Расчетная схема - реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей, носит название.** Для одного и того же реального объекта может быть предложено несколько расчетных схем в зависимости от требований точности и сложности решения задачи в каждом конкретном случае.

### 3. Реальный объект и расчетная схема

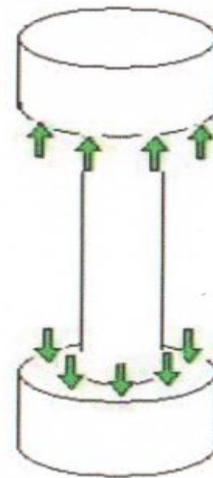
Реальный объект без несущественных особенностей называется расчётной схемой



Реальность



Расчётная схема



или



А  
Площадь  
поперечного  
сечения

## Основные направления схематизации. Схематизация геометрической формы

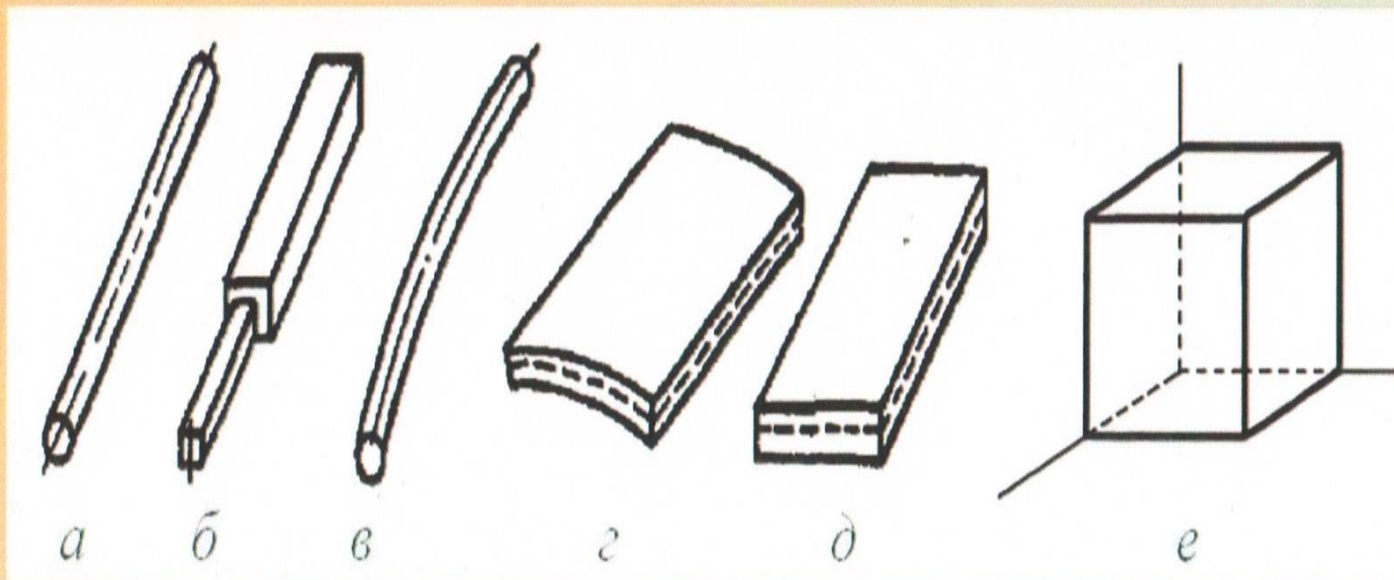
Все материалы - **сплошная среда** независимо от особенностей молекулярного строения вещества. При выборе расчетной схемы вводятся упрощения и в геометрию реального объекта.

### Основные формы конструктивных элементов

(как объекты расчетов на прочность, жесткость и устойчивость):

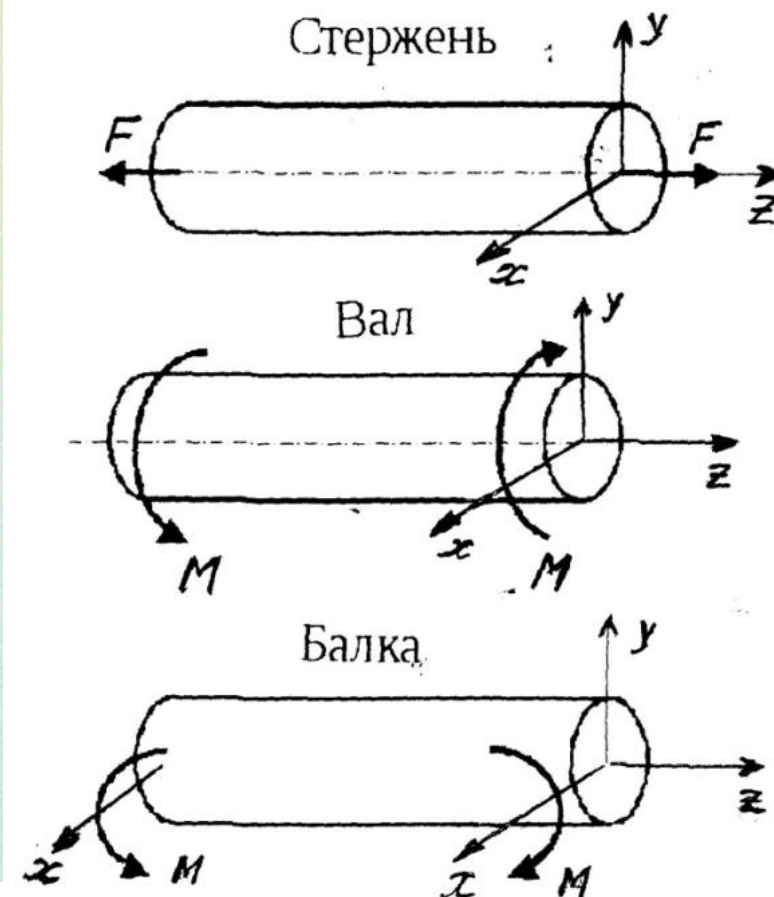
-  **Брус** – это тело, у которого один размер (длина) значительно больше двух других.
-  Если брус имеет прямолинейную ось, то это **стержень**.
-  Стержень, работающий на изгиб, называется **балкой**.
-  Стержень, работающий на кручение, называется **валом**.
-  Система из нескольких прямолинейных элементов называется **рамой/фермой**.
-  **Пластина** – это тело ограниченное двумя плоскостями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами.
-  **Оболочка (обечайка)** – это деформированная пластина или тело ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало.
-  **Массив** – это тело, у которого все три размера одного порядка.

## Основные виды элементов конструкций:



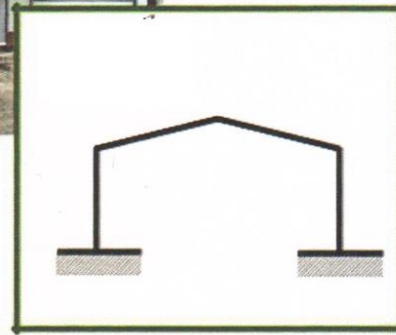
а, б, в — брус; г — оболочка; д — пластина; е — массив

## Брус в зависимости от способа нагружения

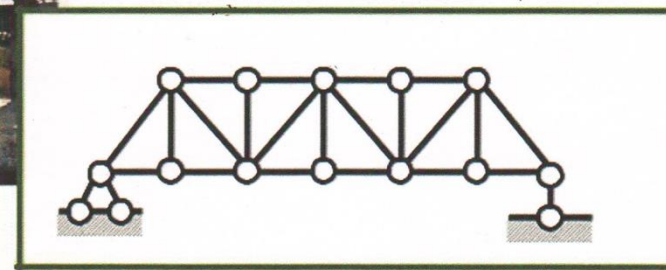
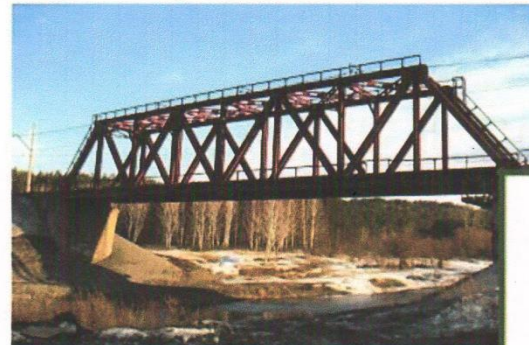


-  **Стержневая система** - конструкция, состоящая из элементов, имеющих форму стержня.
-  Если элементы конструкции работают в основном на растяжение или сжатие, то стержневая система называется **фермой**.  
Ферма состоит из прямых стержней, образующих треугольники.  
Для фермы характерно приложение внешних сил в узлах.
-  Если элементы стержневой системы работают в основном на изгиб или кручение, то система называется **рамой**.  
В курсе «Сопротивление материалов» рассматриваются преимущественно тела в форме брусков постоянного сечения и простейшие системы, состоящие из них.  
Эти брусья обладают **достаточной жесткостью** (без значительных деформаций при нагрузке).
-  Методы расчета **гибких брусков, пластинок, оболочек и массивных тел** рассматриваются в курсе «Теория упругости», свободном от тех упрощающих гипотез, которые вводятся, в курсе «Сопротивление материалов».
-  Способы расчета стержневых систем изучаются в курсе «Теория сооружений» («Строительной механики»).

Рама



Ферма



## Схематизация внешней нагрузки



При схематизации реальных объектов в сопротивлении материалов делаются упрощения и в системе сил, приложенных к элементам конструкции, в частности, вводятся понятия:

- **сосредоточенной силы ( $F$ ) и сосредоточенной пары сил ( $M$ ),**
- **распределенной силы ( $q$ ) и распределенной пары сил ( $m$ ).**



Распределенные нагрузки характеризуются:

**интенсивностью их распределения по линии, поверхности, объему.**



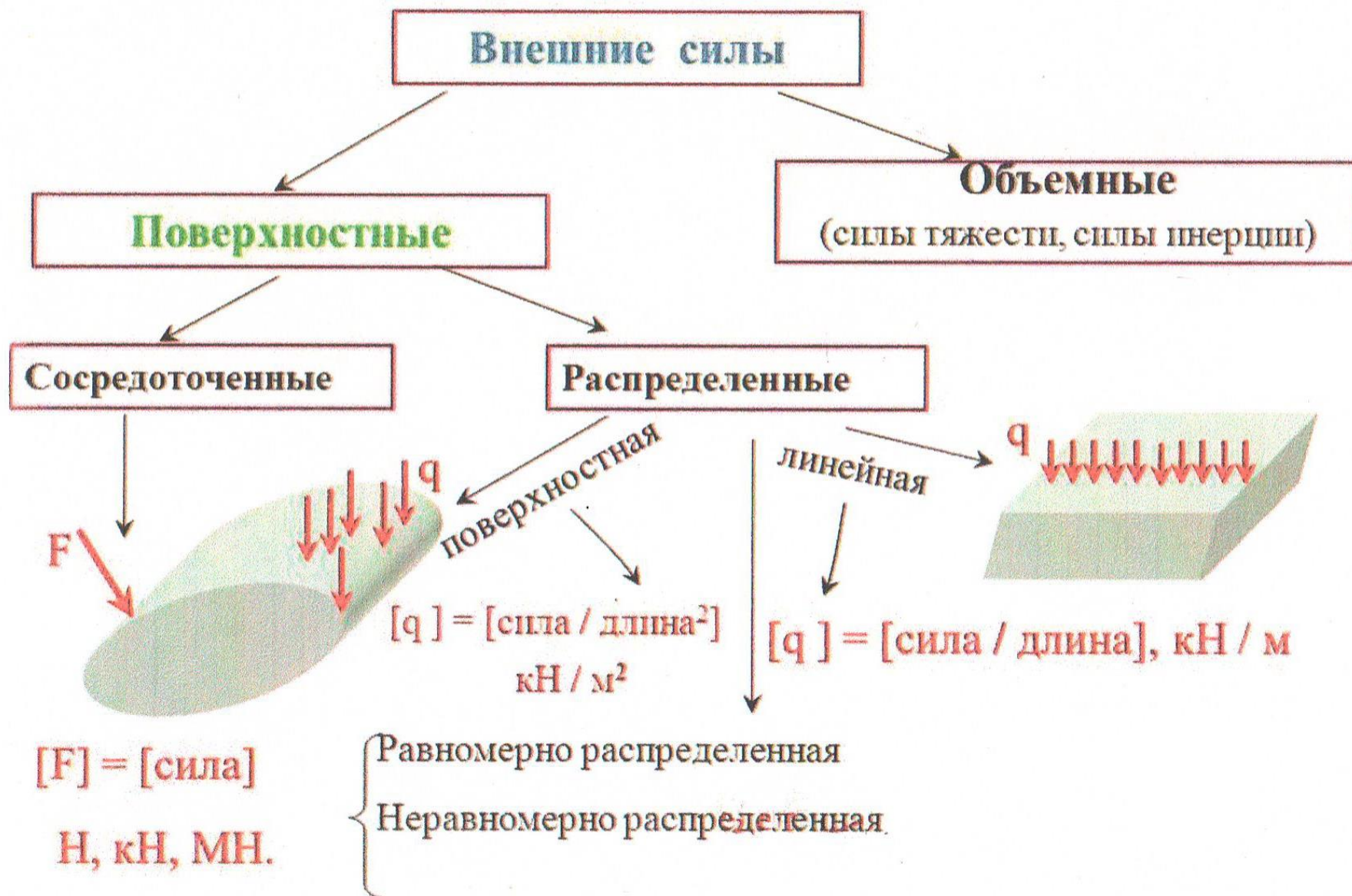
**Динамические нагрузки** - зависят от времени.

динамические нагрузки делятся на виды:

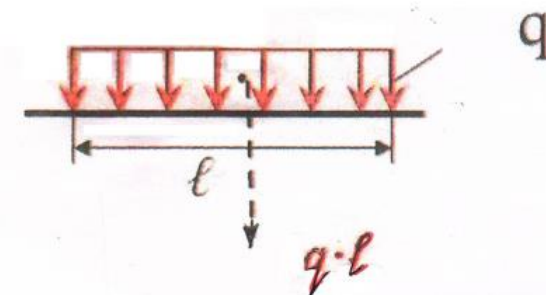
- **периодического и непериодического действия,**
- **знакопостоянные и знакопеременные.**



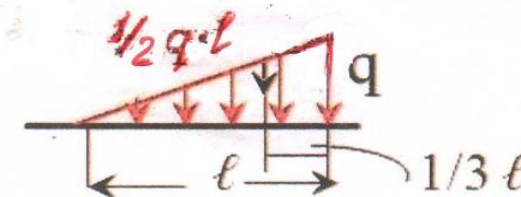
Нагрузки могут быть **случайными и заранее предусмотренными.**



Равномерно распределенная сила



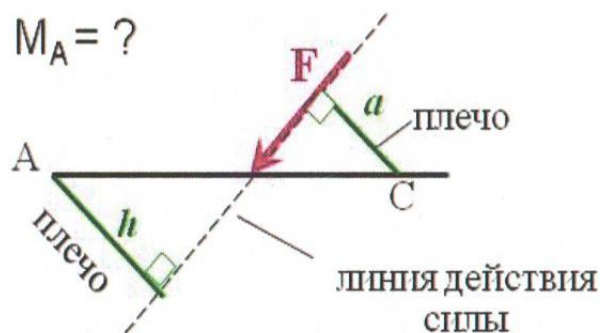
Неравномерно распределенная сила



- Кроме сосредоточенных и распределенных сил, к нагрузке относится **внешний момент силы (момент)**

Момент – произведение силы на плечо.

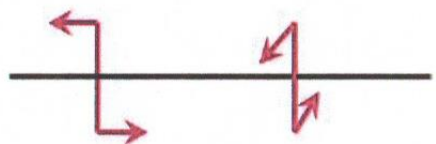
- Плечо** - перпендикуляр, опущенный из точки, относительно которой берется момент, на линию действия силы.



**Плоскости действия моментов**

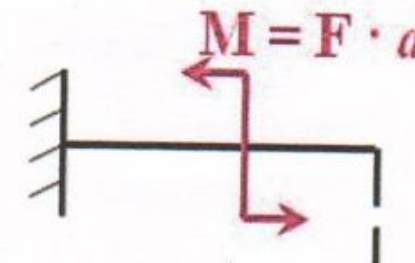
$$M_A = F \cdot h$$

$$M_C = -F \cdot a$$

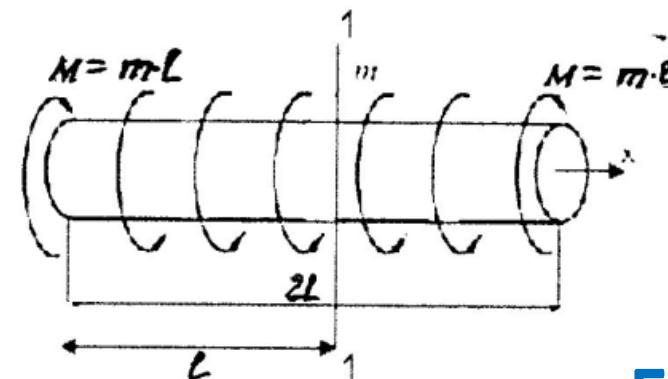


$$[M] = \text{Н} \cdot \text{м}; \text{кН} \cdot \text{м}; \text{МН} \cdot \text{м}.$$

- Сосредоточенный момент**



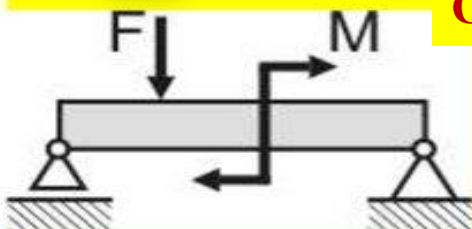
- Распределенный момент**



## Условная классификация нагрузок

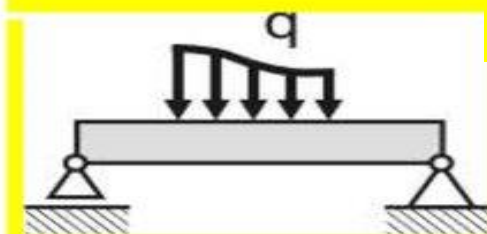
### ⚙️ Силовые факторы

#### Сосредоточенные нагрузки



– силы и моменты, площадь действия которых мала по сравнению с размерами объекта (приложены в точке)

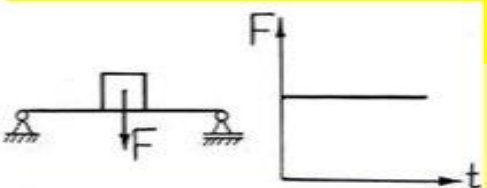
#### Распределенные нагрузки



силы, действующие :

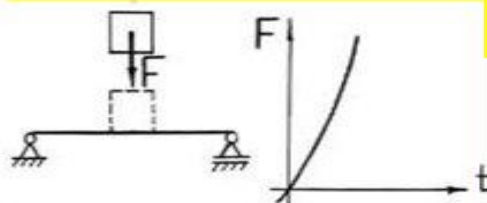
- на некоторой длине,  $[q]=\text{Н/м}$ ;
- по некоторой площадке,  $[q]=\text{Н/м}^2$ ;
- по объему,  $[q]=\text{Н/м}^3$

#### Статические нагрузки



медленно и плавно возрастают от нуля до своего конечного значения, а затем остаются неизменными

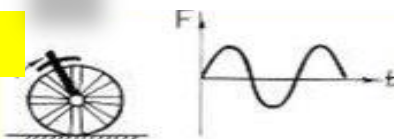
#### Динамические нагрузки



ускорениями, как деформированного тела, так и взаимодействующих с ним тел.

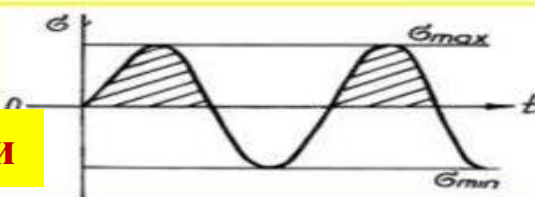
### ⚙️ Характер изменения нагрузок

#### Повторно-переменное циклическое нагружение

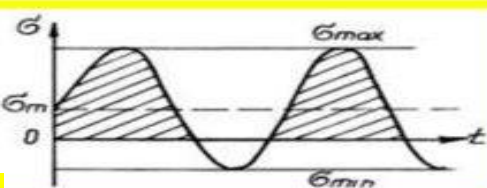


– нагрузки, меняющиеся во времени по величине (а возможно и по знаку)

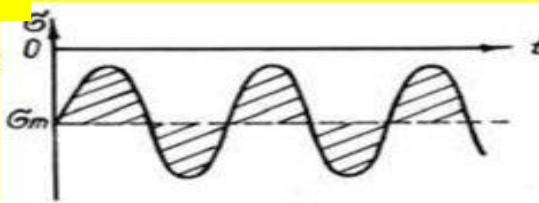
**Симметричный цикл** – максимальное и минимальное напряжения равны по абсолютной величине и противоположны по знаку  $R = -1$ ,



**Асимметричный цикл** – максимальное и минимальное напряжения не равны по абсолютной величине, при этом асимметричный цикл может быть **знакопеременным** или **знакопостоянным**

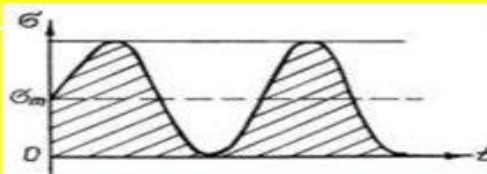


**Знакопеременный цикл** – максимальное и минимальное напряжения не равны по абсолютной величине и противоположны по знаку ( $R < 0, R \neq -1$ )



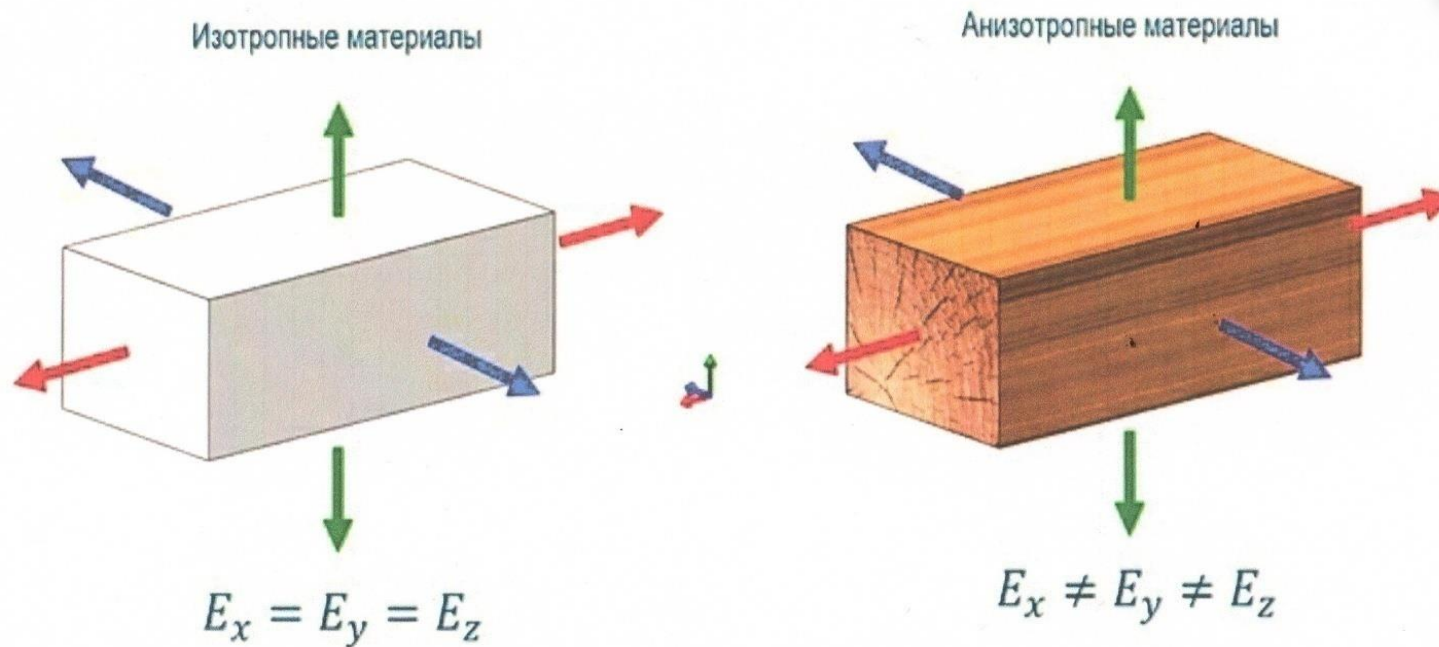
#### **Знакопостоянный цикл**

– максимальное и минимальное напряжения не равны по абсолютной величине и имеют одинаковый знак ( $R > 0, R \neq 1$ )



**Пульсационный (отнулевой) цикл** – максимальное или минимальное напряжения равны нулю ( $\sigma_{\min} = 0, R = 0$  или  $\sigma_{\max} = 0, R = \infty$ )

## Схематизация свойств материалов



Реальные материалы обладают разнообразными физическими свойствами и характерной для каждого из них структурой.

В курсе «Сопротивление материалов» имеются **допущения о свойствах материала:**

- ⚙️ Материал считается **однородным** (свойства во всех точках одинаковы).
- ⚙️ Материал считается **изотропным** (свойства, например, предел прочности, предел пластичности, модуль Юнга ( $E$ ), модуль сдвига ( $G$ ) и др. во всех направлениях одинаковы).
- ⚙️ Материалы, не обладающие этим свойством, называются **анизотропными** (например, дерево).

⚙️ Материал обладает свойством идеальной упругости, (после снятия нагрузки восстанавливает форму и размеры независимо от величин нагрузок и температуры тела).

⚙️ При больших нагрузках в элементах конструкций появляются пластические деформации.

⚙️ Свойство идеальной упругости определяется физическим законом Гука (1660 г.): перемещения точек упругого тела в известных пределах нагружения прямо пропорциональны силам, вызывающим эти перемещения.

⚙️ Материал обладает свойством сплошности (способностью сплошь и без пустот заполнять пространство, ограниченное поверхностью тела).

⚙️ Тогда материал считается непрерывным в отношении применения математического аппарата дифференциального и интегрального исчисления.

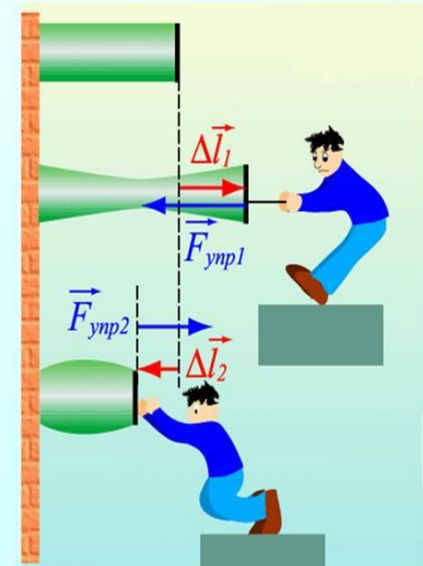
## Закон Гука

Сила упругости, возникающая при упругой деформации тела, прямо пропорциональна величине деформации  $\Delta l$  и направлена в сторону противоположную перемещению частиц тела при деформации.

$$F_{упр} = k \cdot \Delta l$$

$\Delta l$  – удлинение, м

$k$  – коэффициент жесткости,  $\frac{H}{м}$





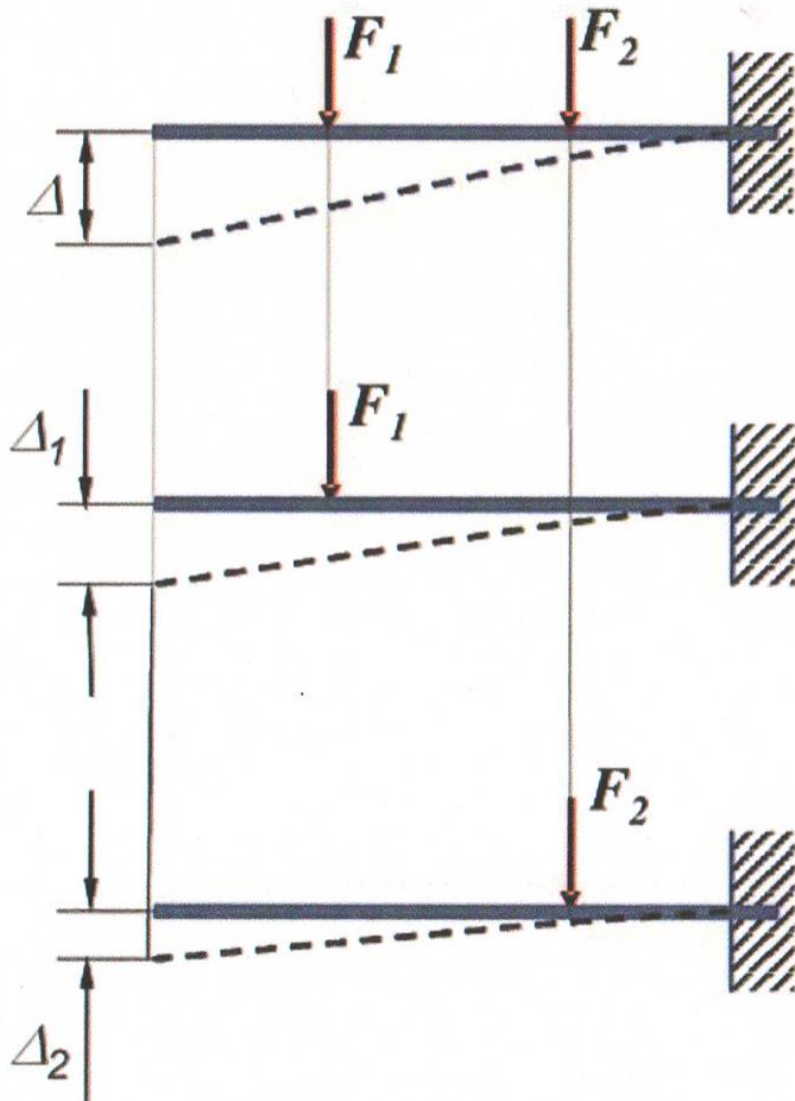
## ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ курса «Сопротивление материалов»

-  **Гипотеза о сплошности материалов:** материал сплошь занимает форму тела, атомистическая теория дискретного строения вещества во внимание не принимается.
-  **Гипотеза об однородности и изотропности:** в любом объеме/направлении свойства материала одинаковы.
-  **Гипотеза о малости деформаций:** деформации тел значительно меньше размеров самих тел.
-  **Гипотеза о совершенной упругости материала:** все тела абсолютно упругие.
-  **Гипотеза о линейной зависимости между деформацией и напряжением:** при деформации материала справедлив закон Гука.
-  **Гипотеза плоских сечений:** плоские сечения до деформации остаются плоскими и после деформации.



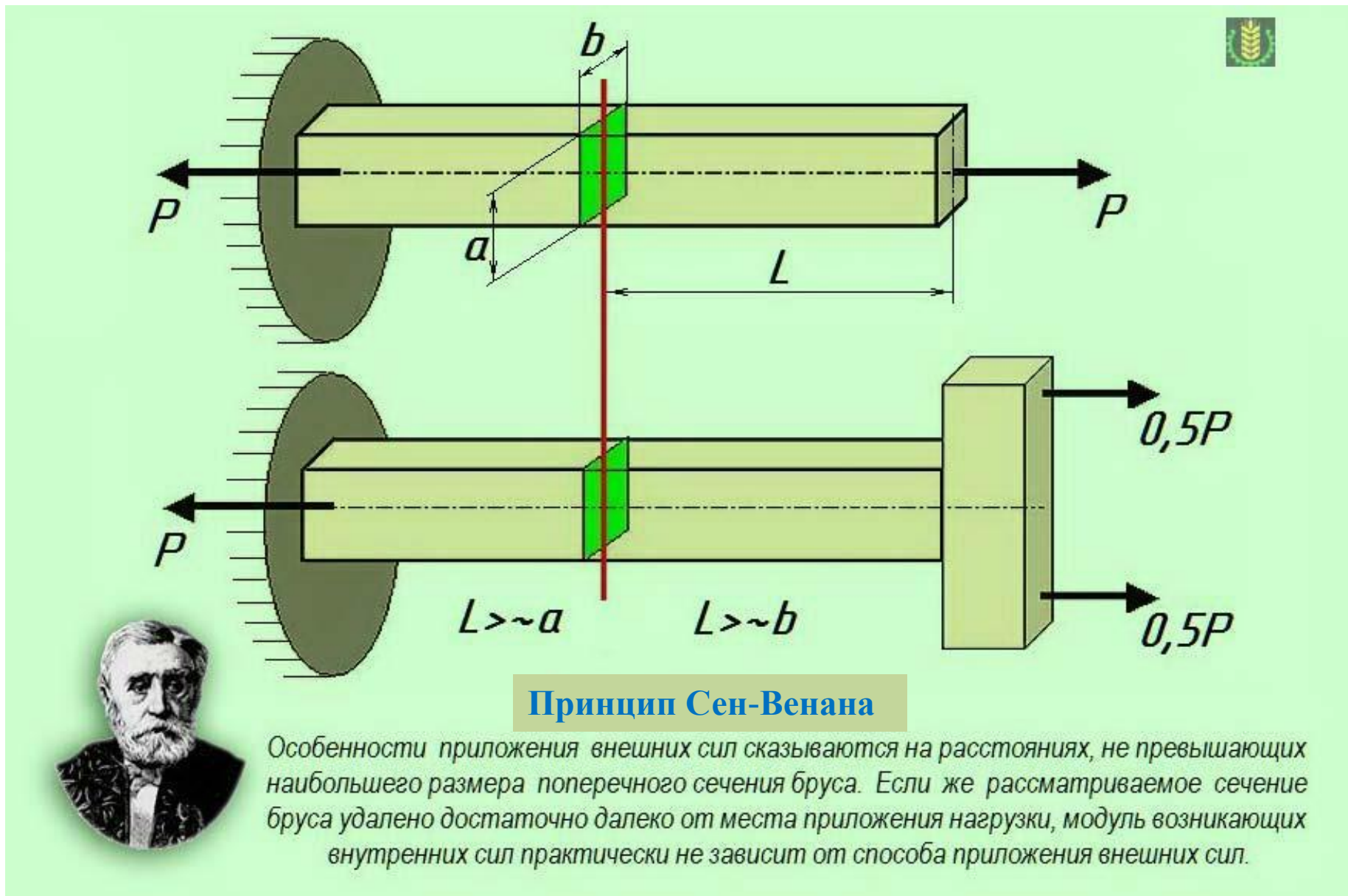
## ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ курса «Сопротивление материалов»

-  В телах до приложения внешних нагрузок отсутствуют напряжения и деформации.
-  **Принцип независимости действия сил:** результат действия на тело суммы сил, равен сумме результатов каждой силы в отдельности.
-  **Принцип Сен-Венана:** напряжения и деформации в сечениях достаточно удаленных от мест приложения нагрузок не зависят от способа их приложения.



## Принцип независимости действия сил

Принцип независимости действия сил заключается в том, что результат воздействия на конструкцию нескольких сил равен алгебраической сумме результатов воздействия каждой силы в отдельности



## Метод сечений и внутренние силовые факторы

Пусть существует тело с произвольной нагрузкой (**системой внешних сил**, удовлетворяющих условиям равновесия).

Для выявления **внутренних сил**, мысленно, разрежем тело на две части А и В. Часть А отбросим. Отсеченная часть В будет в равновесии, если приложить некоторую систему внутренних сил. Такой прием выявления внутренних сил, возникающих в поперечном сечении тела, называется **методом сечений**.

Внутренние силы распределяются по сечению неравномерно, но удовлетворяют условиям равновесия для отсеченной части стержня.

Если воспользоваться правилами статики и привести систему внутренних сил к центру тяжести сечения, то в результате получим главный вектор и главный момент. Если выбрать систему координат XYZ с началом в центре тяжести сечения, а оси X и Y расположены в плоскости сечения, а затем спроектировать главный вектор и главный момент на оси XYZ получим шесть составляющих:

Эти составляющие называются **внутренними силовыми факторами**, где:

$N_z$  - продольная (нормальная) сила,

$Q_x, Q_y$  - поперечные силы,

$M_z = M_{кр}$  - крутящий момент,

$M_x, M_y$  - изгибающие моменты, относительно осей X и Y.

Если известны внешние силы, то все шесть внутренних силовых факторов определяются из шести уравнений статики, которые могут быть составлены для отсеченной части стержня.

$$\sum X = 0,$$

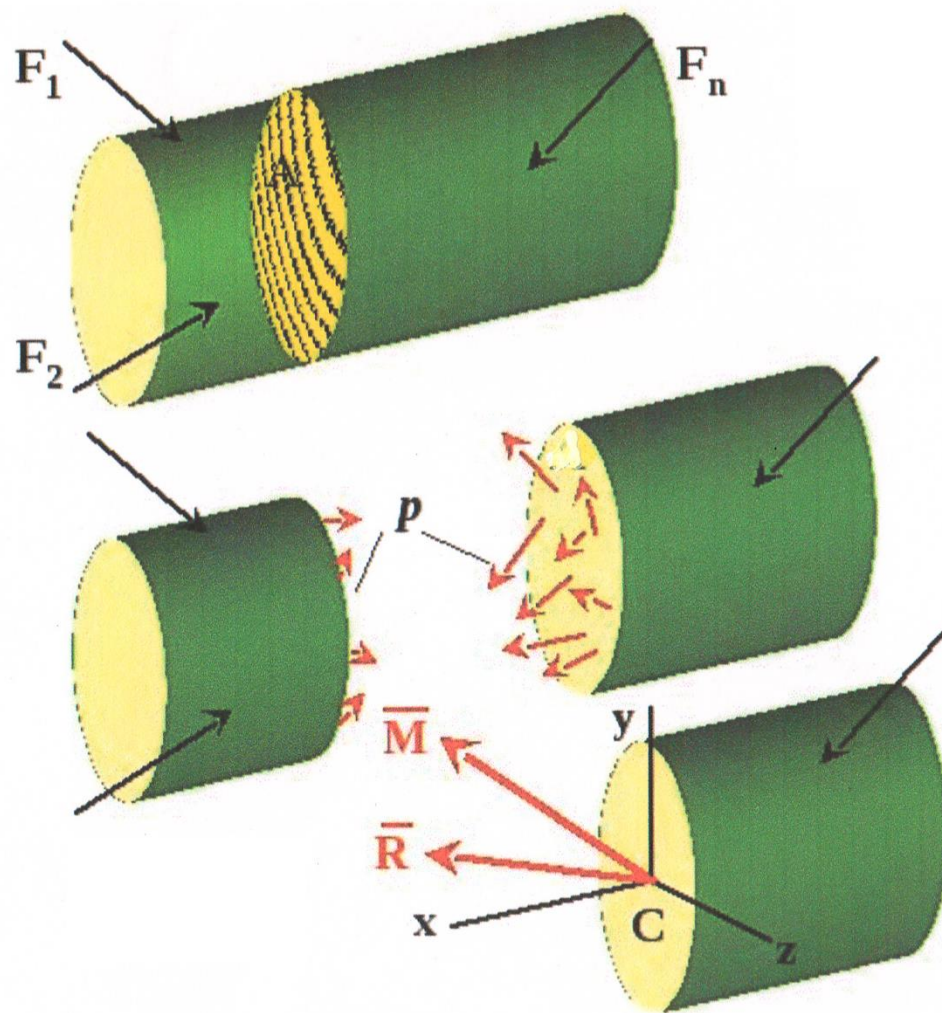
$$\sum Y = 0,$$

$$\sum Z = 0,$$

$$\sum mom_x = 0,$$

$$\sum mom_y = 0,$$

$$\sum mom_z = 0.$$



## Метод сечений:

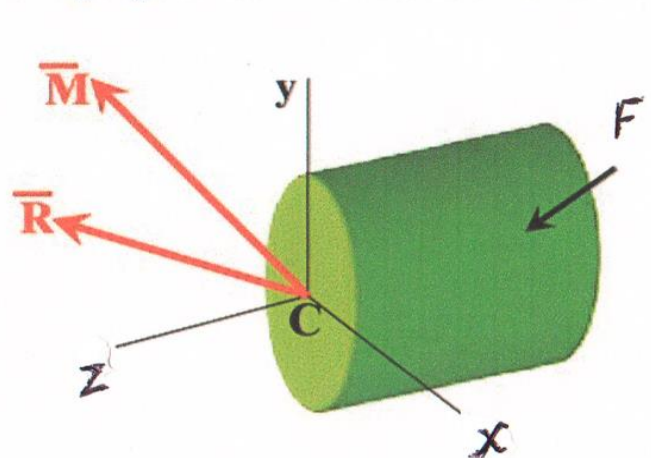
Разрезали тело поперечным сечением  $A$  на 2 части;

Внутренние силы  $p$  для каждой из частей стали внешними и потому могут определены из уравнений равновесия для любой из частей.

$\bar{R}$  – главный вектор системы внутренних сил.

$\bar{M}$  – главный момент системы внутренних сил.

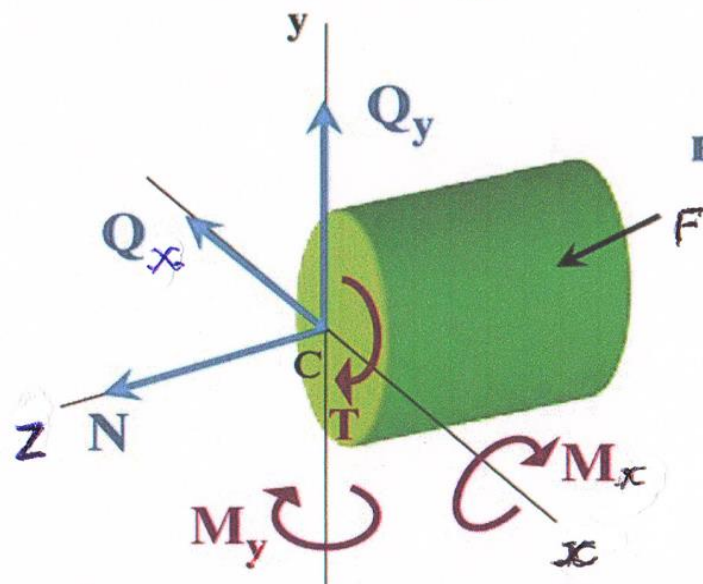
## Внутренние силовые факторы.



Система векторов  $\bar{\mathbf{R}}$  и  $\bar{\mathbf{M}}$  эквивалентна системе внутренних сил  $p$ .

Но практическое значение имеют не эти векторы, а их проекции на оси  $x, y, z$ .  
( $x$  – прод. ось бруса;  $y, z$  – гл. центр. оси)

**Проекции  $\bar{\mathbf{R}}$  и  $\bar{\mathbf{M}}$  на продольную ось и главные центральные оси называются внутренними силовыми факторами.**



$N$  – продольная сила;

$Q_y$  и  $Q_x$  – поперечные силы;

$M_y$  и  $M_x$  – изгибающие моменты.

$T$  (  $M_{кр}$  ) – крутящий момент.

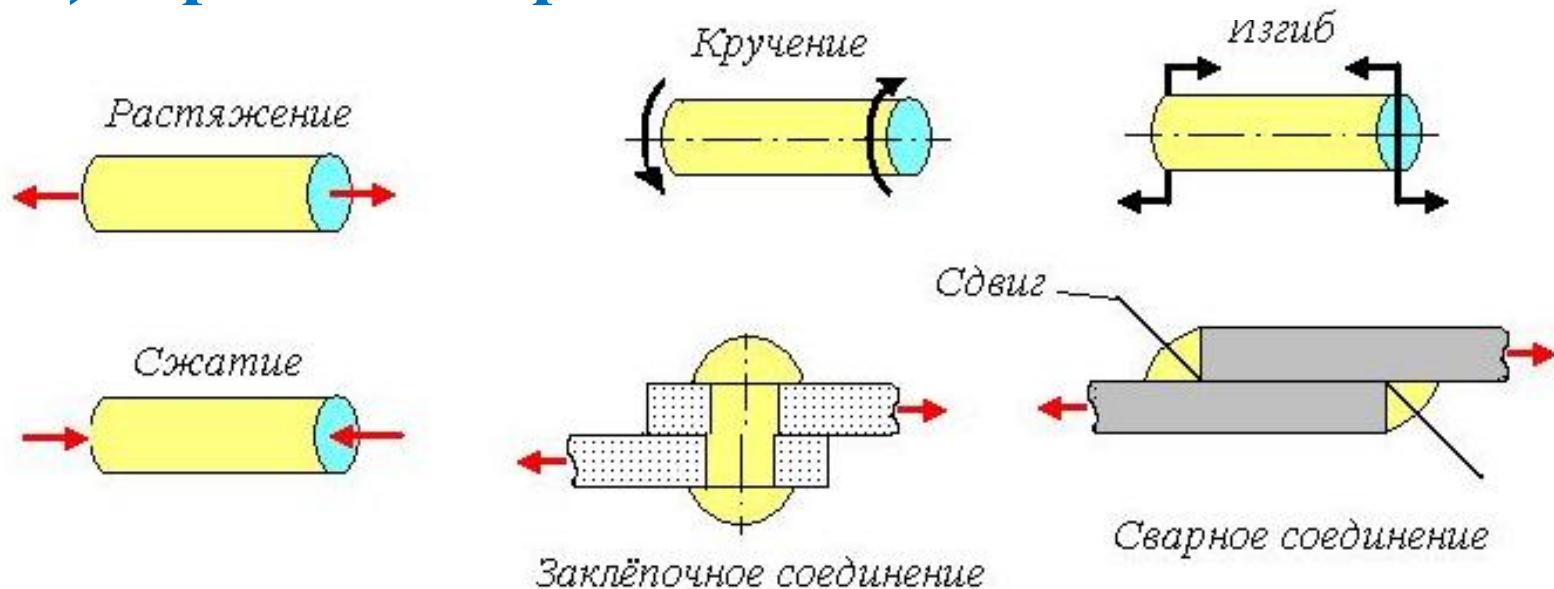


## Порядок определения внутренних сил

- 1) **разрезать** стержень или систему стержней;
- 2) **отбросить** одну часть;
- 3) **приложить в сечении усилия**, способные уравновесить внешние силы действующие на отсеченную часть;
- 4) **найти значения усилий** из уравнений равновесия, составленных для отсеченной части.

## Виды деформирования:

### 1) простое сопротивление



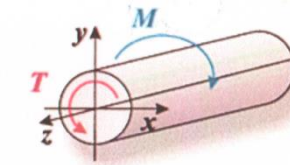
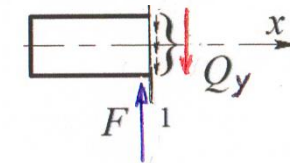
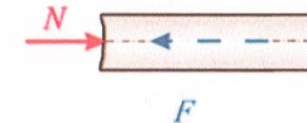
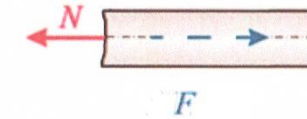
### 2) комбинированное (сложное)



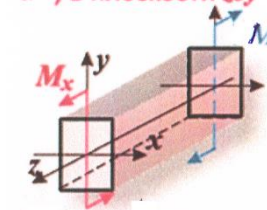
Виды деформации определяются внутренними силовыми факторами

В поперечном сечении стержня могут возникать:

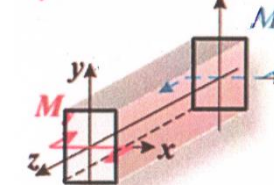
1. Только продольная сила  $N$  (напряжение).  
**Растяжение** ( $N$  направлена от сечения)  
или **сжатие** (продольная сила направлена к сечению).
2. Только поперечная сила  $Q_y$  или  $Q_x$  (**сдвиг**).
3. Только крутящий момент  $M_z = M_{кр}$  (**кручение**).
- 4а. Только изгибающий момент  $M_x$  (**чистый изгиб в вертикальной плоскости ZOY**).
- 4б. Только изгибающий момент  $M_y$  (**чистый изгиб в горизонтальной плоскости ZOX**).



а) в плоскости  $zoу$



б) в плоскости  $zox$



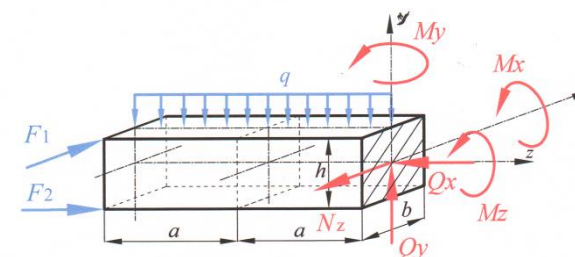
5а. В поперечном сечении есть изгибающий момент  $M_x$  и поперечная сила  $Q_y$  (**поперечный изгиб в вертикальной плоскости ZOY**).



5б. Действие изгибающего момента  $M_y$  и поперечной силы  $Q_x$  (**поперечный изгиб в горизонтальной плоскости ZOX**).



6. Несколько усилий, например, изгибающие и крутящие моменты, продольные и поперечные силы (**случай сложных деформаций / сложного сопротивления**).



## Напряжение (полное, нормальное, касательное)

Для описания закона распределения внутренних сил по сечению, необходимо ввести меру их интенсивности. За такую меру принимается **напряжение**.

Как измерить интенсивность внутренних сил в точке сечения  $K$ ?

Выделим вокруг точки  $A$  малую площадку  $\Delta R$ .

Пусть  $\Delta R$  — равнодействующая внутренних сил, действующих на эту площадку  $\Delta R$ .

$p_{\text{ср}}$  — **среднее напряжение** (средняя величина внутренних сил, приходящихся на единицу площади площадки  $\Delta F$ ),  
характеризует среднюю интенсивность внутренних сил;

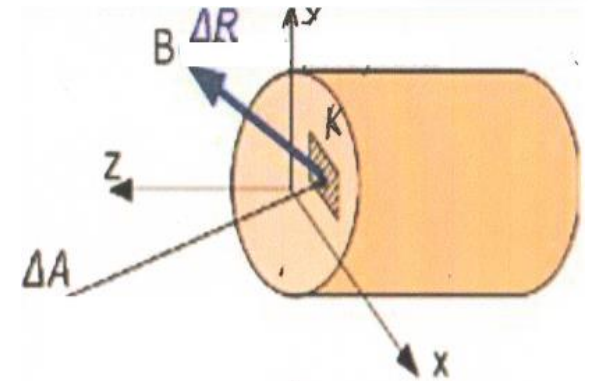
$p$  — **истинное напряжение в точке сечения** (напряжение — внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади в данной точке сечения)

**Замечание:**

В СИ единица измерения напряжения:  $\text{Н/м}^2$  или  $(\text{Па})$  Паскаль.

Для удобства часто используется внесистемная единица измерения напряжения:

$\text{Н/мм}^2$  или  $(\text{МПа})$  Мега Паскаль.



$$p_{\text{ср}} = \frac{\Delta R}{\Delta A}$$

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}$$

$$\frac{[\text{сила}]}{[\text{площадь}]}$$

**Полное напряжение**  $p$  можно разложить на две составляющие:

- 1) составляющую, нормальную к плоскости сечения ( **$\sigma$  - нормальное напряжение**);
- 2) составляющую, лежащую в плоскости сечения ( **$\tau$  - касательное напряжение**).

**Замечания:**

 **Нормальное напряжение** имеет индекс, указывающий какой координатной оси параллельно данное напряжение.

**Растягивающее нормальное напряжение** считают положительным, **сжимающее** — отрицательным.

 **Касательное напряжение** в зависимости от действующих сил может иметь любое направление в плоскости сечения.

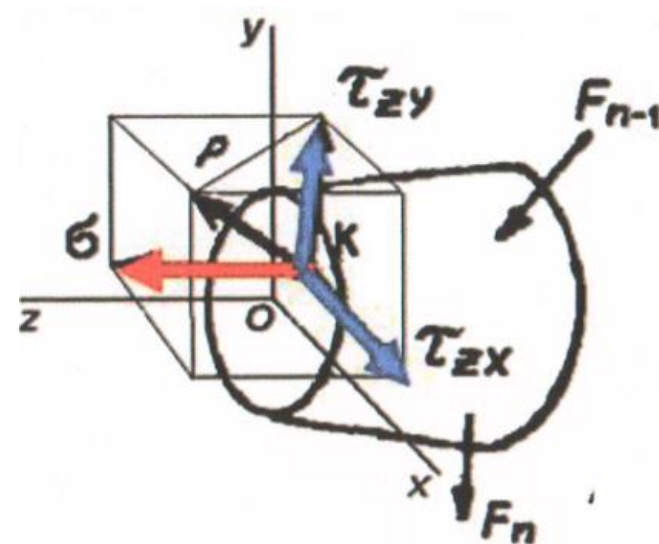
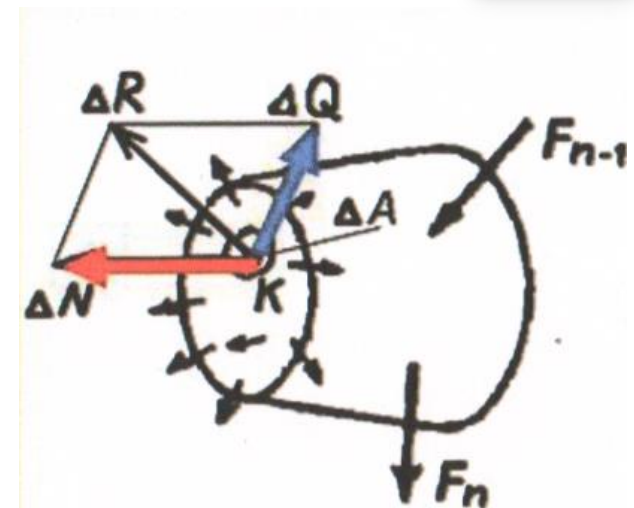
**Касательные напряжения** представляют в виде двух составляющих по направлению координатных осей.

**Касательные напряжения** имеют два индекса:

- *первый* указывает, какой оси параллельна нормаль к площадке действия данного напряжения,
- *второй* — какой оси параллельно само напряжение.

 **Физический смысл** разложения полного напряжения на составляющие (нормальную и касательную):

- **нормальное напряжение** возникает, когда частицы материала стремятся отдалиться друг от друга или сблизиться;
- **касательные напряжения** связаны со сдвигом частиц материала в плоскости рассматриваемого сечения.



## Линейная деформация

Все тела под действием приложенных к ним внешних сил **деформируются** (меняют свои размеры и/или форму).



**Линейная деформация** - изменение линейных размеров тела.

**Угловая деформация** - изменение угловых размеров тела.



**Удлинение** - увеличение размеров тела.

**Укорочение** - уменьшение размеров тела.

**Замечания:**

1) Если деформации изменяются по объему тела, то говорят о **деформации в данной точке** тела, в определенном направлении.

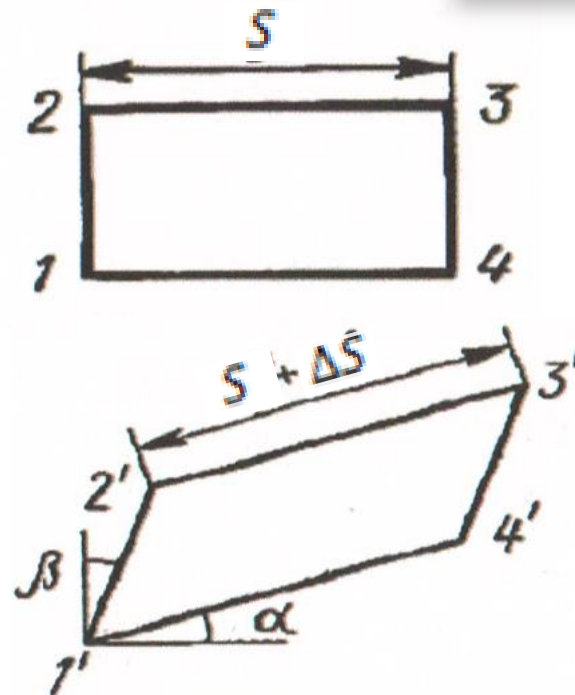
2) Если на поверхности тела, вблизи исследуемой точки, нанести весьма малый прямоугольник  $1\ 2\ 3\ 4$ , то и результате деформации этот прямоугольник в общем случае примет вид параллелограмма  $1'\ 2'\ 3'\ 4'$ . Длины сторон прямоугольника изменятся (увеличатся или уменьшатся), а стороны повернутся по отношению к первоначальному положению.



Если длина стороны (например, 23) изменится на величину  $\Delta s$ , то отношение  $\Delta s/s$  называется  $\epsilon_{cp}$  - **средней линейной деформацией** в точке 2 (средним удлинением).



При уменьшении отрезка  $s$  в пределе получим величину  $\epsilon$  - **истинную линейную деформацию** в точке 2 в направлении 23.



$$\epsilon_{cp} = \frac{\Delta s}{s}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{s} = \epsilon$$

## Угловая деформация

- Угловая деформация (угол сдвига) в данной точке - изменение первоначального прямого угла между сторонами рассматриваемого прямоугольника  $\gamma = \alpha + \beta$ .

*Замечание:*

- Деформации (линейные и угловые) могут после снятия нагрузки исчезают полностью или частично в зависимости от материала и степени нагружения.

- Упругие деформации - исчезающие после разгрузки тела.

Упругость - свойство тел принимать после разгрузки свою первоначальную форму.

Остаточные (пластические) деформации - деформации, сохраняемые телом после удаления нагрузки.

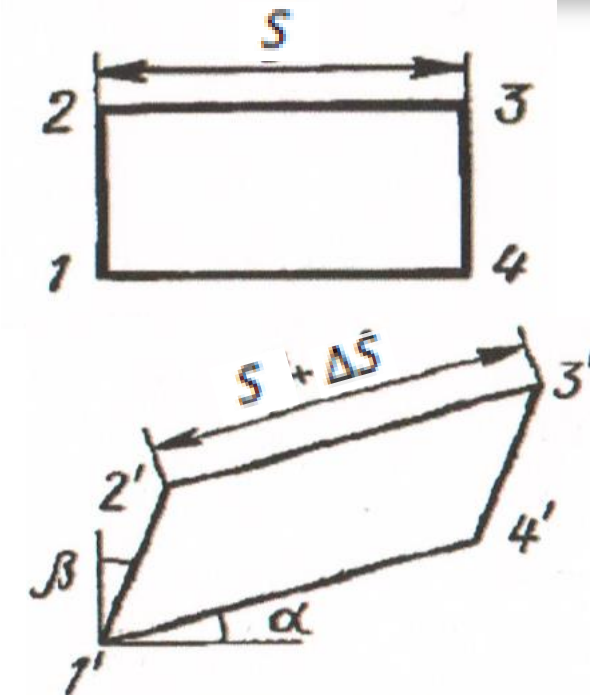
Пластичность - свойство материалов сохранять остаточные деформации.

*Замечание:*

- Зная деформации тела во всех его точках и условия закрепления, можно определить **перемещения** всех точек тела (указать их положение/новые координаты после деформации). Например, для нормальной эксплуатации сооружения **деформации его отдельных элементов должны быть упругими, а вызванные ими перемещения не должны превосходить по величине определенных допускаемых значений.**

Эти условия, выраженные в форме тех или иных уравнений, называются

**условиями жесткости.** Иногда допускаются небольшие пластические деформации (для конструкций из железобетона, пластмасс и для конструкций из металла при действии высоких температур).



## Общие принципы расчета конструкций на прочность, жесткость и устойчивость

### Замечание:

 Наиболее распространенным методом расчета деталей машин и элементов сооружений является расчет на прочность по допустимым напряжениям.

 Расчетное уравнение на прочность (общий вид)

 Расчет на жесткость по допустимым перемещениям  
(если требуется добиться наименьших изменений формы конструкций)

 Расчет на устойчивость

$$p_{max} = \frac{\Phi_c(\max)}{\Phi_p} \leq [p].$$

$$\delta_{max} = \frac{\Phi_c(\max)}{c} \leq [\delta].$$

$$p_{max} \leq [p_{уст}],$$

### Замечания:

-  1) Определение  $\Phi_p$  образует **проектную задачу**.
- 2) Определение  $p_{max}$  и  $\delta_{max}$ , сравнение с допустимыми значениями образуют **проверочную задачу**.

где:  $\Phi_c$  – внутренний силовой фактор в сечении,  
 $\Phi_p$  – фактор размера и формы сечения,  
 $c$  – обобщенная жесткость упругой системы,  
 $[p]$  – допустимые напряжения,  
 $[\delta]$  – допустимые перемещения,  
 $[p_{уст}]$  – допустимые усилия.

## Тема: «Растяжение (сжатие)»

### Задача 1.

Дано:  $l=1\text{м}$ ,

$$A = 2\text{см}^2,$$

$$q = 10\text{ кН/м},$$

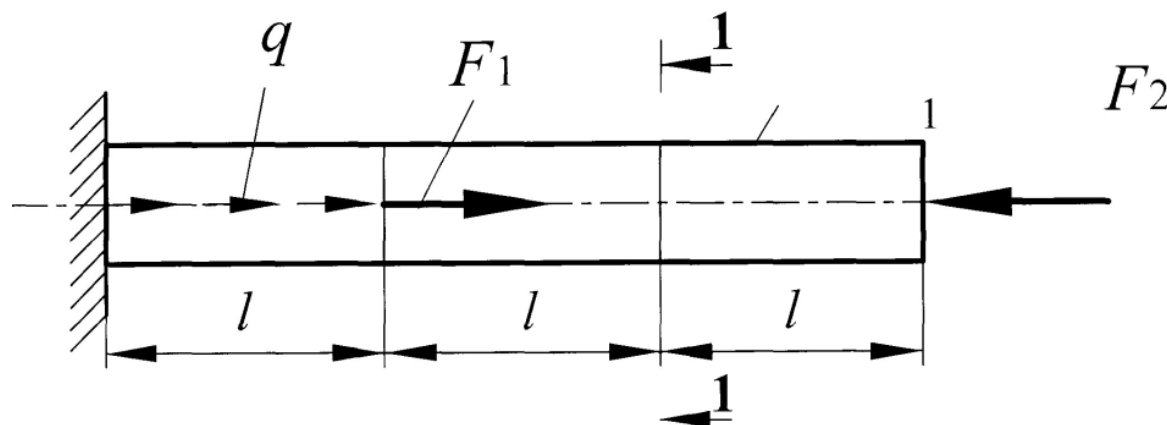
$$F_1 = 5\text{кН},$$

$$F_2 = 10\text{кН},$$

$$E = 2 \cdot 10^5\text{МПа}.$$

Построить: эпюру продольных сил.

Найти: перемещение сечения 1-1.



## Тема: «Растяжение (сжатие)»

### Задача 1.

### Решение:

Построим эпюру продольных сил.  
Для нашей расчетной схемы стержень по продольной силе нужно разделить на два участка.

**Первый участок.**

$$0 \leq z_1 \leq 2\text{м}, \quad N_{z_1} = -F_2 = -10\text{кН} = \text{const.}$$

**Второй участок.**

$$0 \leq z_2 \leq 1\text{м}, \quad N_{z_2} = -F_2 + F_1 + q \cdot z_2 = -10 + 5 + 10 \cdot z_2,$$

при:  $z_2 = 0$ ,  $N_{z_2} = -10 + 5 = -5\text{кН}$ ,  
при:  $z_2 = 1\text{м}$ ,  $N_2 = -10 + 5 + 10 \cdot 1 = 5\text{кН}$ .

Из эпюры видно, что **опасный участок – первый**.

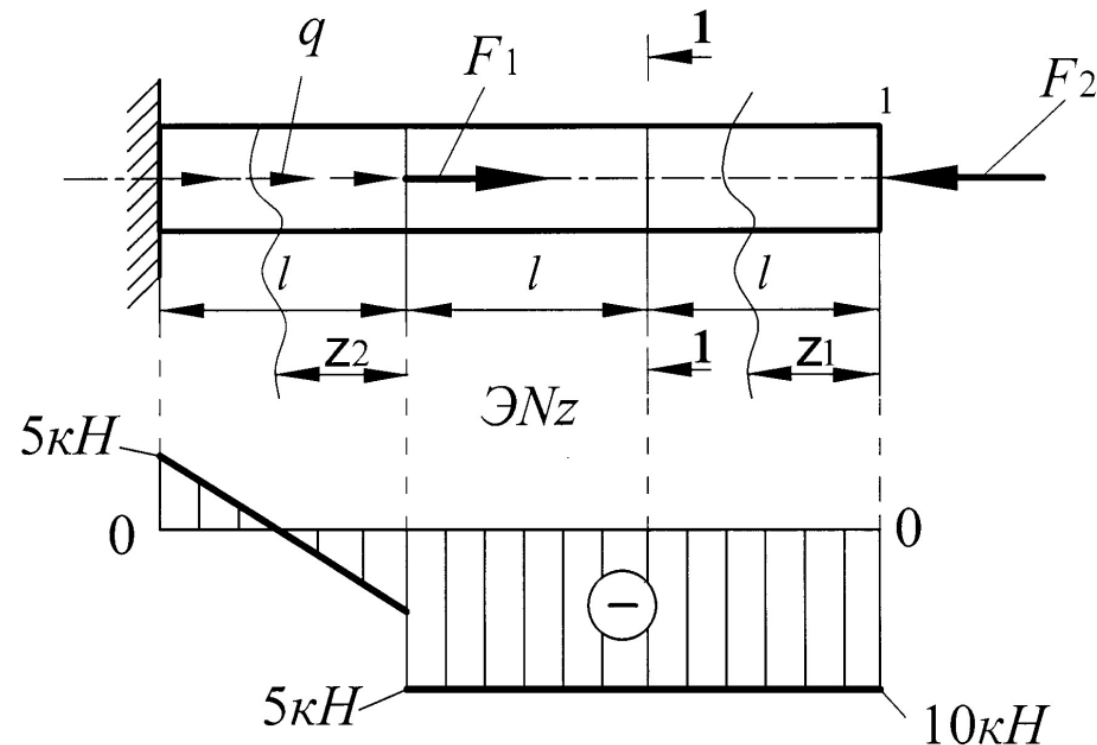
$$N_z^{\text{max}} = -10\text{кН}.$$

Определим перемещение сечения 1-1.

Воспользуемся методом независимости действия сил.

$$\Delta l = -\frac{F_2 \cdot 2l}{EA} + \frac{F_1 \cdot l}{EA} + \frac{ql \cdot \frac{l}{2}}{EA},$$

$$\Delta l = -\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2}{(2 \cdot 10^{11}) \cdot (2 \cdot 10^{-4})} + \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 1}{(2 \cdot 10^{11}) \cdot (2 \cdot 10^{-4})} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{(2 \cdot 10^{11}) \cdot (2 \cdot 10^{-4})} = 0,00025\text{м} = 0,25\text{мм}.$$

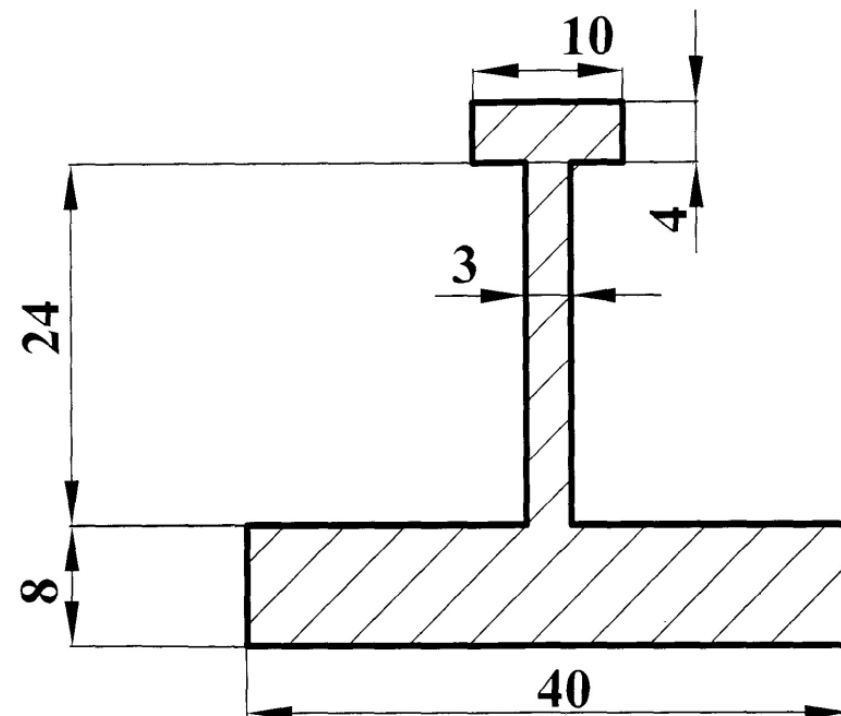


## Тема: «Геометрические характеристики плоских сечений»

### Задача 2

*Найти:*

- 1) положение **центра тяжести** сечения;
- 2) положение **главных центральных осей инерции сечения** стержня, показанного на рисунке;
- 3) **главные центральные моменты инерции** площади сечения.



## Тема: «Геометрические характеристики плоских сечений»

### Задача 2.

### Решение:

1) Разбиваем сечение на три прямоугольника. 1, 2, 3. Проводим ось симметрии  $u_c$ . Данная ось будет **главной центральной осью инерции** сечения, т.к. она является осью симметрии данной фигуры. Вторая главная ось перпендикулярна данной и проходит через центр тяжести сечения. Центр тяжести будет находиться на оси  $u_c$ . Определим **положение центра тяжести** сечения. Для этого проведем вспомогательную ось  $x$ , совпадающей с нижней гранью, и перпендикулярную оси  $u_c$ . Воспользуемся следующими формулами.

$$S_x = \sum_{i=1}^n (S_i)_x \Rightarrow S_x = (S_1)_x + (S_2)_x + (S_3)_x \quad (1)$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \quad (2)$$

2) **Статический момент площади сложного сечения** относительно оси равен сумме статических моментов составных частей этого сечения относительно той же оси. По теореме о моменте равнодействующей имеем:

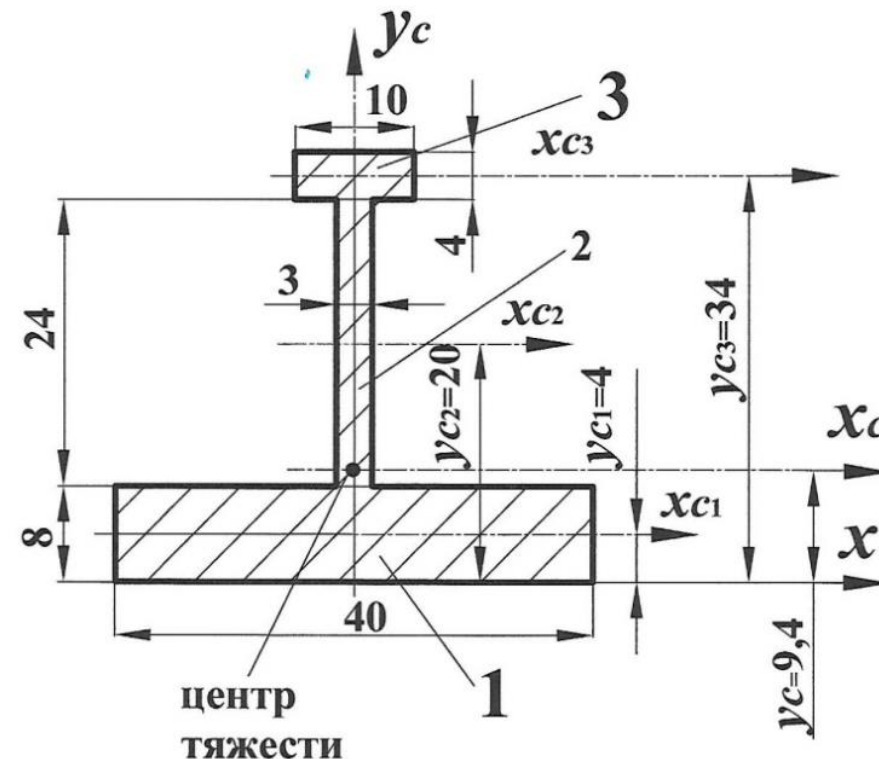
$$S_x = A \cdot y_c \Rightarrow y_c = \frac{S_x}{A} \quad (3)$$

Так как данное сечение сложное, то  $u_c$  находим как:

$$y_c = \frac{\sum S_x}{\sum A} \Rightarrow y_c = \frac{A_1 \cdot y_{c1} + A_2 \cdot y_{c2} + A_3 \cdot y_{c3}}{A_1 + A_2 + A_3} =$$

$$= \frac{(40 \cdot 8) \cdot 4 + (24 \cdot 3) \cdot 20 + (10 \cdot 4) \cdot 34}{40 \cdot 8 + 24 \cdot 3 + 10 \cdot 4} = 9,4 \text{ см.} \quad (4)$$

Откладываем расстояние  $y_c = 9,4$  см от вспомогательной оси  $x$  и проводим ось  $x_c$  перпендикулярную оси  $u_c$ . Данные оси будут **главными центральными осями инерции**. Пересечение данных осей и будет центром тяжести данного сечения.



**положение главных  
центральных осей  
инерции сечения**

## Тема: «Геометрические характеристики плоских сечений»

### Задача 2.

3) Определим значения главных центральных моментов инерции.

**Моменты инерции прямоугольного сечения относительно главных центральных осей .**

### Решение:

**Моменты инерции (осевые) сложного сечения**

равны суммам моментов инерции составных частей данного сечения относительно соответствующих осей

Ось  $u_c$  для всех составных частей сечения является центральной тогда:

$$J_{y_c} = \sum_{i=1}^{i=m} J_{y_c}^i = \frac{8 \cdot 40^3}{12} + \frac{24 \cdot 3^3}{12} + \frac{4 \cdot 10^3}{12} = 43054 \text{ см}^4.$$

Вторая главная центральная оси  $x_c$  сложного сечения не совпадает с главными центральными осями  $x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}$  составных частей этого сечения, но данные оси параллельны между собой, то воспользуемся формулой:

$$J_{x_1} = J_x + a^2 A$$

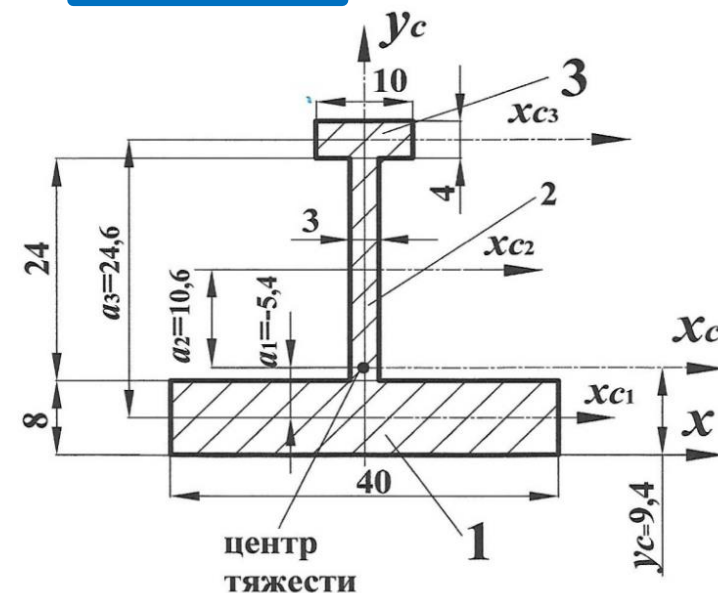
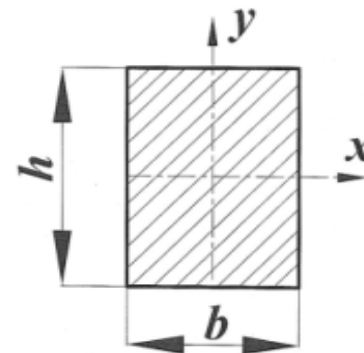
Момент инерции относительно оси параллельной центральной равен моменту инерции относительно центральной оси, плюс произведение площади сечения умноженной на квадрат расстояние между осями.

$$\begin{aligned} J_{x_c} &= (J_{x_{c1}} + a_1^2 A_1) + (J_{x_{c2}} + a_2^2 A_2) + (J_{x_{c3}} + a_3^2 A_3) \\ &= \left( \frac{40 \cdot 8^3}{12} + 40 \cdot 8 \cdot (-5,4)^2 \right) + \left( \frac{3 \cdot 24^3}{12} + 3 \cdot 24 \cdot (10,6)^2 \right) \\ &\quad + \left( \frac{10 \cdot 4^3}{12} + 10 \cdot 4 \cdot (24,6)^2 \right) = 39562,49 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

$$J_y = \sum_{i=1}^{i=m} J$$



## Тема: «Кручение»

### Задача 3

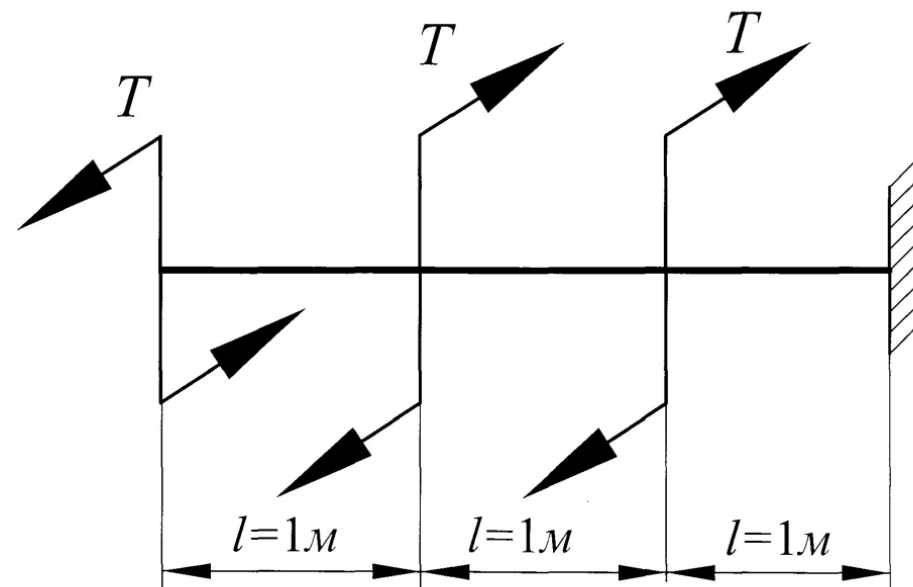
Дано:  $d=5\text{см}$ ,

$$[\tau] = 60\text{МПа}$$

Построить: эпюру крутящих моментов.

Определить:

- 1) угол закручивания свободного конца вала;
- 2) допустимое значение момента  $T$ .



## Тема: «Кручение»

### Задача 3.

### Решение:

1) Построим **эпюру крутящих моментов** для этого запишем выражение для крутящих моментов на каждом участке. Стержень разделим на три участка.

$$M_{z_1} = T, \quad 0 \leq z_2 \leq l$$

$$M_{z_2} = T - T = 0, \quad 0 \leq z_1 \leq l,$$

$$M_{z_3} = T - T - T = -T, \quad 0 \leq z_3 \leq l.$$

Из эпюры видно, что опасные - первый и третий участки, т.к.  $M_z^{max} = T$ .

2) Построим **эпюру углов закручивания**. Применим метод суммирования деформаций по участкам. Начнем от опоры. В опоре угол закручивания равен 0.

На **третьем участке** вал закрутится на угол  $\varphi_3$ :

$$\varphi_3 = \frac{T \cdot l}{G \cdot J_p}$$

На **втором участке** вал не закручивается, т.к.  $M_{z_2} = 0; \Rightarrow \varphi_2 = 0$ .

На **первом участке** вал раскрутится, т.к.

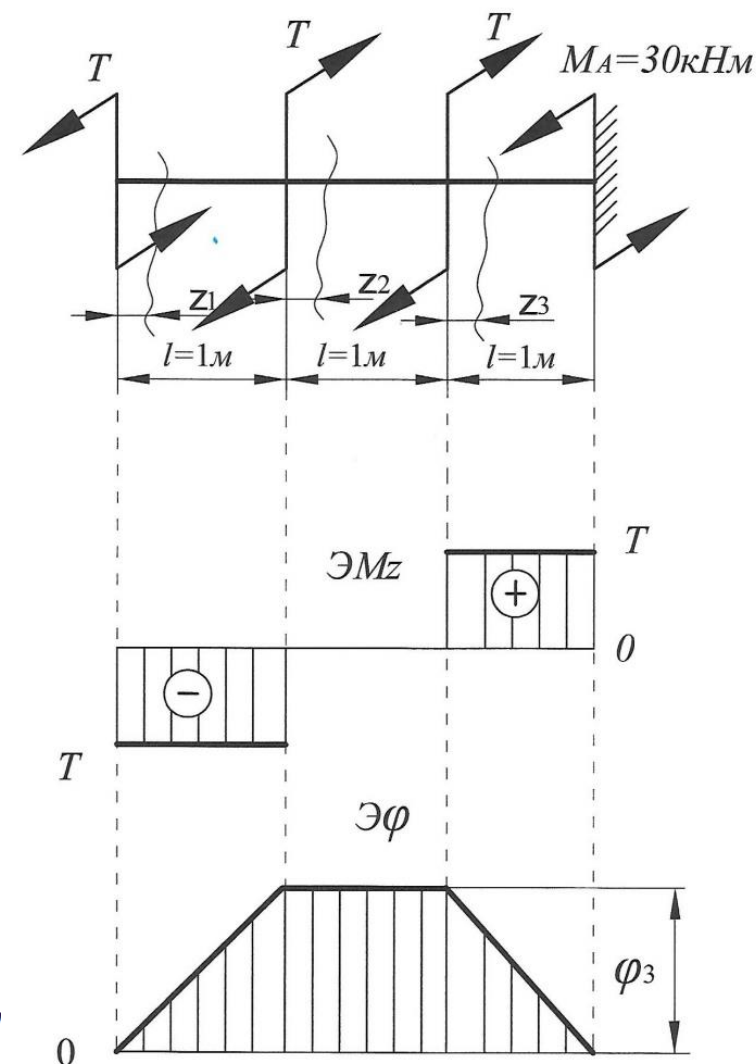
$$M_{z_1} = -T; \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{T \cdot l}{G \cdot J_p}$$

Суммарный угол закручивания будет равен нулю.

3) Запишем **условие прочности при кручении**:  $\varphi = \varphi_3 + \varphi_2 + \varphi_1 = 0$ .

Выразим  $M_z^{max}$ , т.к.  $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$ , то получим:  $\tau_{max} = \frac{M_z^{max}}{W_p} \leq [\tau]. \quad M_z^{max} \leq W_p \cdot [\tau],$

$$M_z^{max} = T \leq \frac{\pi \cdot d^3}{16} \cdot [\tau] = \frac{3,14 \cdot 50^3}{16} \cdot 60 = 1471875 \cdot \text{мм} = 1472 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1,5 \text{ кНм}.$$



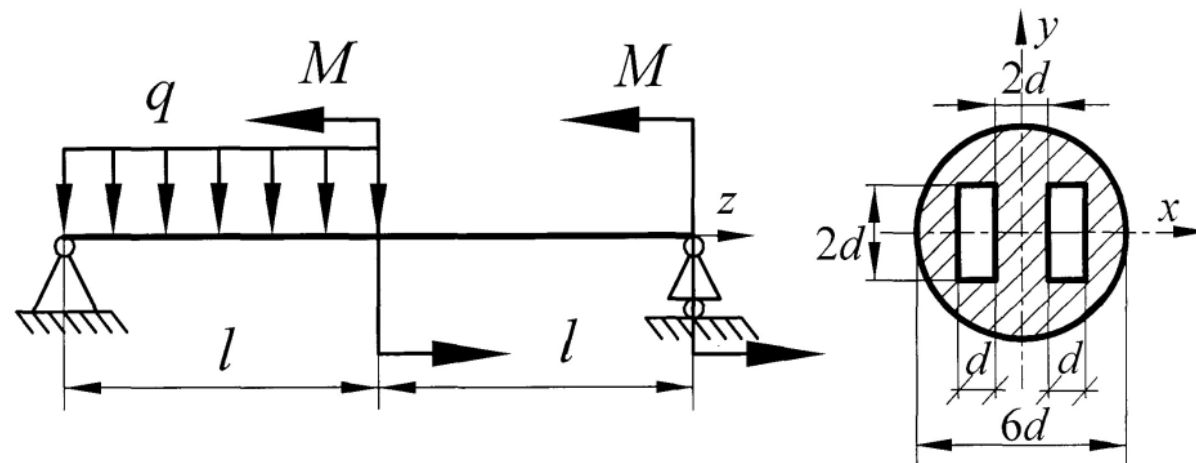
## Тема: «Прямой плоский изгиб»

### Задача 4

Построить: эпюры  $\Sigma Q_y$ ,  $\Sigma M_x$ ,  
если:  $M = ql^2$ ,  $l = 1\text{ м} = 1000\text{ мм}$ .

Найти:  $q$ , если:  $[\sigma] = 100\text{ МПа}$ .

Размеры сечения в мм,  $d = 10\text{ мм}$ .



## Тема: «Прямой плоский изгиб» Задача 4.

**Решение:** Определим **опорные реакции**, составим уравнения статики.

$$\sum M_A = 0, \Rightarrow -R_B \cdot 2l - q \cdot l \cdot 0,5l + M + M = 0,$$

$$-R_B \cdot 2l - 0,5ql^2 + ql^2 + ql^2 = 0; \Rightarrow R_B = 0,75ql$$

$$\sum M_B = 0, \Rightarrow -R_A \cdot 2l + q \cdot l \cdot 1,5l + M + M = 0,$$

$$-R_A \cdot 2l + 1,5ql^2 + ql^2 + ql^2 = 0; \Rightarrow R_A = 1,75ql$$

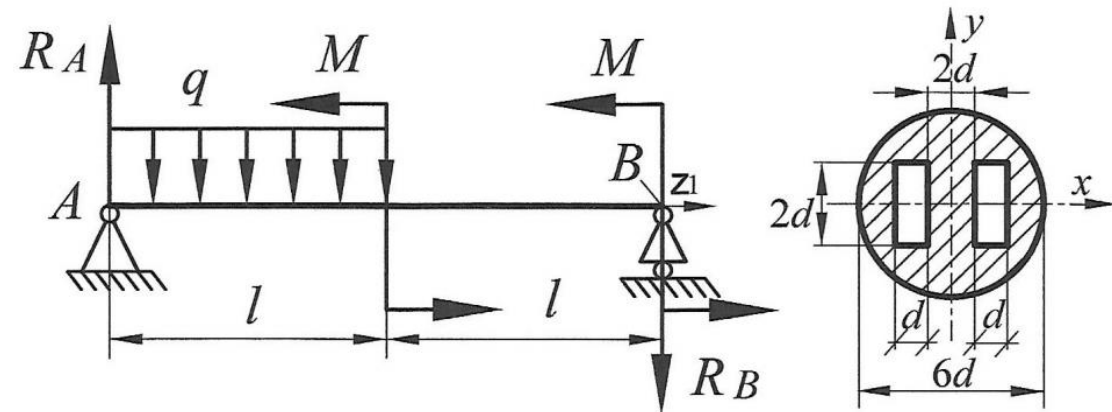
Проверка:

$$\sum Y = 0,$$

$$\sum Y = 0, \Rightarrow -q \cdot l + R_A - R_B = 0; \Rightarrow -q \cdot l + 1,75ql - 0,75ql = 0,$$

$$0=0,$$

Опорные реакции определены верно.



## Тема: «Прямой плоский изгиб»

### Задача 4.

Построим эпюры:  $\exists Q_y$ ,  $\exists M_x$ .

### Решение:

$$Q_{y_1} = R_A - q \cdot z_1 = 1,75ql - q \cdot z_1$$

$$0 \leq z_1 \leq l$$

при  $z_1 = 0$ ,  $Q_{y_1} = R_A = 1,75ql$ ,

при  $z_1 = l$ ,  $Q_{y_1} = 1,75ql - q \cdot l = 0,75ql$ ,

$$Q_{y_2} = R_B = 0,75ql = \text{const},$$

$$0 \leq z_2 \leq l.$$

Построим эпюру изгибающих моментов

$$M_{x_1} = R_A \cdot z_1 - q \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2} = 1,75ql \cdot z_1 - q \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2},$$

$$0 \leq z_1 \leq l,$$

при  $z_1 = 0$ ,  $M_{x_1} = 0$ ,

при  $z_1 = l$ ,  $M_{x_1} = 1,75ql^2 - 0,5ql^2 = 1,25ql^2$ ,

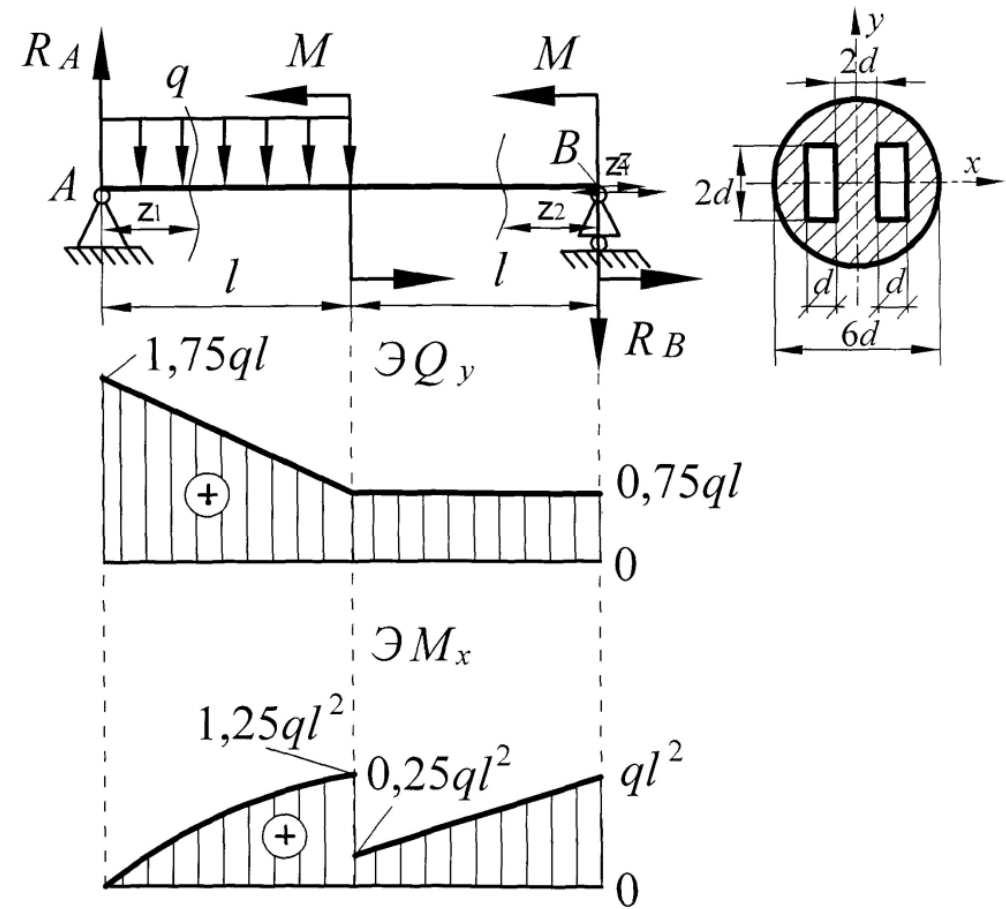
$$M_{x_2} = M - R_B \cdot z_2 = ql^2 - 0,75ql \cdot z_2,$$

$$0 \leq z_2 \leq l,$$

при  $z_2 = 0$ ,  $M_{x_2} = M = ql^2$ ,

при  $z_2 = l$ ,  $M_{x_2} = ql^2 - 0,75ql^2 = 0,25ql^2$ ,

$$M_z^{\max} = 1,25ql^2.$$



Тема: «Прямой плоский изгиб»

Задача 4.

Решение:

Условие прочности при изгибе:  $\sigma_{max} = \frac{M_x^{max}}{J_{xc}} \cdot y_{max} \leq [\sigma]$

Момент инерции сложного сечения относительно нейтральной оси равен:

$$J_{xc} = \frac{\pi \cdot (6d)^4}{64} - 2 \left( \frac{d \cdot (2d)^3}{12} \right),$$

Расстояние от нейтральной оси до максимально удаленных точек равно:  $y_{max} = 3d$ ,

Подставив в условие прочности значения

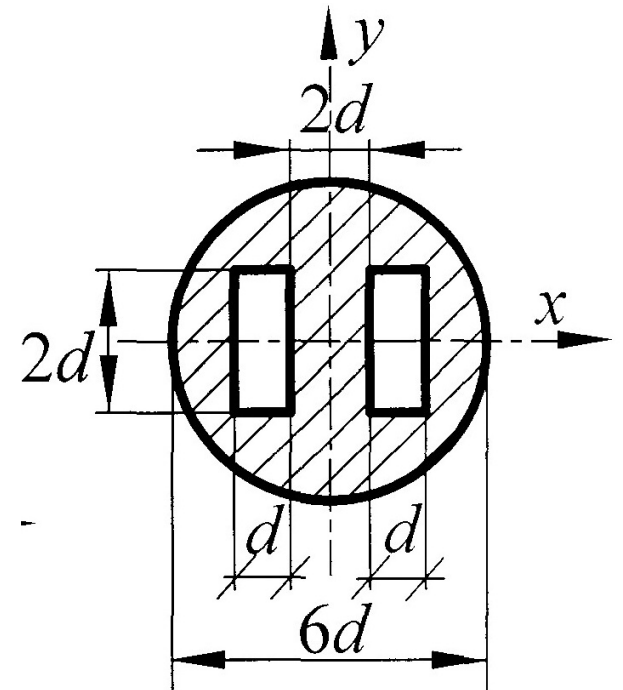
$l = 1\text{ м} = 1000\text{ мм}$ ,  $[\sigma] = 100\text{ МПа}$ ,  $d = 10\text{ мм}$ .

получим уравнение:

$$\sigma_{max} = \frac{1,25q \cdot (1000)^2}{\frac{\pi \cdot (6 \cdot 10)^4}{64} - 2 \left( \frac{10 \cdot (2 \cdot 10)^3}{12} \right)} \cdot 3 \cdot 10 \leq 100$$

Выразим  $q$ :

$$q = 1660 \text{ Н/м}.$$



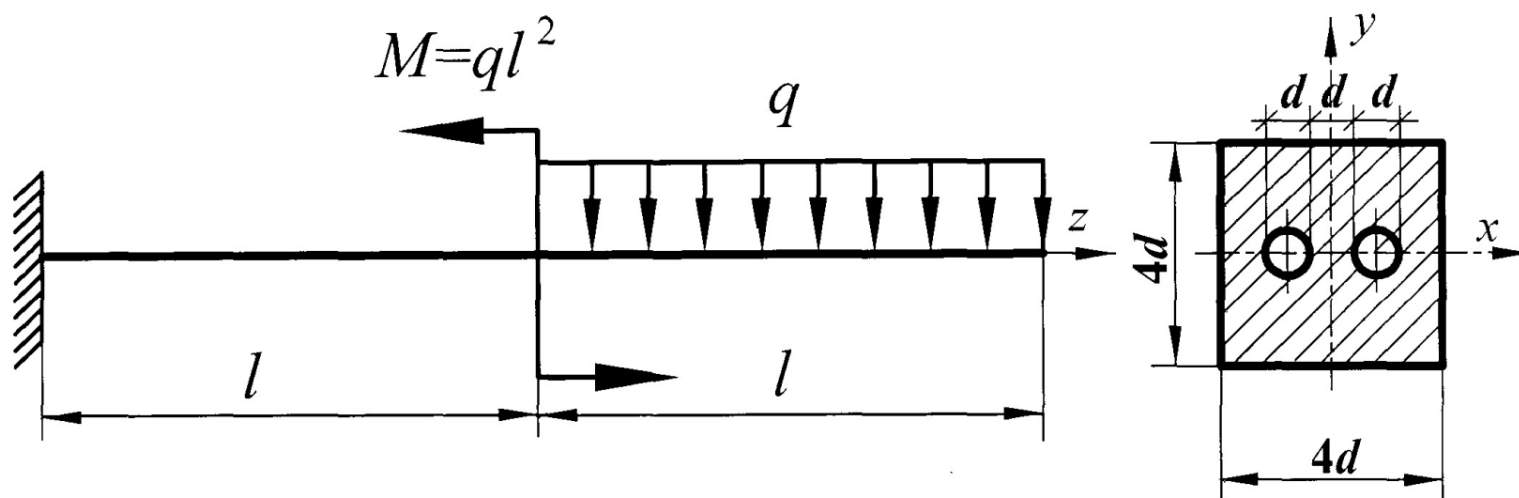
## Тема: «Прямой плоский изгиб»

### Задача 5

Дано:  $q$ ,  $l$ ,  $d$ .

Построить: эпюры  $\mathcal{E}Q_y$ ,  $\mathcal{E}M_x$ .

Найти: **максимальные нормальные напряжения** в опасном сечении



## Тема: «Прямой плоский изгиб»

### Задача 5.

### Решение:

Определим опорные реакции из уравнений статики.

$$\sum M_A = 0; \Rightarrow$$

$$M_A + M - q \cdot l \cdot 1,5l = 0; \Rightarrow M_A + ql^2 - 1,5ql^2 = 0,$$

$$M_A = 0,5ql^2.$$

$$\sum Y = 0, \Rightarrow R_A - ql = 0, \quad R_A = ql.$$

Построим эпюру поперечных сил  $\Sigma Q_y$ .

$$Q_{y1} = q \cdot z_1, \quad 0 \leq z_1 \leq l,$$

при  $z_1 = 0, \quad Q_{y1} = 0,$

при  $z_1 = l, \quad Q_{y1} = ql,$

$$Q_{y2} = ql = \text{const}, \quad 0 \leq z_2 \leq l,$$

Построим эпюру изгибающих моментов.

$$M_{x1} = -qz_1 \frac{z_1}{2}, \quad 0 \leq z_1 \leq l,$$

при  $z_1 = 0, \quad M_{x1} = 0,$

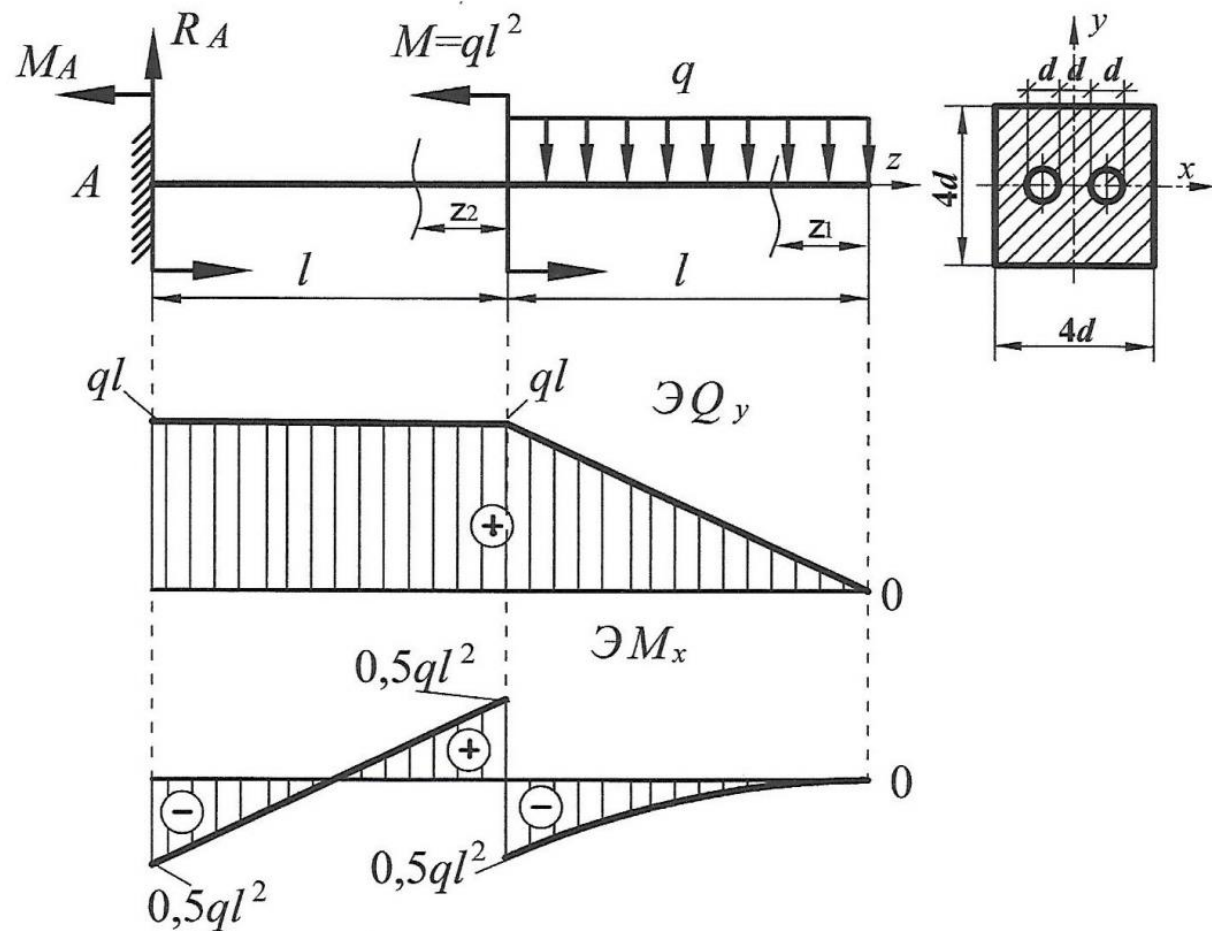
при  $z_1 = l, \quad M_{x1} = -ql \frac{l}{2} = -0,5ql^2,$

$$M_{x2} = -ql(z_2 + 0,5l) + M, \quad 0 \leq z_2 \leq l,$$

при  $z_2 = 0, \quad M_{x2} = -0,5ql^2 + ql^2 = 0,5ql^2,$

При  $z_2 = l, \quad M_{x2} = -1,5ql^2 + ql^2 = -0,5ql^2,$

Из эпюры  $\Sigma M_z$  видно, что  $M_x^{\max} = 0,5ql^2$ .



## Тема: «Прямой плоский изгиб»

### Задача 5.

Найдем максимальные нормальные напряжения в опасном сечении:

### Решение:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x^{max}}{J_x} \cdot y_{max}$$

Максимально удаленные точки от нейтральной оси находятся на расстоянии:

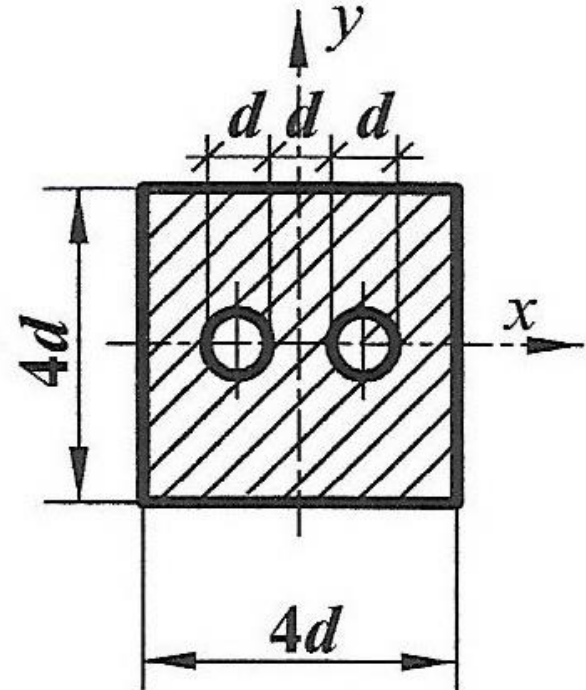
$$y_{max} = 2d.$$

Осевой момент инерции сложного сечения относительно нейтральной оси равен:

$$J_x = \frac{(4d)^4}{12} - 2 \left( \frac{\pi d^4}{64} \right),$$

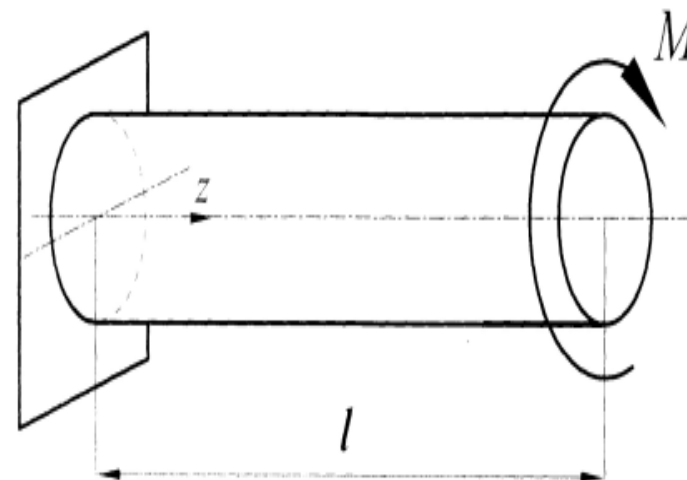
тогда:

$$\sigma_{max} = \frac{0,5ql^2}{\frac{(4d)^4}{12} - 2 \left( \frac{\pi d^4}{64} \right)} \cdot 2d.$$



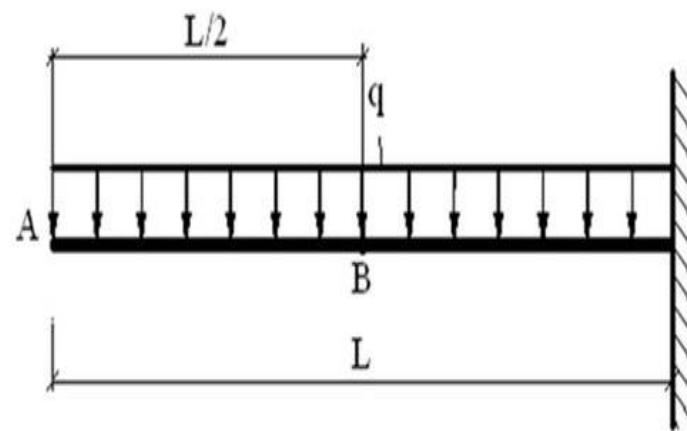
## Пример 1 из теста:

Пусть  $G$ - модуль сдвига,  $[\theta]$ -допустимый относительный угол закручивания. Тогда допустимое значение полярного момента инерции поперечного сечения удовлетворяет неравенству  $J_p \geq \dots$



## Пример 2 из теста:

Величина изгибающего момента в сечении, проходящем через точку В равна ...





Ярославский государственный  
технический университет

Кафедра «Теоретическая и  
прикладная механика»

**Спасибо за внимание!**

