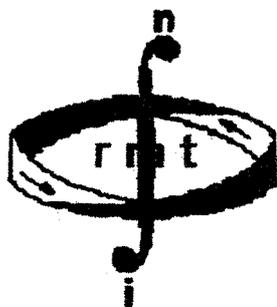


МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 9



Ярославль 2014

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ярославский государственный технический университет»

**МАТЕМАТИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
ОБРАЗОВАНИЕ**

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 9

Ярославль 2014

УДК 51:378
ББК 22.1
М34

М34 Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 9. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2014. – 264 с.

ISBN 978-5-9914-0385-6

В сборнике представлены научные статьи по математике и методике ее преподавания, математическому моделированию и общим вопросам математического образования.

УДК 519:378
ББК 22.1

Редакционная коллегия: А. В. Бородин (председатель), Д. О. Бытев, А.Н. Жаров, Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг, М.Е. Соловьев.

Рецензенты: кафедра микроэлектроники и общей физики Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова; В.И. Бачурин, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры "Высшая и прикладная математика" Ярославского филиала МИИТ.

ISBN 978-5-9914-0385-8

© Ярославский государственный
технический университет, 2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник «Математика и математическое образование. Теория и практика», выпуск 9, посвящен семидесятилетию со дня основания Ярославского государственного технического университета (ЯГТУ) и, соответственно, кафедры высшей математики (кафедры ВМ).

Первый выпуск сборника состоялся в 1999 году. В этом была объективная необходимость. Научная деятельность кафедры ВМ ЯГТУ с начала ее основания велась по двум направлениям: инициативная научная работа, подкрепляемая публикациями, и прикладные исследования, связанные с математическим моделированием процессов, исследуемых учеными и научными школами ЯГТУ, в частности, при выполнении хозяйственных работ. Происходила неформальная связь с выпускающими кафедрами, что, естественно, приводило к повышению квалификации преподавательского состава кафедры ВМ с точки зрения компетентностного подхода к преподаванию математики. В развитие межвузовских научных и методических связей существенный вклад вносила государственная система повышения квалификации преподавателей: каждый преподаватель обязан был раз в пять лет пройти четырехмесячные курсы на факультетах повышения квалификации (ФПК) ведущих вузов Советского Союза. В 90-е годы разрушилось почти все: исчезли хозяйственные работы и ФПК, резко сократились возможности публикаций и поездок на конференции и семинары, и т.д.

В 1996 году заведующая кафедрой высшей математики Ю.К. Оленикова в качестве руководителя команды студентов и члена жюри принимала участие во Всероссийской математической олимпиаде, проводимой Уральским государственным экономическим университетом. Организаторы этой олимпиады во время выполнения студентами олимпиадных заданий проводили семинар по вопросам методики преподавания математики. Возникла мысль о наших возможностях. Объективная оценка уровня вузовских олимпиад ЯГТУ (они проводились уже более 20 лет) и научного потенциала кафедры ВМ позволила сделать два вывода. Первый: кафедра ВМ может проводить олимпиады и более высокого уровня – областные и всероссийские. И мы с этим успешно справились, о чем можно прочесть в настоящем сборнике в статье Ю.К. Олениковой «Математические олимпиады и образование». Второй: кафедра ВМ имеет реальную возможность эффективно использовать время проведения олимпиад для обсуждения с коллегами не только методических вопросов и проблем, но и научных, в том числе по вопросам математического моделирования, а также издавать сборник научно-методических трудов. Идея эта была поддержана ректором ЯГТУ, в то время это был Ю.А. Москвичев. В инициативную группу кроме Ю.К. Олениковой вошли доценты кафедры ВМ, кандидаты физико-

математических наук А.В. Бородин и В.Ш. Ройтенберг, заведующий кафедрой прикладной математики и вычислительной техники доктор технических наук, профессор Д.О. Бытев, заведующий кафедрой химии и технологии переработки эластомеров, доктор физико-математических наук, профессор М.Е. Соловьев. Были определены тематика семинара, переросшего впоследствии в конференцию, и сборника, их названия и структура. Это математика (наука и методика) и математическое моделирование (наука и методика).

С 1999 года и по настоящее время при постоянной и большой поддержке ректора ЯГТУ А.А. Ломова, а также начальника управления интеллектуальной собственности Т.В. Ключевой, проведено восемь семинаров и конференций и издано восемь выпусков сборника. С самого начала наш сборник является независимым от конференций изданием, издается до начала работы конференции, но включает материалы конференции, присланные заблаговременно в установленные сроки. Сборник не является коммерческим изданием: для работников ЯГТУ публикация бесплатная, а плата авторов извне соответствует реальным затратам на их публикации. Рецензирование статей осуществляется бесплатно редколлегией.

География авторов публикаций наших сборников впечатляет. Это преподаватели, научные работники и аспиранты вузов Ярославля, Волгограда, Екатеринбурга, Запорожья, Казани, Костромы, Минска, Москвы, Нижнекамска, Омска, Рыбинска, Рязани, Саратова, Самары, Санкт-Петербурга, Тольятти, Торонто, Уфы, Читы и др. Результаты многих работ были включены авторами в их диссертации. Значительная часть авторов не теряет связи с кафедрой ВМ ЯГТУ: они продолжают публиковать в нашем сборнике результаты новых исследований.

Содержание сборников охватывает широкий круг вопросов. В разделе «Математика» публикуются новые результаты по теории дифференциальных уравнений, математическому анализу и алгебре. Раздел «Математическое моделирование» представлен широким спектром решений прикладных задач в различных областях технических, экономических и социологических наук. В разделе «Математическое образование» публикуются как статьи по методике преподавания отдельных вопросов и разделов математики, так и общие взгляды на содержание, форму и роль преподавания математики в нематематических вузах, проблемы, связанные с ЕГЭ, проблемы математических олимпиад и подготовки к ним.

Сборник выполняет задачи, положенные в основу его создания и направленные на повышение уровня математического образования в РФ и сохранение научного потенциала работников высшей школы, что соответствует появившейся Концепции математического образования в РФ, утвержденной распоряжением Правительства РФ от 24 декабря 2013 г. №2506-р.

МАТЕМАТИКА

УДК 521.62

А. В. Бородин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: alvasborodin@mail.ru

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КВАТЕРНИОННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Методом спектрального барисинтеза исследованы матричные алгебраические уравнения специального вида, установлены утверждения относительно существования и числа их решений. Подробно рассмотрен случай кватернионного алгебраического уравнения.

Ключевые слова: спектральная бариалгебра, бариалгебраическое уравнение, барикватернионы, кватернионы, барикватернионное уравнение.

A. V. Borodin

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: alvasborodin@mail.ru

ONE CLASS OF QUTERNIONS ALGEBRAIC EQUATIONS

The paper studied the method of spectral bari-synthesis matrix algebraic equations of a special form. Statements regarding the existence and the number of solutions of these equations are established. We consider the case of quaternional algebraic equation.

Keywords: spectral bari-algebra, bari-algebraic equation, bari-quaternion, quaternion, bari-quaternion equation.

Настоящая статья дополняет и развивает работы автора [1-4], в вопросах, касающихся разрешимости алгебраических уравнений (АУ) над спектральной бариалгеброй (СБА) n -го порядка $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n$, где \mathbf{C} – поле комплексных чисел, s – индекс, определяющий тип бариалгебры (при $s = h$ – гиперболическая, а при $s = e$ – эллиптическая).

Напомним (подробнее – в [2]) определение основных алгебраических операций над бариэлементами в СБА $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n$. Если

$$\langle a \rangle = \langle a_0; a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \left\langle a^0; \frac{a^1}{a^0}, \frac{a^2}{a^1}, \dots, \frac{a^n}{a^{n-1}} \right\rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_s^n, \quad (1)$$

где

$$a^0 = \mu^0(\langle a \rangle) := a_0, \quad a^k = \mu^k(\langle a \rangle) := \prod_{j=0}^k a_j \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

то

$$\begin{aligned} \langle a \rangle = \langle b \rangle &\Leftrightarrow \mu^k(\langle a \rangle) = \mu^k(\langle b \rangle), \\ \lambda \langle a \rangle &:= \langle \lambda a_0; a_1, a_2, \dots, a_n \rangle, \quad \mu^k(\langle a \rangle + \langle b \rangle) := a^k + b^k \\ \mu^k(\langle a \rangle \langle b \rangle) &:= \sum_{j=0}^k a^{k-j} b^j \pm \sum_{j=k+1}^n a^{k-j+n+1} b^j \quad (1') \\ \mu^0(\langle a \rangle^*) &= \bar{a}^0, \quad \mu^k(\langle a \rangle^*) := s \bar{a}^{n-k+1} \end{aligned}$$

(где знак «+», если $s = h$, и знак «-», если $s = e$; \bar{a} – комплексное сопряжение; $\langle a \rangle^*$ – барисопряжение; $k = 0, 1, 2, \dots, n$).

В работе [4] рассмотрено бариалгебраическое уравнение (БАУ) $(m+1)$ -й степени

$$P_{m+1}(\langle x \rangle) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \langle a \rangle_k \langle x \rangle^{n-k+1} = \langle \tilde{0} \rangle, \quad (2)$$

где

$$\langle a \rangle_k = \langle a_{k0}; a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn} \rangle = \left\langle a_k^0; \frac{a_k^1}{a_k^0}, \frac{a_k^2}{a_k^1}, \dots, \frac{a_k^n}{a_k^{n-1}} \right\rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_s^n$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n+1)$$

– заданные бариэлементы (коэффициенты БАУ). Посредством спектрального представления бариэлементов (методом спектрального бари-синтеза [2]) показано, что БАУ (1) имеет $(m+1)^{n+1}$ решений $\langle x \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_s^n$.

Например [2], БАУ 3-й степени

$$\langle x \rangle^3 + \langle e \rangle = \langle \tilde{0} \rangle$$

над гиперболической СБА 1-го порядка $\langle \mathbf{C} \rangle_h^1$ (с единичным $\langle e \rangle = \langle 1; 0 \rangle$ и нулевым $\langle \tilde{0} \rangle = \langle 0; 0 \rangle$ бариэлементами) имеет $9 = 3^2$ барирешений:

$$\langle x \rangle_0 = -\langle e \rangle, \quad \langle x \rangle_1 = \exp\left(-\frac{\pi}{3} i\right) \langle e \rangle, \quad \langle x \rangle_2 = \exp\left(\frac{\pi}{3} i\right) \langle e \rangle,$$

$$\begin{aligned}\langle x \rangle_3 &= \frac{1}{2} \left\langle -\exp\left(-\frac{\pi}{3} i\right); -\sqrt{3} \right\rangle, & \langle x \rangle_4 &= \frac{1}{2} \left\langle -\exp\left(\frac{\pi}{3} i\right); -\sqrt{3} \right\rangle, \\ \langle x \rangle_5 &= \frac{1}{2} \left\langle \exp\left(-\frac{\pi}{3} i\right); -\sqrt{3} \right\rangle, & \langle x \rangle_6 &= \frac{1}{2} \left\langle \exp\left(-\frac{\pi}{3} i\right); \sqrt{3} \right\rangle, \\ \langle x \rangle_7 &= \frac{1}{2} \langle 1; -\sqrt{3} \rangle, & \langle x \rangle_8 &= \frac{1}{2} \langle 1; \sqrt{3} \rangle.\end{aligned}$$

Теперь важно заметить, что каждый бариэлемент (1) допускает (как линейное отображение в $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n$) матричное представление

$$\langle a \rangle \cong A = \begin{pmatrix} a^0 & \pm a^n & \dots & \pm a^2 & \pm a^1 \\ a^1 & a^0 & \dots & \pm a^3 & \pm a^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & a^{n-2} & \dots & a^0 & \pm a^n \\ a^n & a^{n-1} & \dots & a^1 & a^0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где знак «+», если $s = h$, и знак «-», если $s = e$. Тем самым СБА $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n$ изоморфна алгебре матриц M_s^{n+1} вида (3) и, следовательно, БАУ (2) равносильно соответствующему матричному уравнению

$$P_{m+1}(X) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k A_k X^{n-k+1} = O. \quad (4)$$

Поэтому матричное уравнение (4), где $A_k \in M_s^{n+1}$, имеет $(m+1)^{n+1}$ решений $X \in M_s^{n+1}$. Следует отметить, что СБА $\langle \mathbf{C} \rangle_s^n$ и её матричный аналог M_s^{n+1} являются коммутативными относительно соответствующих операций бариумножения и матричного умножения [2]. А поскольку (см. теорему 14 [2]) максимальное семейство M_π^{n+1} (M_ν^{n+1}) коммутирующих простых (нормальных) матриц порядка $(n+1)$ подобно (унитарно подобно) алгебре матриц M_h^{n+1} , то справедливо утверждение.

Теорема 1. Матричное уравнение (4) с коэффициентами $A_k \in M_\pi^{n+1}$ ($A_k \in M_\nu^{n+1}$) имеет $(m+1)^{n+1}$ решений $X \in M_\pi^{n+1}$ ($X \in M_\nu^{n+1}$).

При этом следует иметь в виду, что любое (конечное или бесконечное) коммутирующее множество простых (нормальных) матриц можно, согласно лемме Цорна, вложить в максимальное семейство M_π^{n+1} (M_ν^{n+1}).

Далее, при $n=1$ и $s=e$ операцию бариумножения (1') можно модифицировать следующим образом: если

$$\langle a \rangle = \langle a_0; a_1 \rangle = \langle a^0; a^1/a^0 \rangle, \quad (5)$$

где

$$a^0 = \mu^0(\langle a \rangle) := a_0, \quad a^1 = \mu^1(\langle a \rangle) := a_0 a_1,$$

то

$$\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle := \langle a^0 b^0 - \bar{a}^1 b^1; (a^1 b^0 + \bar{a}^0 b^1) / (a^0 b^0 - \bar{a}^1 b^1) \rangle \quad (5')$$

(вместо (1'): $\langle a \rangle \langle b \rangle := \langle a^0 b^0 - a^1 b^1; (a^1 b^0 + a^0 b^1) / (a^0 b^0 - a^1 b^1) \rangle$).

В работе [1] показано, что множество $\langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1$ бариэлементов (5) с операцией бариумножения (5') (эллиптических барикватернионов (ЭБК)) образует некоммутативную бариалгебру, изоморфную алгебре кватернионов \mathbf{H} [5, 6, 7] и соответственно алгебре M_q^2 матриц 2-го порядка вида

$$A = \begin{pmatrix} a^0 & -\bar{a}^1 \\ a^1 & \bar{a}^0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

т.е. $\langle a \rangle \equiv a \equiv A$, где $\langle a \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1$, $a \in \mathbf{H}$, $A \in M_q^2$. Там же на базе бариалгебры

$\langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1$ дано введение в кватернионный анализ (дифференциальное и интегральное исчисления). Мы воспользуемся этим введением для решения матричного (но уже барикватернионного) алгебраического уравнения (4). При этом нас будет интересовать не только количество решений, но и метод их получения.

Поскольку

$$\langle a \rangle \cdot \langle a \rangle^* = \langle a \rangle^* \cdot \langle a \rangle = \|\langle a \rangle\|^2 \langle e \rangle,$$

где $\|\langle a \rangle\| := \sqrt{|a^0|^2 + |a^1|^2}$, то ЭБК $\langle a \rangle$ (соответственно матрица (6)) – нормальный (нормальная) (и даже с точностью до нормы – унитарный (унитарная)). Поэтому, согласно теореме 1, имеет место следующий результат.

Следствие 1. Если коэффициенты (ЭБК $\langle a \rangle_k \in \langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1$, кватернионы $a_k \in \mathbf{H}$, матрицы $A_k \in M_q^2$) AU $(m+1)$ -й степени коммутируют между собой, то AU имеет $(\text{в } \langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1, \text{ в } \mathbf{H}, \text{ в } M_q^2)$ $(m+1)^2$ решений.

Найдём условия, при которых коммутируют коэффициенты АУ (2) или (4). Это проще сделать в бариформе (2), (5).

Лемма 1 (коммутативности). Для того чтобы ЭБК

$$\langle a \rangle = \langle a^0; a^1/a^0 \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1, \langle b \rangle = \langle b^0; b^1/b^0 \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1$$

коммутировали между собой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: при $a^1 \neq 0$

$$b^0 = \alpha + i \beta \operatorname{Im}(a^0), \quad b^1 = \beta a^1, \quad (7)$$

где α и β – произвольные вещественные числа (при $a^1 = 0$ ЭБК $\langle a \rangle$ – скаляр, и тогда $\langle b \rangle$ – любой ЭБК).

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнены условия (7). В силу (5')

$$\mu^0(\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle) := a^0(\alpha + i \beta \operatorname{Im}(a^0)) - \beta |a^1|^2,$$

$$\mu^1(\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle) := a^1(\alpha + i \beta \operatorname{Im}(a^0)) + \beta \bar{a}^0 a^1;$$

$$\mu^0(\langle b \rangle \cdot \langle a \rangle) := a^0(\alpha + i \beta \operatorname{Im}(a^0)) - \beta |a^1|^2,$$

$$\mu^1(\langle b \rangle \cdot \langle a \rangle) := a^1(\alpha - i \beta \operatorname{Im}(a^0)) + \beta a^0 a^1;$$

и значит, $\mu^0(\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle) = \mu^0(\langle b \rangle \cdot \langle a \rangle)$. Остается показать, что и $\mu^1(\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle) = \mu^1(\langle b \rangle \cdot \langle a \rangle)$, т. е.

$$a^1(\alpha + i \beta \operatorname{Im}(a^0)) + \beta \bar{a}^0 a^1 = a^1(\alpha - i \beta \operatorname{Im}(a^0)) + \beta a^0 a^1,$$

или при $a^1 \neq 0$ (ибо при $a^1 = 0$ равенство очевидно)

$$i \beta \operatorname{Im}(a^0) + \beta \bar{a}^0 = -i \beta \operatorname{Im}(a^0) + \beta a^0,$$

или

$$2i \beta \operatorname{Im}(a^0) = \beta(a^0 - \bar{a}^0),$$

что так и есть.

Необходимость. Пусть $\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle = \langle b \rangle \cdot \langle a \rangle$, т.е.

$$a^0 b^0 - \bar{a}^1 b^1 = a^0 b^0 - a^1 \bar{b}^1, \quad a^1 b^0 + \bar{a}^0 b^1 = a^0 b^1 + a^1 \bar{b}^0,$$

или

$$\bar{a}^1 b^1 = a^1 \bar{b}^1, \quad a^1(b^0 - \bar{b}^0) = (a^0 - \bar{a}^0)b^1.$$

Из первого равенства следует, что

$$\bar{a}^1 b^1 = \overline{a^1 b^1} \in \mathbf{R},$$

и значит,

$$b^1 = \beta a^1 \quad (\beta \in \mathbf{R}).$$

Тогда из второго равенства следует, что (при $a^1 \neq 0$)

$$(b^0 - \bar{b}^0) = (a^0 - \bar{a}^0)\beta,$$

и значит,

$$\text{Im}(b^0) = \beta \text{Im}(a^0),$$

или

$$b^0 = \alpha + i \beta \text{Im}(a^0),$$

где α и β – произвольные вещественные числа.

Необходимость условий (7) доказана. \square

Таким образом, любой коммутирующий с ЭБК $\langle a \rangle = \langle a^0; a^1/a^0 \rangle$

бариеlement $\langle b \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1$ имеет вид

$$\langle b \rangle = \langle \alpha + i \beta \text{Im}(a^0); \beta a^1 / (\alpha + i \beta \text{Im}(a^0)) \rangle = \alpha \langle 1; 0 \rangle + \beta \langle i \text{Im}(a^0); a^1 \rangle, \quad (7')$$

где $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ – произвольные числа (параметры, координаты).

Например, ЭБК $\langle a \rangle = \langle 1 + i; (\sqrt{3} - i)/(1 + i) \rangle$ коммутирует с любым

кватернионом вида $\langle b \rangle = \langle \alpha + \beta i; \beta(\sqrt{3} - i)/(\alpha + \beta i) \rangle$, где α и β – произвольные вещественные числа. Оказывается, что и все ЭБК вида (7') коммутируют между собой. Это вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2 (транзитивности). Если ЭБК $\langle b \rangle$ и $\langle b' \rangle$ коммутируют с ЭБК $\langle a \rangle$, у которого $a^1 \neq 0$, то $\langle b \rangle$ и $\langle b' \rangle$ коммутируют между собой.

Доказательство. По лемме 1 необходимо

$$\mu^0(\langle b \rangle) = \alpha + i \beta \text{Im}(a^0), \quad \mu^1(\langle b \rangle) = \beta a^1 \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}),$$

$$\mu^0(\langle b' \rangle) = \alpha' + i \beta' \text{Im}(a^0), \quad \mu^1(\langle b' \rangle) = \beta' a^1 \quad (\alpha', \beta' \in \mathbf{R}),$$

и, следовательно,

$$\mu^0(\langle b \rangle \cdot \langle b' \rangle) = \alpha \alpha' - \beta \beta' (\text{Im}(a^0))^2 + i (\alpha' \beta + \alpha \beta') \text{Im}(a^0),$$

$$\mu^1(\langle b \rangle \cdot \langle b' \rangle) = (\alpha \beta + \alpha \beta') a^1.$$

А поскольку эти два выражения симметричны относительно параметров α, β и α', β' , постольку $\langle b \rangle \cdot \langle b' \rangle = \langle b' \rangle \cdot \langle b \rangle$, что и требовалось доказать. \square

Заодно показано, что при перемножении бариеlementов вида (7') получается бариеlementы того же вида. Тем самым справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. При фиксированном $\langle a \rangle = \langle a^0; a^1/a^0 \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1$ ($a^1 \neq 0$) двухпараметрическое множество ЭБК вида (7') образует максимальную коммутативную подалгебру $\langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1(\langle a \rangle)$ (двумерную над \mathbf{R}) в некоммутативной эллиптической барикватернионной алгебре $\langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1$ (четырёхмерной над \mathbf{R}).

Заметим, что в силу (7') базис (над \mathbf{R}) в $\langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1(\langle a \rangle)$ ($a^1 \neq 0$) образуют ЭБК:

$$\langle e \rangle_0 := \langle 1; 0 \rangle, \quad \langle q \rangle_{\langle a \rangle} := \langle i \operatorname{Im}(a^0); a^1 \rangle = \|\langle q \rangle_{\langle a \rangle}\| \langle e \rangle_{\langle a \rangle}, \quad (7'')$$

где единичный ЭБК

$$\langle e \rangle_{\langle a \rangle} := \langle q \rangle_{\langle a \rangle} / \|\langle q \rangle_{\langle a \rangle}\| \left(\|\langle q \rangle_{\langle a \rangle}\| := \sqrt{(\operatorname{Im}(a^0))^2 + |a^1|^2} \right),$$

причём

$$(\langle e \rangle_{\langle a \rangle})^2 = -\langle e \rangle_0.$$

Следуя работе [1], построим спектральное бариразложение ЭБК (5) при условии, что

$$\|\langle q \rangle_{\langle a \rangle}\| := \sqrt{(\operatorname{Im}(a^0))^2 + |a^1|^2} \neq 0. \quad (8)$$

Сначала найдём собственные значения ЭБК (5). Ими при условии (8) будут два комплексно сопряжённых числа:

$$\lambda_k(\langle a \rangle) = \operatorname{Re}(a^0) + (-1)^{k-1} \|\langle q \rangle_{\langle a \rangle}\| i \quad (k=1, 2), \quad (9_1)$$

Затем – спектральные барикомпоненты ЭБК (5). Таковыми будут матрицы 2-го порядка

$$Q_1(\langle a \rangle) = \frac{1}{2 \|\langle q \rangle_{\langle a \rangle}\|} \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(a^0) + \|\langle q \rangle_{\langle a \rangle}\| & \bar{a}^1 i \\ -a^1 i & \operatorname{Im}(\bar{a}^0) + \|\langle q \rangle_{\langle a \rangle}\| \end{pmatrix},$$

$$Q_2(\langle a \rangle) = -\frac{1}{2 \|\langle q \rangle_{\langle a \rangle}\|} \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(a^0) - \|\langle q \rangle_{\langle a \rangle}\| & \bar{a}^1 i \\ -a^1 i & \operatorname{Im}(\bar{a}^0) - \|\langle q \rangle_{\langle a \rangle}\| \end{pmatrix}. \quad (9_2)$$

Интересно отметить, что эти матрицы не являются (за исключением случая $a^0 \in \mathbf{R}$) матрицами типа (6), т.е. «кватернионными» матрицами. В

то же время несложно проверить, что барикомпоненты (9_2) ЭБК (5) удовлетворяют спектральным свойствам [1, 2]:

$$Q_k^2(\langle a \rangle) = Q_k(\langle a \rangle) \quad (k = 1, 2), \quad (10_1)$$

$$Q_1(\langle a \rangle)Q_2(\langle a \rangle) = Q_2(\langle a \rangle)Q_1(\langle a \rangle) = O, \quad (10_2)$$

$$Q_1(\langle a \rangle) + Q_2(\langle a \rangle) = I; \quad (10_3)$$

причём имеет место следующее спектральное разложение ЭБК (5):

$$\langle a \rangle = \langle a^0; a^1/a^0 \rangle \cong A = \begin{pmatrix} a^0 & -\bar{a}^1 \\ a^1 & \bar{a}^0 \end{pmatrix} = \lambda_1 Q_1(\langle a \rangle) + \lambda_2 Q_2(\langle a \rangle). \quad (11)$$

Более того, справедливо следующее утверждение [1].

Теорема 2. Если функция $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ определена на спектре

$$\sigma(\langle a \rangle) = \{\lambda_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1\}(\langle a \rangle)$$

ЭБК (5) и коммутирует с операцией комплексного сопряжения, т.е.

$$f(\bar{\lambda}) = \overline{f(\lambda)}$$

то

$$f(\langle a \rangle) = f(\lambda_1(\langle a \rangle))Q_1(\langle a \rangle) + f(\lambda_2(\langle a \rangle))Q_2(\langle a \rangle): \quad (12)$$

$$\langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1(\langle a \rangle) \rightarrow \langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1(\langle a \rangle).$$

Замечание 1. Если для ЭБК (5) условие (8) нарушено, то всё тривиально, поскольку $a^0 \in \mathbf{R}$, $a^1 = 0$, $\langle a \rangle = a^0 \langle e \rangle_0$, и значит, $f(\langle a \rangle) = f(a^0) \langle e \rangle_0$.

Замечание 2. На базе теоремы 2 (и ей подобных) в работах [1-3] построено введение в кватернионный и коммутативный барианализы.

Замечание 3. Из (11) и (10₃) следует, что

$$A Q_k(\langle a \rangle) = Q_k(\langle a \rangle) A = \lambda_k Q_k(\langle a \rangle) \quad (k = 1, 2),$$

т.е. столбцы матриц (9_2) являются собственными векторами матрицы (6), отвечающими собственным значениям (9_1) .

Продемонстрируем формулы (9_2) и (11) на ЭБК

$$\langle a \rangle = \langle 1+i; (\sqrt{3}-i)/(1+i) \rangle: \quad a^0 = 1+i, \quad a^1 = \sqrt{3}-i, \quad \|\langle q \rangle_{\langle a \rangle}\| := \sqrt{5}.$$

Согласно (9_1)

$$\lambda_1(\langle a \rangle) = 1 + \sqrt{5}i, \quad \lambda_2(\langle a \rangle) = 1 - \sqrt{5}i,$$

а согласно (9_2)

$$Q_1(\langle a \rangle) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1+\sqrt{3}i \\ -1-\sqrt{3}i & -1+\sqrt{5}i \end{pmatrix}, \quad Q_2(\langle a \rangle) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} & -1-\sqrt{3}i \\ 1+\sqrt{3}i & 1+\sqrt{5}i \end{pmatrix}.$$

Поэтому, ввиду (11)

$$\langle a \rangle = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left((1 + \sqrt{5}i) \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{5} & 1 + \sqrt{3}i \\ -1 - \sqrt{3}i & -1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} - (1 - \sqrt{5}i) \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} & 1 + \sqrt{3}i \\ -1 - \sqrt{3}i & -1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \right)$$

Далее, из леммы 1 и представлений (9₂) вытекает следующее очень важное утверждение.

Лемма 3 (инвариантности). *Если ЭБК $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ коммутируют между собой, то их спектральные барикомпоненты совпадают, т.е.*

$$Q_k(\langle a \rangle) = Q_k(\langle b \rangle) \quad (k = 1, 2),$$

Теперь вернёмся к матричному АУ (4) и рассмотрим его над эллиптической барикватернионной алгеброй $\langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1$ (или, что то же самое, над кватернионной матричной алгеброй M_q^2). Поскольку $\langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1$ – некоммутативная алгебра, то решение АУ (4) в общем случае проблематично (даже при $m = 1$). Поэтому наложим на коэффициенты $\langle a \rangle_k \in \langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m+1$) условие коммутативности:

$$\langle a \rangle_k \langle a \rangle_{k'} = \langle a \rangle_{k'} \langle a \rangle_k \quad (k, k' = 0, 1, 2, \dots, m+1). \quad (13)$$

Согласно следствию 1 это означает, что

$$\langle a \rangle_k \in \langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1(\langle a \rangle) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m+1) \quad (13')$$

для некоторого $\langle a \rangle = \langle a^0; a^1 / a^0 \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1$ (при условии, что $a^1 \neq 0$).

В этом случае, согласно лемме 3, все коэффициенты $\langle a \rangle_k \in \langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1(\langle a \rangle)$ АУ (4) имеют одинаковые спектральные барикомпоненты, т.е.

$$Q_j(\langle a \rangle_k) = Q_j(\langle a \rangle) \quad (j = 1, 2),$$

и допускают в силу (11) спектральное разложение

$$\langle a \rangle_k = \lambda_1(\langle a \rangle_k) Q_1(\langle a \rangle) + \lambda_2(\langle a \rangle_k) Q_2(\langle a \rangle) \quad (14)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, m+1).$$

При этом, если в соответствии с (7)

$$a_k^0 = \alpha_k + i \beta_k \operatorname{Im}(a^0), \quad a_k^1 = \beta_k a^1 \quad (\alpha_k, \beta_k \in \mathbf{R},$$

то ввиду (9₁)

$$\lambda_j(\langle a \rangle_k) = \alpha_k + (-1)^{j-1} \beta_k \parallel \langle a \rangle \parallel i \quad (j = 1, 2). \quad (14')$$

Естественно, что и решение $\langle x \rangle = \langle x^0; x^1 / x^0 \rangle$ АУ (4) будем искать в той же коммутативной подалгебре $\langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1(\langle a \rangle)$, которой принадлежат коэффициенты $\langle a \rangle_k$ (см. (13')), т.е. в виде спектрального разложения

$$\langle x \rangle = \lambda_1(\langle x \rangle) Q_1(\langle a \rangle) + \lambda_2(\langle x \rangle) Q_2(\langle a \rangle). \quad (15)$$

Подставим разложения (14), (15) в АУ (4). В силу свойств (10), относительно неизвестных $\lambda_1(\langle x \rangle)$ и $\lambda_2(\langle x \rangle)$ получим два независимых АУ $(m+1)$ -й степени (над полем \mathbf{C}):

$$\sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \lambda_j(\langle a \rangle_k) (\lambda_j(\langle x \rangle))^{n-k+1} = 0 \quad (j=1, 2).$$

Каждое из этих уравнений имеет (с учётом кратности) ровно $(m+1)$ корней

$$\lambda_{jk}(\langle x \rangle) \in \mathbf{C} \quad (k=1, 2, \dots, m+1; j=1, 2). \quad (16)$$

Подставляя в (15) на место $\lambda_1(\langle x \rangle)$ и $\lambda_2(\langle x \rangle)$ значения (16) ($\lambda_{1k}(\langle x \rangle)$ и $\lambda_{2k}(\langle x \rangle)$ в любом относительно индекса k порядке) получим в подалгебре $\langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1(\langle a \rangle)$ (с учётом кратности) $(m+1)^2$ решений АУ (4):

$$\langle x \rangle_{k_1 k_2} = \lambda_{1k_1}(\langle x \rangle) Q_1(\langle a \rangle) + \lambda_{2k_2}(\langle x \rangle) Q_2(\langle a \rangle) \quad (17)$$

$$(k_1, k_2 \in \{1, 2, \dots, m+1\}).$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Если коэффициенты $\langle a \rangle_k$ АУ

$$\sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \langle a \rangle_k \langle x \rangle^{n-k+1} = \langle \tilde{0} \rangle$$

удовлетворяют условию (13') для некоторого $\langle a \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1$ ($\mu^1(\langle a \rangle) \neq 0$), то это АУ имеет в подалгебре $\langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1(\langle a \rangle)$ $(m+1)^2$ решений (17).

Замечание 4. Изложенные результаты (с соответствующими техническими поправками) справедливы и для гиперболических бари-кватернионов (ГБК), т.е. для множества бариэлементов (5) $(\langle \mathbf{C} \rangle_{hq}^1)$ с операцией бариумножения (ср. с (5'))

$$\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle := \langle a^0 b^0 + \bar{a}^1 b^1; (a^1 b^0 + \bar{a}^0 b^1) / (a^0 b^0 + \bar{a}^1 b^1) \rangle.$$

Замечание 5. Несомненный теоретический и практический интерес представляет рассмотренная задача с позиций тензорного произведения и тензорной суммы (определённой в [3, гл. 10]) бариматриц (включая полумагические) и барикватернионов (ЭБК, ГБК).

В заключение проиллюстрируем теорему 3 следующим квадратным БАУ (над подалгеброй $\langle \mathbf{C} \rangle_{eq}^1(\langle a \rangle)$):

$$\langle x \rangle^2 + \langle a \rangle = \langle \tilde{0} \rangle,$$

где $\langle a \rangle = \langle 1+i; (\sqrt{3}-i)/(1+i) \rangle$. Здесь $\langle a \rangle_0 = \langle 1; 0 \rangle$, и значит, $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\lambda_1(\langle a \rangle_0) = \lambda_2(\langle a \rangle_0) = 1$; $\langle a \rangle_2 = \langle 1+i; (\sqrt{3}-i)/(1+i) \rangle$, и значит, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 1$, $\lambda_1(\langle a \rangle_2) = 1 + \sqrt{5}i$, $\lambda_2(\langle a \rangle_2) = 1 - \sqrt{5}i$. Таким образом, относительно неизвестных $\lambda_1(\langle x \rangle)$ и $\lambda_2(\langle x \rangle)$ получим два независимых АУ

$$\lambda_1^2(\langle x \rangle) + (1 + \sqrt{5}i) = 0, \quad \lambda_2^2(\langle x \rangle) + (1 - \sqrt{5}i) = 0.$$

Решая эти уравнения, получим

$$\lambda_{11}(\langle x \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\sqrt{6}-1} - i\sqrt{\sqrt{6}+1} \right), \quad \lambda_{12}(\langle x \rangle) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\sqrt{6}-1} - i\sqrt{\sqrt{6}+1} \right),$$

$$\lambda_{21}(\langle x \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\sqrt{6}-1} + i\sqrt{\sqrt{6}+1} \right), \quad \lambda_{22}(\langle x \rangle) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\sqrt{6}-1} + i\sqrt{\sqrt{6}+1} \right).$$

Подставляя эти значения в формулу (17), где барикомпоненты $Q_1(\langle a \rangle)$ и $Q_2(\langle a \rangle)$ определены выше (см. абзац перед леммой 3), получим четыре решения рассматриваемого АУ и соответственно два способа разложения многочлена $P_2(\langle x \rangle) = \langle x \rangle^2 + \langle a \rangle$ на линейные множители.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бородин, А.В.* Одномерный барилейный анализ и изоспектральные уравнения Шредингера. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 1997. 177 с.
2. *Бородин, А.В.* Многомерный барианализ и его приложения. Ч. I. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2005. 432 с.
3. *Бородин, А.В.* Частично квазисвязные множества и барианализ (приложения). Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2013. 484 с.
4. *Бородин, А.В.* Бариоперационный метод решения алгебраических уравнений // Ярослав. пед. вестник. 2010. №2 (Естественные науки). С. 7-14.
5. *Кантор, И.Л.* Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. М.: Наука, 1973. 144 с.

6. Конвей, Дж. Х. О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях / Дж. Х. Конвей, Д.А. Смит. М.: МЦНМО, 2009. 184 с.
7. Постников, М.М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. М.: Наука, 1986. 400 с.

УДК 512.64

Ю. И. Большаков

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Россия, г. Ярославль, e-mail: bolsh@uniyar.ac.ru

**НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ
С КОНЕЧНЫМИ КЛАССИФИКАЦИЯМИ
В Н-УНИТАРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

Рассматриваются несколько задач в H -унитарном пространстве, каждая из которых имеет конечную классификацию.

Ключевые слова: H -унитарное пространство, отношение эквивалентности, классификация матриц.

Y.I. Bolshakov

*P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: bolsh@uniyar.ac.ru*

**SOME PROBLEMS WITH FINITES CLASSIFICATIONS
IN H -UNITARY SPACES**

A few problems in H -unitary spaces are considered in this paper. Each of them has a finite classification.

Keywords: H -unitary space, equivalence relation, classification of matrices.

Пусть H - самосопряженная невырожденная комплексная матрица, т.е. $H^* = H$ и $\det H \neq 0$.

Определение 1. H -самосопряженной к матрице X называется матрица X^H , определяемая равенством: $X^H = H^{-1} X^* H$.

Если матрица T - матрица перехода к новому базису, то $X' = T^{-1} X T$, $H' = T^* H T$, а матрица X^H преобразуется в матрицу

$(X^H)' = (X')^H = H^{-1} (X')^* H'$. Кроме того, матрица X^H может быть определена из равенства $[X^H x, y] = [x, Xy], \forall x, y \in \mathbb{C}^n$, где $[p, q] := q^* H p; p, q \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Определение 2. Матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ называется H -самосопряженной, если $A^H = A$.

Пример 1. Матрица $A = J_k(\lambda)$ является Q_k -самосопряженной, где $J_k(\lambda), Q_k \in \mathbb{C}^{k \times k}, \lambda \in \mathbb{R}$ и

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}, Q_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Доказательство следующей теоремы восходит к Вейерштрассу и Кронекеру.

Теорема 1. Пусть A - комплексная $n \times n$ H -самосопряженная матрица, тогда существует невырожденная комплексная $n \times n$ -матрица T и такая, что

$$A' = T^{-1} A T = J_{k_1}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus J_{k_\alpha}(\lambda_\alpha) \oplus \left[J_{k_{\alpha+1}}(\lambda_{\alpha+1}) \oplus J_{k_{\alpha+1}}(\overline{\lambda_{\alpha+1}}) \right] \oplus \dots \oplus \left[J_{k_\beta}(\lambda_\beta) \oplus J_{k_\beta}(\overline{\lambda_\beta}) \right],$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha$ - вещественные, $\lambda_{\alpha+1}, \dots, \lambda_\beta$ - невещественные с положительными мнимыми частями; в том и в другом случае не исключена возможность $k_i = k_j, \lambda_i = \lambda_j$ при некоторых i и j ;

$$H' = T^* H T = \varepsilon_1 Q_{k_1} \oplus \dots \oplus \varepsilon_\alpha Q_{k_\alpha} \oplus Q_{2k_{\alpha+1}} \oplus \dots \oplus Q_{2k_\beta},$$

причем числа $\varepsilon_i = 1$ или $\varepsilon_i = -1, i = 1, 2, \dots, \alpha$.

Каноническая форма (A', H') пары (A, H) определена однозначно с точностью до синхронной перестановки пар (J_k, Q_k) в паре (A', H') .

Набор чисел $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\alpha)$ носит название знаковой характеристики H -самосопряженной матрицы A (или пары (A, H)).

Хорошо известно, что общее число $m_k(\lambda_k)$ жордановых клеток порядка k с собственным числом λ_k матрицы A' может быть вычислено по формуле $m_k(\lambda_k) = \text{rg}(A - \lambda_k I_n)^{k-1} - 2\text{rg}(A - \lambda_k I_n)^k + \text{rg}(A - \lambda_k I_n)^{k+1}$ [1, с. 424] или, что равносильно,

$$m_k(\lambda_k) = 2 \dim \text{Ker}(A - \lambda_k I_n)^k - \dim \text{Ker}(A - \lambda_k I_n)^{k-1} - \dim \text{Ker}(A - \lambda_k I_n)^{k+1}$$
 [2, с. 231].

Числа $m_k(\lambda_k)$ являются инвариантами матрицы A при действии группы $GL(n, \mathbb{C})$ по правилу $(A)\varphi(T) = T^{-1}AT$ и, следовательно, они служат также инвариантами пары (A, H) при действии той же группы по правилу $(A, H)\Psi(T) = (T^{-1}AT, T^*HT)$, $T \in GL(n, \mathbb{C})$. Наша задача состоит в том, чтобы выразить числа ε_i из теоремы 1 через инварианты пары (A, H) .

Пусть m_{ij} - число жордановых клеток размера $k_{ij} \times k_{ij}$ матрицы A , отвечающих собственному числу λ_j , из которых m_{ij}^+ отвечают $\varepsilon = 1$, а m_{ij}^- отвечают $\varepsilon = -1$, тогда $m_{ij} = m_{ij}^+ - m_{ij}^-$. При этом $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$, $k_{ij} > k_{i+1, j}$, $i = 1, 2, \dots, s_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, p$. Здесь p - количество всех различных собственных чисел матрицы A , s_j - число различных размеров жордановых клеток, отвечающих собственному числу λ_j , $j = 1, 2, \dots, p$.

Если нам удастся выразить разности $r_{ij} := m_{ij}^+ - m_{ij}^-$ через инварианты пары (A, H) , то задача будет решена:

$$\begin{cases} m_{ij}^+ = \frac{1}{2}(m_{ij} + r_{ij}) \\ m_{ij}^- = \frac{1}{2}(m_{ij} - r_{ij}) \end{cases}, i = 1, 2, \dots, s_j; j = 1, 2, \dots, p. \quad (2)$$

Теорема 2. Числа r_{ij} в (2) могут быть найдены из следующих выражений:

$$r_{ij} = \Delta_{ij} + (-1)^{k_{i-1, j} - k_{ij} - 1} \Delta_{i-1, j}, i = 2, 3, \dots, s_j, j = 1, 2, \dots, p,$$

$$r_{ij} = \Delta_{1j} + \alpha_1 (-1)^{k_{12}+k_{13}+\dots+k_{1j}} + \alpha_2 (-1)^{k_{13}+k_{14}+\dots+k_{1j}} + \dots + \alpha_{j-2} (-1)^{k_{1,j-1}+k_{1j}} + \alpha_{j-1} (-1)^{k_{1j}}, \text{ где } \alpha_l = \sum_{i=1}^{s_j} (1 + (-1)^{k_{il}-k_{i+1,j}-1}) \Delta_{il}, l = 1, 2, \dots, j-1,$$

где инварианты

$$\Delta_{ij} = \text{sign}H(A - \lambda_j I_n)^{k_{ij}-1} - \text{sign}H(A - \lambda_j I_n)^{k_{ij}}, i = 1, 2, \dots, s_j, j = 1, 2, \dots, p, \sum_{i,j} \Delta_{ij} = s_1 + s_2 + \dots + s_p \leq n. \text{ Здесь символ } \text{sign}G \text{ означает сигнатуру (разность между числом плюсов и минусов) формы } [Gx, y].$$

Полное доказательство теоремы 2 приведено в работе [3], мы лишь проиллюстрируем теорему 2 на следующем примере.

Пример 1. Пара (A, H) имеет следующий канонический вид:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \oplus [-2] \oplus [4],$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \oplus [1] \oplus [-1].$$

$$\text{Тогда, в обозначениях теоремы 2, } n = 8, p = 2, k_{11} = 2, m_{11} = 3, k_{21} = 1, m_{21} = 1, k_{12} = 1, m_{12} = 1; m_{11}^+ = 1, m_{11}^- = 2, r_{11} = -1, m_{21}^+ = 1, m_{21}^- = 0, r_{21} = 1, m_{12}^+ = 0, m_{12}^- = 1, r_{12} = -1, s_1 = 2, s_2 = 1.$$

Вычислим Δ_{ij}, α_i через инварианты пары (A, H) и с их помощью найдем r_{ij} . Итак,

$$\Delta_{11} = \text{sign}H(A - \lambda_1 I) - \text{sign}H(A - \lambda_1 I)^2 = -2 - (1) = -1,$$

$$\Delta_{21} = \text{sign}H(A - \lambda_1 I)^0 - \text{sign}H(A - \lambda_1 I) = 0 - (-2) = 2,$$

$$\Delta_{12} = \text{sign}H(A - \lambda_2 I)^0 - \text{sign}H(A - \lambda_2 I) = 0 - (-1) = 1,$$

$$\alpha_1 = (1 + (-1)^{2-1-1}) \Delta_{11} + (1 + (-1)^{1-1}) \Delta_{21} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 2.$$

Далее, используя формулы для параметров r_{ij} из теоремы 2, получим $r_{11} = -1 + 2 \cdot 0 = -1, r_{12} = 1 + 2(-1)^1 = -1, r_{21} = 2 + (-1)^{k_{11}-k_{21}-1} \Delta_{11} = 2 - 1 = 1$, которые совпадают с соответствующими значениями r_{ij} , вычисленными на-

ми ранее по формулам $r_{ij} = m_{ij}^+ - m_{ij}^-$, что в конечном счете приводит к формулам (2).

Следующая теорема дает классификацию собственных подпространств H -самосопряженной нильпотентной матрицы A .

Теорема 3. (Б. Райхштейн) Пусть $A - H$ -самосопряженная нильпотентная матрица с элементами из \mathbb{C} ; канонический вид пары (A', H') описан в теореме 1. Пусть k_1 жордановых блоков размера $n_1 \times n_1$, из которых первые k_1^+ блоков имеют $\varepsilon = 1$ и последние $k_1^- = k_1 - k_1^+$ блоков имеют $\varepsilon = -1$; k_2 жордановых блоков размера $n_2 \times n_2$, из которых первые k_2^+ блоков имеют $\varepsilon = 1$ и последние $k_2^- = k_2 - k_2^+$ блоков имеют $\varepsilon = -1$; ...; k_s жордановых блоков размера $n_s \times n_s$, из которых первые k_s^+ блоков имеют $\varepsilon = 1$ и последние $k_s^- = k_s - k_s^+$ блоков имеют $\varepsilon = -1$. Пусть

$$n_1 > n_2 > \dots > n_s, \quad (3)$$

и пусть V - собственное подпространство A , т.е. $AV = 0$. Тогда существует базис \mathbb{C}^n , состоящий из векторов

$$\{e_{\alpha\beta t}\}, t = 1, 2, \dots, s, \beta = 1, 2, \dots, k_t, \alpha = 1, 2, \dots, n_t \quad (4)$$

такой, что (I) базис (4) - канонический для A , т.е.

$$A'e_{ijt} = e_{i-1, jt} \quad (e_{0jt} = 0) \text{ и}$$

$$e_{i jt}^* H' e_{ijt} = \begin{cases} +1, & \text{если } t = \tilde{t}, j = \tilde{j}, i + \tilde{i} = n_t + 1, j = 1, 2, \dots, k_t^+, \\ -1, & \text{если } t = \tilde{t}, j = \tilde{j}, i + \tilde{i} = n_t + 1, j = k_t^+ + 1, k_t^+ + 2, \dots, k_t, \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \text{ и (II)}$$

существует однозначно определенная $3 \times s$ матрица Λ , элементы которой суть неотрицательные числа, вида

$$\Lambda = \begin{bmatrix} l_1^0 & l_2^0 & \dots & l_s^0 \\ l_1^+ & l_2^+ & \dots & l_s^+ \\ l_1^- & l_2^- & \dots & l_s^- \end{bmatrix}, \quad (5)$$

и такая, что

$$l_t^+ + l_t^0 \leq k_t^+, \quad l_t^- + l_t^0 \leq k_t^-, \quad t = 1, 2, \dots, s, \quad (6)$$

а подпространство $V' := T^{-1}V$ есть

$$V' = \text{span} \left\{ e_{11t}, e_{12t}, \dots, e_{1, k_i^+ + 1, t}, e_{1, k_i^+ + 2, t}, \dots, e_{1, k_i^+ + l_i^-, t}, e_{1, l_i^+ + 1, t} + e_{1, k_i^+ + l_i^- + 1, t}, e_{1, l_i^+ + 2, t} + \right. \\ \left. + e_{1, k_i^+ + l_i^- + 2, t}, \dots, e_{1, l_i^+ + l_i^0, t} + e_{1, k_i^+ + l_i^- + l_i^0, t} \right\} = 1, 2, \dots, s. \quad (7)$$

Из теоремы 3 следует, что число H -унитарно неэквивалентных подпространств ядра H -самосопряженной матрицы A конечно и равно количеству различных матриц вида (5) с параметрами l_i^0, l_i^+, l_i^- , удовлетворяющими системе неравенств (6) ($i = 1, 2, \dots, s$). Полное доказательство теоремы 3 приведено в работе [4]. Ближайшей нашей целью является найти общее количество таких матриц. Конечный результат мы представим в виде теоремы 4, доказательство которой проведено в работе [5].

Теорема 4. Пусть A – H -самосопряженная нильпотентная матрица, канонический вид пары (A', H') описан в теореме 3. Число H -унитарно неэквивалентных подпространств $\text{Ker } A$ вычисляется по формуле (8):

$$S = \frac{1}{6^s} \prod_{i=1}^s (k_i^+ + 1)(k_i^- + 2)(3\bar{k}_i + 3 - k_i^-) \quad (8)$$

Здесь $\bar{k}_i = \max\{k_i^+, k_i^-\}$, $k_i^- = \min\{k_i^+, k_i^-\}$, а числа k_i^+ и k_i^- ($i = 1, 2, \dots, s$) из теоремы 3. Пример иллюстрирующий формулу (8).

Пример 2. Пусть, например, $k_1^+ = k_1^- = 1, k_2^+ = k_2^- = 2, n = 2n_1 + 4n_1, \text{Ker } A = \langle e_1^+, e_1^-, f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^- \rangle$. Здесь $\dim \text{Ker } A = 6, f_1^+ \sim f_2^+, f_1^- \sim f_2^-, s = 2$. Формула (8) примет вид

$S = \frac{1}{6^2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot (3 + 3 - 1) \cdot 3 \cdot 4 \cdot (6 + 3 - 2) = 5 \cdot 14 = 70$. Перечислим все неэквивалентные подпространства явно. Следующие 5 неэквивалентных подпространств относятся к 1-м двум клеткам с $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = -1$ соответственно: $\langle 0 \rangle, \langle e_1^+ \rangle, \langle e_1^- \rangle, \langle e_1^+ + e_1^- \rangle, \langle e_1^+, e_1^- \rangle$, а последующие 14 неэквивалентных подпространств относятся ко 2-м четырем клеткам, две из которых имеют $\varepsilon = 1$ и две - число $\varepsilon = -1$:

$$\langle 0 \rangle, \langle f_1^+ \rangle, \langle f_1^- \rangle, \langle f_1^+ + f_1^- \rangle, \langle f_1^+, f_1^- \rangle, \langle f_1^+, f_2^+ \rangle, \langle f_1^-, f_2^- \rangle, \langle f_1^+, f_2^+ + f_2^- \rangle, \\ \langle f_1^-, f_2^+ + f_2^- \rangle, \langle f_1^+ + f_1^-, f_2^+ + f_2^- \rangle, \langle f_1^+, f_1^-, f_2^+ \rangle \\ \langle f_1^+, f_1^-, f_2^- \rangle, \langle f_1^+, f_1^-, f_2^+ + f_2^- \rangle, \langle f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^- \rangle.$$

Расположим подпространства в порядке возрастания их размерностей.

$$0) \langle 0 \rangle, s_0 = 1;$$

$$1) \langle e_1^+, \langle e_1^-, \langle f_1^+, \langle f_1^-, \langle e_1^+ + e_1^-, \langle f_1^+ + f_1^- \rangle \rangle \rangle \rangle, s_1 = 6;$$

$$2) \langle e_1^+, e_1^-, \langle e_1^+, f_1^+ \rangle, \langle e_1^+, f_1^- \rangle, \langle e_1^-, f_1^+ \rangle, \langle e_1^-, f_1^- \rangle, \langle f_1^+, f_1^- \rangle, \langle f_1^+, f_2^+ \rangle, \langle f_1^-, f_2^- \rangle, \langle e_1^+ + e_1^-, f_1^+ \rangle, \langle e_1^+ + e_1^-, f_1^- \rangle, \langle e_1^+, f_1^+ + f_1^- \rangle, \langle e_1^-, f_1^+ + f_1^- \rangle, \langle f_1^+ + f_1^-, f_2^+ \rangle, \langle f_1^+ + f_1^-, f_2^- \rangle, \langle e_1^+ + e_1^-, f_1^+ + f_1^- \rangle, \langle f_1^+ + f_1^-, f_2^+ + f_2^- \rangle \rangle \rangle, s_2 = 16;$$

$$3) \langle e_1^+, e_1^-, f_1^+ \rangle, \langle e_1^+, e_1^-, f_1^- \rangle, \langle e_1^+, f_1^+, f_1^- \rangle, \langle e_1^+, f_1^+, f_2^+ \rangle, \langle e_1^+, f_1^-, f_2^- \rangle, \langle e_1^-, f_1^+, f_1^- \rangle, \langle e_1^-, f_1^+, f_2^+ \rangle, \langle e_1^-, f_1^-, f_2^- \rangle, \langle f_1^+, f_2^+, f_1^- \rangle, \langle f_1^-, f_2^-, f_1^+ \rangle, \langle e_1^+ + e_1^-, f_1^+, f_1^- \rangle, \langle e_1^+ + e_1^-, f_1^+, f_2^+ \rangle, \langle e_1^+ + e_1^-, f_1^-, f_2^- \rangle, \langle e_1^+, e_1^-, f_1^+ + f_1^- \rangle, \langle e_1^+, f_2^+, f_1^+ + f_1^- \rangle, \langle e_1^+, f_2^-, f_1^+ + f_1^- \rangle, \langle e_1^-, f_2^+, f_1^+ + f_1^- \rangle, \langle e_1^-, f_2^-, f_1^+ + f_1^- \rangle, \langle e_1^+ + e_1^-, f_1^+ + f_1^-, f_2^+ \rangle, \langle e_1^+ + e_1^-, f_1^+ + f_1^-, f_2^- \rangle, \langle e_1^+, f_1^+ + f_1^-, f_2^+ + f_2^- \rangle, \langle e_1^-, f_1^+ + f_1^-, f_2^+ + f_2^- \rangle, \langle f_2^+, f_2^-, f_1^+ + f_1^- \rangle \rangle \rangle, s_3 = 24.$$

$$4) \langle e_1^+, e_1^-, f_1^+, f_1^- \rangle, \langle e_1^+, e_1^-, f_1^+, f_2^+ \rangle, \langle e_1^+, e_1^-, f_1^-, f_2^- \rangle, \langle e_1^+, f_1^+, f_2^+, f_1^- \rangle, \langle e_1^+, f_1^-, f_2^-, f_1^+ \rangle, \langle e_1^-, f_1^+, f_2^+, f_1^- \rangle, \langle e_1^-, f_1^-, f_2^-, f_1^+ \rangle, \langle f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^- \rangle, \langle e_1^+ + e_1^-, f_1^+, f_1^-, f_2^+ \rangle, \langle e_1^+ + e_1^-, f_1^+, f_1^-, f_2^- \rangle, \langle e_1^+, f_1^+ + f_1^-, f_2^+, f_2^- \rangle, \langle e_1^-, f_1^+ + f_1^-, f_2^+, f_2^- \rangle, \langle e_1^+, e_1^-, f_1^+ + f_1^-, f_2^+ \rangle, \langle e_1^+, e_1^-, f_1^+ + f_1^-, f_2^- \rangle, \langle e_1^+ + e_1^-, f_1^+ + f_1^-, f_2^+ + f_2^- \rangle \rangle \rangle, s_4 = 16;$$

$$5) \langle e_1^+, e_1^-, f_1^+, f_1^-, f_2^+ \rangle, \langle e_1^+, e_1^-, f_1^+, f_1^-, f_2^- \rangle, \langle e_1^+, f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^- \rangle, \langle e_1^-, f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^- \rangle, \langle e_1^+ + e_1^-, f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^- \rangle, \langle e_1^+, e_1^-, f_1^+ + f_1^-, f_2^+, f_2^- \rangle \rangle \rangle, s_5 = 6;$$

$$6) \langle e_1^+, e_1^-, f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^- \rangle, s_6 = 1.$$

Таким образом, $S = \sum_{i=0}^6 s_i = 1 + 6 + 16 + 24 + 16 + 6 + 1 = 70$, что согласуется с формулой (8).

Заметим, что небольшое увеличение чисел k_i^+ (k_i^-) ведет к быстрому росту числа s в формуле (8).

Так, например, если $k_1^+ = k_1^- = 1, k_2^+ = k_2^- = 2, k_3^+ = 3, k_3^- = 4$, то из (8) следует, что $s = 2800$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов, В.Л. Жорданова матрица // Мат. энцикл. М.: Сов. энцикл., 1979. Т.2. С. 424-425.
2. Федорчук, В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Изд-во МГУ, 1990. 328 с.
3. Большаков, Ю.И. О знаковых инвариантах одной из классификаций пар матриц // Математика, кибернетика, информатика: тр. междунар. науч. конф., посвящ. памяти проф. А.Ю. Левина. 2008. С. 62-67.
4. Bolshakov, Y. Unitary Equivalence in an Indefinite Scalar Product: An Analogue of Singular – Value Decomposition / Y. Bolshakov, B. Reichstein (Submitted by L. Rodman) // Linear algebra and its applications. 1995. 222: 155-226.
5. Большаков, Ю.И. Об одной комбинаторной задаче классификации подпространств ядра H -самосопряженной матрицы // Тр. XI междунар. Колмогоровских чтений: сб. ст. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2013. С.61-66.

УДК 517.5

А. И. Гилемьянов

Уфимский государственный авиационный технический
университет им. С. Орджоникидзе,
Россия, г. Уфа

К ВОПРОСУ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННЫМИ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ

Приводятся некоторые условия представления целых функций в обобщенные ряды экспонент, сходящиеся в различных топологиях.

Ключевые слова: обобщенные ряды экспонент, теоремы о сходимости.

A. I. Gilemyanov

*Ufa State Aviation Technical University,
Russia, Ufa*

**ON THE QUESTION OF REPRESENTING HOLOMORPIC
FUNCTIONS THROUGH GENERAL EXPONENT SERIES**

Some conditions of representing holomorphic functions as general exponent series that converge in different topologies are represented in this article.

Keywords: *general exponent series, theorems convergence.*

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – фиксированная целая функция порядка ρ^* и типа σ^* , все $a_n \neq 0 (n=0, 1, 2, \dots)$ и существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\rho^*}} \sqrt[n]{|a_n|} = (e \sigma^* \rho^*)^{\frac{1}{\rho^*}}. \quad (*)$$

Пусть, далее $L(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ – целая функция типа $\sigma, \sigma \neq 0, \infty$, при уточненном порядке $\rho(\varphi), \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \rho(\varphi) = \rho > \rho^*, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ – нули функции $L(\lambda)$. Допустим, что все они простые. Пусть $\rho_1(\varphi)$ и σ_1 – уточненный порядок и тип, сопряженные соответственно с уточненным порядком $\rho(\varphi)$ и типом σ , т.е. если $\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \rho_1(\varphi) = \rho_1$, то

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho^*}; (\sigma_1 \rho_1)^{\frac{1}{\rho^*}} \cdot (\sigma \rho)^{\frac{1}{\rho^*}} = (\sigma^* \rho^*)^{\frac{1}{\rho^*}}.$$

Обозначим через $[\rho_1(\varphi), \sigma_1]$ пространство целых функций, содержащее все функции уточненного порядка меньше $\rho_1(\varphi)$ и все функции уточненного порядка $\rho_1(\varphi)$, но тогда типа меньше σ_1 .

Для целой функции $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ положим

$$\omega_f(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k [D^{k-1}F(0) + \mu \cdot D^{k-2}F(0) + \dots + \mu^{k-1}D^{\circ}F(0)],$$

где $D^n F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{b_{k+n}}{a_{k+n}} z^k$ – обобщенные производные Гельфонда-Леонтьева.

Известно, что для любой функции $F(z) \in [\rho_1(\varphi), \sigma_1)$ $\omega_f(\mu)$ – целая функция.

Произвольной функции $F(z) \in [\rho_1(\varphi), \sigma_1)$ сопоставим обобщенный ряд экспонент:

$$F(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot f(\lambda_k z), \quad (1)$$

$$\text{Коэффициенты } A_k = \frac{\omega_f(\lambda_k)}{f(0)L'(\lambda_k)} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

По отношению к обобщенному ряду экспонент (1) возникают следующие естественные вопросы: когда этот ряд сходится в той или иной топологии и когда он сходится в той же топологии именно к функции $F(z)$. Эти вопросы впервые были поставлены и полностью решены при $f(z) = e^z$ А.Ф. Леонтьевым. В случае произвольной функции $f(z)$ эти вопросы рассматривались в работах А.Ф. Леонтьева и его учеников. Некоторые результаты, содержащиеся в этих работах, приведем ниже.

Теорема 1. Для того чтобы ряд (1) сходился во всей плоскости, какова бы ни была функция $F(z) \in [\rho_1(\varphi), \sigma_1)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k|^{\rho_1}} \ln |L'(\lambda_k)| = \infty. \quad (2)$$

Теорема 2. Для того чтобы произвольная целая функция $F(z) \in [\rho_1(\varphi), \sigma_1)$ во всей плоскости представлялась в виде суммы ряда (1), необходимо и достаточно выполнение относительно λ при любом конечном z равенства

$$f(\lambda z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L(x)}{(\lambda - \lambda_k)L'(\lambda_k)} \cdot f(\lambda_k z). \quad (3)$$

Отметим, что при выполнении условия (2) ряд (1) сходится во всей плоскости (равномерно на компактах), а при выполнении условия (3) сумма ряда (1) равна самой функции $F(z)$:

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k f(\lambda_k z).$$

Условие (3) можно заменить на равносильное условие, имеющее более простую форму. В работе [3] доказана следующая

Теорема 3. Для того чтобы произвольная целая функция $F(z) \in [\rho_1(\varphi), \sigma_1]$ представлялась во всей плоскости в виде суммы обобщенного ряда экспонент (1), необходимо и достаточно выполнение условий:

$$1) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k|^{\rho^*}} \cdot \ln |L'(\lambda_k)| = \infty;$$

2) существуют окружности $|\lambda| = q_k \rightarrow \infty$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|q_k|^{\rho^*}} \cdot \min_{|\lambda|=q_k} \ln |L'(\lambda)| = \infty.$$

Введем в классе целых функций $[\rho_1(\varphi), \sigma_1]$ более сильную топологию, определяемую системой норм

$$\|F\|_{q,\varepsilon} = \sup_{\varphi} \left\{ M_F(\varphi) \exp \left[-(q + \varepsilon)_{\varphi} \rho_1(\varphi) \right] \right\},$$

где $M_F(\varphi) = \max_{|z|=\varphi} |F(z)|$, и полученное топологическое пространство обозначим $E[\rho_1(\varphi), q]$. Рассмотрим теперь задачу о сходимости обобщенного ряда экспонент (1) к функции $F(z)$ в топологии $E[\rho_1(\varphi), q]$.

В случае, когда учитывается только порядок целой функции, такая задача была рассмотрена А.Ф. Леонтьевым и Ю.Н. Фроловым в работе [3], более общий случай в отмеченной выше форме рассмотрена в работе [4]. Приведем некоторые основные результаты из этих работ.

Теорема 4. Для того чтобы ряд (1) сходиллся в топологии $E[\rho_1(\varphi), q]$ для произвольной функции $F(z)$, принадлежащий классу $[\rho_1(\varphi), \sigma_1]$, необходимо достаточно выполнение условия

$$|L'(\lambda_k)| > \exp \left[(\beta - \varepsilon) \varphi_k^{\rho(\varphi_k)} \right], \quad (4)$$

где $\varphi_k = |\lambda_k|$, $k > k_0(\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$, а β – тип, сопряженный с q при уточнённом порядке $\rho(\varphi)$:

$$(q\rho_1)\frac{1}{\rho_1}(\beta\rho)\frac{1}{\rho} = (\sigma^*\rho^*)\frac{1}{\rho^*}.$$

Теорема 5. Для того чтобы ряд (1) сходил к произвольной функции $F(z) \in [\rho_1(\varphi), \sigma_1)$ в топологии $E[\rho_1(\varphi), q]$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$1) |L'(\lambda_k)| > \exp\left[(\beta - \varepsilon)\varphi_k^{\rho(\varphi_k)}\right], \quad r_k = |\lambda_k|; \quad (5)$$

2) существуют окружности $|\lambda| = q_k \rightarrow \infty$:

$$\ln|L(\lambda)| > (\beta - \varepsilon)q_k^{\rho(q_k)}, \quad k > k_0(\varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (6)$$

В некоторых задачах, связанных с представлениями целых функций обобщенными рядами экспонент, сходящимися в той или иной топологии, использование этих теорем достаточно сложно. Поэтому возникает необходимость получения новых условий, отличающихся по форме, но равносильных по содержанию тем, которые приведены нами выше.

Для простоты изложения приведем некоторые результаты, относящиеся к данному кругу вопросов, когда все целые функции имеют конечный тип при обычном порядке роста. В случае уточненного порядка эти результаты могут быть получены аналогично. Отметим, что в случае, когда учитывался порядок целых функций, подобные задачи рассмотрены в работе [5].

Теорема 6. Для того чтобы ряд (1) сходил в во всей плоскости к функции $F(z) \in [\rho_1, \sigma_1)$ в топологии $E[\rho_1, q]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ выполнялось условие

$$|L(\lambda)| > \rho(\lambda, \lambda_n) \cdot \exp\left[(\beta - \varepsilon)|\lambda|^\rho\right], \quad \lambda > r_0(\varepsilon), \quad (7)$$

где $\rho(\lambda, \lambda_n) = \min_n |\lambda - \lambda_n|$, а β – тип, сопряженный с q при порядке ρ :

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho^*}; \quad (\beta \cdot \rho)\frac{1}{\rho} (q \cdot \rho_1)\frac{1}{\rho_1} = (\sigma^* \rho^*)\frac{1}{\rho^*}.$$

Д о к а ж е м необходимость условия (7). Если ряд (1) сходит к функции $F(z)$ в топологии $E[\rho_1, q]$, то в силу теоремы 2 имеет место разложение (3), причем ряд в правой части сходит к функции $f(\lambda z)$ в то-

пологии $E[\rho_1, q]$. Тогда для функции $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n$ имеет место аналогичное разложение

$$\phi(\lambda z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k) L'(\lambda_k)} \cdot \phi(\lambda_k z).$$

Из этого равенства

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \frac{1}{\phi(\lambda_k)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(\lambda_k z)}{(\lambda - \lambda_k) L'(\lambda_k)}.$$

Так как $\phi(z)$ – целая функция порядка ρ^* и типа σ^* , а для $L(\lambda)$ имеет место условие (5), то имеем

$$|\phi(\lambda_k z)| < A_1(\varepsilon) \exp\left[(\sigma^* + \varepsilon)|\lambda_k|^{\rho^*} |z|^{\rho^*}\right], \quad k \geq 1,$$

$$\frac{1}{|L'(\lambda_k)|} < A_2(\varepsilon) \exp[-(\beta - \varepsilon)|\lambda_k|^\rho].$$

Пусть $\rho = \min_k |\lambda - \lambda_k|$, p – пока произвольное число из интервала $(0,1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{|L(\lambda)|} &< \frac{1}{\rho \cdot |\phi(\lambda z)|} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_3(\varepsilon) \exp\left[(\sigma^* + \varepsilon)|\lambda_k|^{\rho^*} \cdot |z|^{\rho^*} - (\beta - \varepsilon)|\lambda_k|^\rho\right] \leq \\ &\leq \frac{1}{\rho |\phi(\lambda z)|} \cdot \exp\left[\max_x \left\{ \sigma_1^* |z|^{\rho^*} \cdot x^\rho - \beta_1 (1-p)x^\rho \right\}\right] \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_3(\varepsilon) \cdot e^{-\beta_1 p |\lambda_k|^\rho}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\sigma_1^* = \sigma^* + \varepsilon, \beta_1 = \beta - \varepsilon.$$

Так как $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – нули целой функции $L(\lambda)$, то $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|^\rho} = \tau < \infty$, поэтому числовой ряд в соотношении (8) сходится.

Функция $\psi(x) = \exp\left[\sigma_1^* |z|^{\rho^*} x^\rho - \beta_1 (1-p)x^\rho\right]$ имеет наибольшее значение и

$\psi_{\max} = \exp\left[q_1 |z|^{\rho_1}\right]$, где

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho^*}; \quad (q \cdot \rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} \left(\beta_1 (1-p)^{\frac{1}{\rho_1}} \right) = (\sigma_1^* \rho^*)^{\frac{1}{\rho_1}}.$$

Поскольку $\sigma_1^* = \sigma^* + \varepsilon$, а ρ – можно взять сколь угодно малым, то $\beta_1(1 - \rho)$ близко к β , следовательно, q_1 близко к q , поэтому

$$\psi_{\max}(x) < \exp\left[(q + \varepsilon_1)x^{\rho_1}\right].$$

Тогда из неравенства (8) получим

$$\frac{1}{|L(\lambda)|} < \frac{A(\varepsilon_1)}{\rho \cdot |\phi(\lambda z)|} \exp\left[(q + \varepsilon_1)|z|^{\rho_1}\right],$$

отсюда

$$|L(\lambda)| > B(\varepsilon_1) \cdot \rho \cdot |\phi(\lambda z)| \exp\left[-(q + \varepsilon_1)|z|^{\rho_1}\right].$$

Пусть $\lambda = |\lambda|e^{i\alpha}$, положим $z = \text{Re}^{-i\alpha}$. Используя условие (*), для достаточно больших $|\lambda|$ будем иметь

$$|\phi(\lambda z)| > \exp\left[(\sigma^* - \varepsilon_1)|\lambda|^{\rho^*} \cdot R^{\rho^*}\right],$$

поэтому для $|L(\lambda)|$ получим оценку

$$|L(\lambda)| > B(\varepsilon_1) \cdot \rho \cdot \exp\left[(\sigma^* - \varepsilon_1)|\lambda|^{\rho^*} \cdot R^{\rho^*} - (q + \varepsilon_1)R^{\rho_1}\right].$$

Функция $f(x) = \sigma_1^* |\lambda|^{\rho^*} x^{\rho^*} - q_1 x^{\rho_1}$ имеет экстремальное значение при

$$\tilde{x} = \left(\frac{\sigma_1^* \rho^* |\lambda|^{\rho^*}}{q_1 \rho_1} \right)^{\frac{1}{\rho_1 - \rho^*}}.$$

При этом

$$f(\tilde{x}) = \left[\sigma_1^* \left(\frac{\sigma_1^* \rho^*}{q_1 \rho_1} \right)^{\frac{\rho^*}{\rho_1 - \rho^*}} - q_1 \left(\frac{\sigma_1^* \rho^*}{q_1 \rho_1} \right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho^*}} \right] \cdot |\lambda|^{\frac{\rho_1 \rho^*}{\rho_1 - \rho^*}}.$$

Если β_1 – тип, сопряженный с q_1 при порядке ρ , то $\frac{\rho_1 \rho^*}{\rho_1 - \rho^*} = \rho$, а выражение в квадратных скобках равно β_1 , причем $(\beta_1 \rho)^{\frac{1}{\rho}} (q_1 \rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} = (\sigma_1^* \rho^*)^{\frac{1}{\rho^*}}$. Заметим, что при сколь угодно малом ε_1 величина β_1 сколь угодно близка к β . Таким образом, при $|\lambda| > r_0(\varepsilon_1)$ получим

$$|L(\lambda)| > \rho(\lambda, \lambda_n) \cdot \exp\left[(\beta - \varepsilon_1)|\lambda|^\rho\right]$$

и необходимость условия (7) доказана. Аналогично доказывается и достаточность условия (7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев, А.Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
2. Леонтьев, А.Ф. Об условиях представимости целых функций некоторыми общими рядами / А.Ф. Леонтьев, Ю.Н. Фролов. Изв. АН СССР. Сер. Математическая. 1978. Т.42, №4. С. 763-772.
3. Гилемьянов, А.И. О представлении целых функций обобщенными рядами экспонент // Исследования по теории аппроксимации функций. Уфа: БФАН СССР. 1979. С. 53-70.
4. Гилемьянов, А.И. Об условиях представимости целых функций некоторыми общими рядами // Вопросы аппроксимации функций комплексного переменного. Уфа: БФАН СССР. 1980. С.16-26.
5. Иванов, М.С. Условия представления целых функций некоторыми общими рядами в различных топологиях // Вопросы аппроксимации функций комплексного переменного. Уфа: БФАН СССР. 1980. С.69-76.

УДК 517.588/589

Т. П. Гой

Прикарпатский национальный университет
им. Василия Стефаника,
Украина, г. Ивано-Франковск, e-mail: tarasgoy@yahoo.com

О ЦЕНТРАЛЬНЫХ ФАКТОРИАЛЬНЫХ СТЕПЕНЯХ И НЕКОТОРЫХ ИХ ПРИМЕНЕНИЯХ

Изучаются две неэлементарные функции действительной переменной, построенные с использованием центральных факториальных степеней. Установлены некоторые свойства этих функций, в частности, показана их связь с обобщенными гипергеометрическими функциями. Выведены обыкновенные дифференциальные уравнения, решениями которых являются новые функции.

Ключевые слова: факториальная степень, центральная факториальная степень, обобщенная гипергеометрическая функция, задача Коши.

T. P. Goy

Vasyl Stefanyk Subcarpathian National University,
Ukraine, Ivano-Frankivsk, e-mail: tarasgoy@yahoo.com

ON CENTRAL FACTORIAL POWERS AND THEIR APPLICATION

We consider two new real-valued functions defined by central factorial powers. e Some of their main properties are found. In particular, we established a relationship of these functions with the generalized hypergeometric functions. It is shown that constructed functions are solutions of ordinary differential equations derived in the paper.

Keywords: factorial power, central factorial power, generalized hypergeometric function, the Cauchy problem.

Вступление. Математические модели многих процессов и явлений приводят к задачам, точные решения которых получить классическими методами невозможно. Расширение "библиотеки" неэлементарных функций приводит к необходимости расширения круга задач, которые могут быть решены в замкнутом виде.

Классические трансцендентные функции e^x , $\sin x$, $\cos x$ задаются как степенные ряды

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

которые построены при помощи убывающих степеней (факториал является убывающей факториальной степенью). Заменяя в этих рядах убывающие факториальные степени соответствующими центральными факториальными степенями, в [2, 3] построены и изучены новые неэлементарные функции действительной переменной $\text{Expc}(x)$, $\text{Sinc}(x)$, $\text{Cosc}(x)$. В частности, в [2] показано, что функции $\text{Sinc}(x)$, $\text{Cosc}(x)$ являются решениями задач Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальными коэффициентами.

В этой статье изучаются две новые неэлементарные функции действительной переменной типа гиперболических функций

$$\text{Shc}(x) = \frac{\text{Expc}(x) - \text{Expc}(-x)}{2}, \quad \text{Chc}(x) = \frac{\text{Expc}(x) + \text{Expc}(-x)}{2}.$$

Эта статья идейно близка к предыдущим работам автора [4, 5].

Факториальные степени. Для произвольных чисел $x \in \mathbf{R}$ и $m \in \mathbf{N}$ факториальной степенью m с шагом $k \in \mathbf{R}$ называют выражение [6]

$$x^{m[k]} = x(x+k) \cdot (x+2k) \cdot \dots \cdot (x+(m-1)k).$$

Факториальную степень называют *возрастающей*, если $k > 0$, и *убывающей*, если $k < 0$. В случае $k = 0$ имеем обыкновенную степень, т.е. $x^{m[0]} = x^m$.

Возрастающую факториальную степень m с шагом 1 и убывающую факториальную степень m с шагом (-1) будем обозначать как $x^{\bar{m}}$ и $x^{\underline{m}}$ соответственно:

$$x^{\bar{m}} := x^{m[1]} = x(x+1) \cdot \dots \cdot (x+m-1), \quad x^{\underline{m}} := x^{m[-1]} = x(x-1) \cdot \dots \cdot (x-m+1).$$

Возрастающие и убывающие факториальные степени тесно связаны с факториальной функцией, а именно $n! = 1^{\bar{n}} = n^{\underline{n}}$.

Для произвольных чисел $x \in \mathbf{R}$ и $m \in \mathbf{N}$ *центральной факториальной степенью* m с шагом $k > 0$ называют выражение

$$x^{m[k]} = x \left(x + \frac{mk}{2} - k \right) \left(x + \frac{mk}{2} - 2k \right) \cdot \dots \cdot \left(x - \frac{mk}{2} + k \right).$$

Центральную факториальную степень m с шагом 1 будем обозначать как $x^{[m]}$, например,

$$x^{3[1]} := x^{3[1]} = (x-1/2)x(x+1/2), \quad x^{4[1]} := x^{4[1]} = (x-1)x^2(x+1).$$

Функции Ехрс(x), Sinc(x), Cosc(x). Обозначим через Ехрс(x), Sinc(x), Cosc(x) соответственно функции действительной переменной, определенные при помощи степенных рядов

$$\text{Ехрс}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{[n]}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2 \cdot 2} + \frac{x^3}{\frac{5}{2} \cdot 3 \cdot \frac{7}{2}} + \frac{x^4}{3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5} + \dots, \quad (1)$$

$$\text{Sinc}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{[2n+1]}} = x - \frac{x^3}{\frac{5}{2} \cdot 3 \cdot \frac{7}{2}} + \frac{x^5}{\frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot 5 \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{13}{2}} - \dots, \quad (2)$$

$$\text{Cosc}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{[2n]}} = 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 2} + \frac{x^4}{3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^6}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots \quad (3)$$

На рис. 1, 2 построены графики этих функций (на рис. 1 пунктиром изображена асимптота $y = -0,5$).

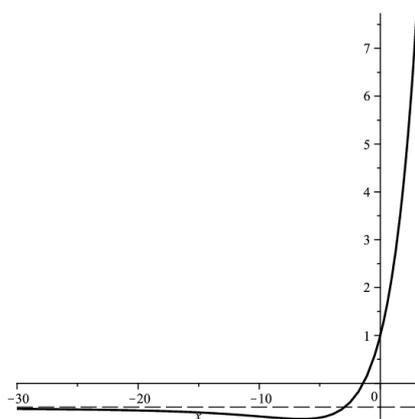


Рис. 1. График функции $y = \text{Exp}(x)$

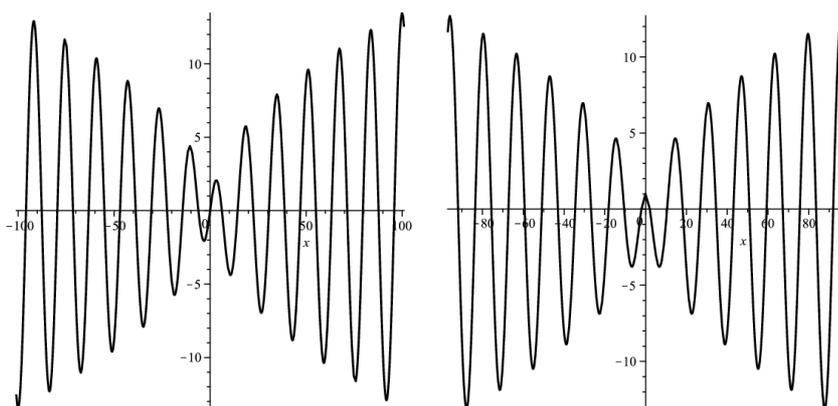


Рис. 2. Графики функции $y = \text{Sinc}(x)$ (слева) и $y = \text{Cosc}(x)$ (справа)

Функции $\text{Shc}(x)$, $\text{Chc}(x)$. Обозначим через $\text{Shc}(x)$, $\text{Chc}(x)$ функции действительной переменной, определенные с помощью формул

$$\text{Shc}(x) = \frac{\text{Exp}(x) - \text{Exp}(-x)}{2},$$

$$\text{Chc}(x) = \frac{\text{Exp}(x) + \text{Exp}(-x)}{2}.$$

Легко показать, что

$$\text{Shc}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^{[2n+1]}} = x + \frac{x^3}{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2}} + \frac{x^5}{\frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{13}{2}} + \dots, \quad (4)$$

$$\text{Chc}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)^{[2n]}} = 1 + \frac{x^2}{2 \cdot 2} + \frac{x^4}{3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^6}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots, \quad (5)$$

причем оба ряда в (4), (5) сходятся для всех действительных x .

Графики функций $y = \text{Shc}(x)$ и $y = \text{Chc}(x)$ построены на рис. 3.

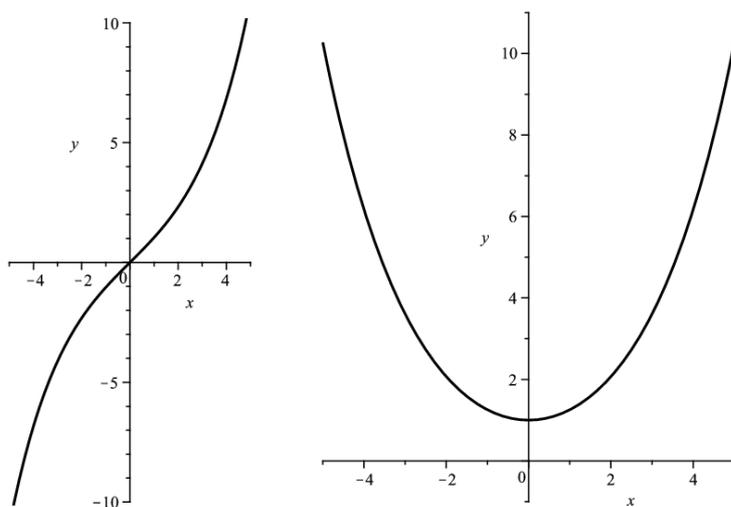


Рис. 3. Графики функций $y = \text{Shc}(x)$ (слева) и $y = \text{Chc}(x)$ (справа)

Пусть ${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; z)$ – обобщенная гипергеометрическая функция, т.е. функция, определенная как сумма обобщенного гипергеометрического ряда [1]

$${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1^n}{b_1^n b_2^n} \cdot \frac{z^n}{n!}. \quad (6)$$

Теорема 1. Для всех $x \in (-\infty; \infty)$ выполняются тождества

$$\text{Shc}(x) = x \cdot {}_1F_2\left(1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}; \frac{x^2}{27}\right), \quad \text{Chc}(x) = 1 + \frac{x^2}{4} \cdot {}_1F_2\left(1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^2}{27}\right). \quad (7)$$

Доказательство теоремы 1 непосредственно следует из формул (4) – (6).

Теорема 2. *Функции $\text{Shc}(x)$, $\text{Chc}(x)$ являются решениями соответственно таких задач Коши для линейных дифференциальных уравнений третьего порядка:*

$$27x^3y''' + 4x(6 - x^2)y' - 4(x^2 + 6)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0;$$

$$27x^3y''' - 27x^2y'' + x(51 - 4x^2)y' - 48y = -48, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0,5.$$

Доказательство теоремы 2 основывается на том, что обобщенная гипергеометрическая функция ${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; z)$, через которую, в соответствии с (7), выражаются функции $\text{Shc}(x)$, $\text{Chc}(x)$, является решением обыкновенного дифференциального уравнения [1]

$$(\delta(\delta + b_1 - 1)(\delta + b_2 - 1) - z(\delta + a_1))w(z) = 0,$$

где δ – дифференциальный оператор $\delta w = zw'(z)$.

Учитывая формулы (1) – (5), устанавливаем следующие соотношения между рассматриваемыми функциями:

$$\text{Chc}(ix) = \text{Cosc}(x), \quad \text{Shc}(ix) = i \text{Sinc}(x),$$

$$\text{Chc}^2(x) - \text{Shc}^2(x) = \text{Exp}(ix) \cdot \text{Exp}(-ix).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1973. 294 с.
2. Гой, Т.П. Про диференціальні рівняння функцій, породжених центральними факторіальними степенями // КММК – 2013: тез. Крымской междунар. мат. конф. Т. 2. Симферополь: Изд-во КНЦ НАНУ, 2013. С. 4–5.
3. Гой, Т.П. Функції, породжені центральними факторіальними степенями // Теоретичні і прикладні проблеми технічних і математичних наук : матер. Міжнар. наук.-практ. конф. Киев: Центр Науково-Практичних Студій, 2014. С. 8–13.
4. Гой, Т.П. Нові функції, породжені зростаючими факторіалами, та їх властивості / Т. П. Гой, Р. А. Заторський // Буковинський мат. журн. 2013. Т.1, № 1-2. С. 28-33.
5. Goy, T.P. New integral functions generated by rising factorial powers // Carpathian Mathematical Publications. 2013. 5 (2). P. 217-224.
6. Jordan, C. Calculus of Finite Differences. New York: Chelsea Publishing, 1939. 652 p.

УДК 517.988.52

Н. М. Гулевич

Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова,
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: gulevich.nikolay@gmail.com

О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ МАРРЕРО ПО МЕРЕ НЕВЫПУКЛОСТИ

*Доказываются некоторые результаты Марреро по мере невыпуклости
Эйзенфельда-Лакшмикантана.*

Ключевые слова: мера невыпуклости, выпуклая оболочка множества, слабая компактность, хаусдорфово расстояние.

N. M. Gulevich

*Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Russia, Saint Petersburg, e-mail: gulevich.nikolay@gmail.com*

ON SOME MARRERO RESULTS FOR MEASURE OF NONCONVEXITY

Some Marrero results on the Eisenfeld-Lakshmikantham measure of nonconvexity are proved.

Keywords: measure of nonconvexity, convex hull of set, weak compactness, the Hausdorff distance.

В теории неподвижных точек для расширения теорем с выпуклых областей на невыпуклые применяют меры невыпуклости, особенно часто применяют меру невыпуклости Эйзенфельда-Лакшмикантана, под которой понимается хаусдорфово расстояние между множеством и его выпуклой оболочкой.

Данная статья является ответом на работу Изабель Марреро [2], в которой приводятся четыре нижеуказанных теоремы без доказательства. Работа [2] появилась в 2012 году, автор нашел ее в сети интернет в 2013 году и сразу же дал свои доказательства этих теорем на основе методов статьи [1].

Теорема 1. *В рефлексивном банаховом пространстве убывающая последовательность непустых ограниченных замкнутых подмножеств, мера невыпуклости которых стремится к нулю, имеет непустое пересечение. Причем операции пересечения и взятие выпуклой оболочки множеств коммутируют.*

Доказательство теоремы 1 основано на слабой компактности ограниченных выпуклых замкнутых подмножеств рефлексивного банахова пространства; свойствах линейных функционалов; свойствах меры невыпуклости и минимизирующих расстояние последовательностей.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ - банахово пространство. Мерой невыпуклости ограниченного множества $M \subset X$ называется величина

$\lambda(M) = \sup_{x \in coM} \inf_{y \in M} \|x - y\|$, то есть $\lambda(M) = H(M, \overline{co}M)$ - хаусдорфово расстояние между множеством M и его выпуклой замкнутой оболочкой $\overline{co}M$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X - рефлексивное банахово пространство, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ - убывающая последовательность непустых ограниченных замкнутых подмножеств пространства X , меры невыпуклости которых стремятся к нулю: $\lambda(A_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Надо доказать, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ - непустое выпуклое и замкнутое множество, причем $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co}A_n$.

Для каждого n выберем и зафиксируем элемент $x_n \in A_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Так как $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограниченная последовательность элементов рефлексивного пространства X , то по теореме Эберлейна-Шмульяна найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, слабо сходящаяся к некоторому элементу $y \in X$ (это следствие того, что $\overline{co}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — слабый компакт в X по теореме Крейна-Шмульяна). Пусть $y_k = x_{n_k}$ и $B_k = A_{n_k}$. В силу включений $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ следует, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. Покажем, что $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \neq \emptyset$. Имеем $y \in \overline{co}B_k$ для любого k , так как $\{y_k, y_{k+1}, \dots\} \subset B_k$ и, следовательно, $\{y_k, y_{k+1}, \dots\}$ лежит в слабом компакте $\overline{co}B_k$. Если $y \notin B_i$ для некоторого i , то $y \in X \setminus B_i$, где $X \setminus B_i$ - открытое множество, поэтому y входит в $X \setminus B_i$ вместе с некоторой окрестностью. Отсюда получаем, что $\delta = \inf\{\|y - x\| : x \in B_i\} > 0$. Тогда $\inf\{\|y - x\| : x \in B_k\} \geq \delta$ для каждого $k \geq i$. Значит, $\lambda(B_k) \geq \delta > 0$ для каждого $k \geq i$. Это противоречит тому, что $\lambda(B_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$, следовательно, множество $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ непусто. Докажем теперь, что множество $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ выпукло. Если A - одноточечное множество, то все доказано. Пусть A содержит, по крайней мере, две точки. Возьмем произвольные точки a и b из A , причем $a \neq b$. Допустим, что отрезок $[a, b] \not\subset A$. Тогда найдется j такое, что $[a, b] \not\subset A_j$. Отсюда $[a, b] \not\subset A_n$ для любого $n \geq j$. Поэтому существует элемент $c \in [a, b]$ и число $r > 0$ такие, что $A_n \cap V_{(c,r)} = \emptyset$ для любого $n \geq j$, где $V_{(c,r)}$ - открытый шар с центром в точке c и радиу-

са r . Но $a, b \in A_n$ для любого n . Следовательно, $c \in \overline{\text{co}}A_n$ и

$\lambda(A_n) \geq \inf_{x \in A_n} \|c - x\| \geq r > 0$ для любого $n \geq j$, что противоречит условию

$\lambda(A_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Значит множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ выпукло и замкнуто.

Осталось доказать, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}A_n$. Включение

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}A_n$ верно, поскольку $A_n \subset \overline{\text{co}}A_n$. Докажем обратное

включение: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}A_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Зафиксируем произвольный элемент $y_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}A_n$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$x_n \in A_n$ и $\|y_0 - x_n\| \leq \inf_{x \in A_n} \|y_0 - x\| + \frac{1}{n}$. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, поэтому некоторая ее подпоследовательность $z_k = x_{n_k}$ слабо сходится к элементу $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. По теореме Хана-Банаха найдется линейный непрерывный функционал φ с нормой, равной 1, такой, что

$$\|y_0 - x_0\| = \varphi(y_0 - x_0) = \varphi(y_0 - z_k) + \varphi(z_k - x_0) \leq$$

$$\|y_0 - z_k\| + \varphi(z_k - x_0) \leq \inf_{x \in A_{n_k}} \|y_0 - x\| + \frac{1}{n_k} + \varphi(z_k - x_0) \leq$$

$$\leq \lambda(A_{n_k}) + \frac{1}{n_k} + \varphi(z_k - x_0) \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$ (здесь учтено, что $y_0 \in \overline{\text{co}}A_{n_k}$ для любого k). Следовательно, $y_0 = x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, и обратное включение, а с ним теорема 1, доказаны.

Теорема 2. Пусть X – произвольное банахово пространство, S – слабый компакт в X , $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ – убывающая последовательность непустых замкнутых подмножеств S таких, что $\lambda(A_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ непусто и выпукло, причем $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}A_n$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 с той лишь разницей, что условие рефлексивности пространства заменяется на условие слабой компактности множество $\overline{\text{co}}S$.

Применяя теорему Шмульяна, характеризующую рефлексивные банаховы пространства, и слабо компактные подмножества произвольных банаховых пространств, получаем теоремы 3 и 4, обратные к теоремам 1 и 2.

Теорема 3. Пусть X – банахово пространство и любая убывающая последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ непустых ограниченных замкнутых подмножеств X с $\lambda(A_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ имеет непустое пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда X – рефлексивное банахово пространство.

Теорема 4. Пусть X – произвольное банахово пространство, C – непустое ограниченное слабо замкнутое подмножество X , и любая убывающая последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ непустых замкнутых подмножеств \overline{C} , с $\lambda(A_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, имеет непустое пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда C – слабый компакт.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гулевич, Н.М. Мера невыпуклости и константа Юнга // Записки науч. семинаров ПОМИ РАН. 1993. Т.208. С.174-181.
2. Marrero, I. Weak compactness and the Eisenfeld-Lakshmikantham measure of non-convexity // Fixed Point Theory and Appl. 2012. 2012:5. P. 1-7.

УДК 519.872, 519.217.1

Г. А. Зверкина

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
Россия, г. Москва, e-mail: zverkina@gmail.com

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СТАЦИОНАРНОГО ВРЕМЕНИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Определены распределение и некоторые характеристики стационарного распределения времени восстановления процесса восстановления. Доказан «фольклорный» факт: стационарное время перескока распределено равномерно на стационарном периоде восстановления.

Ключевые слова: теория восстановления, стационарный процесс, время восстановления, время перескока.

G. A. Zverkina

Moscow State University of Railway Engineering (MIIT)
Russia, Moscow, e-mail: zverkina@gmail.com

ABOUT THE DISTRIBUTION OF THE STATIONARY RENEWAL INTERVAL

The distribution and some characteristics of stationary renewal time of the renewal process are defined. The 'folklore' fact: «the stationary overjump is uniformly distributed on the stationary renewal period» is proved.

Keywords: renewal theory, stationary process, renewal intervals, overjump.

Как известно, процесс восстановления – это последовательность точек (моментов восстановления) t_0, t_1, t_2, \dots таких, что $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ – независимые одинаково распределённые случайные величины. Обычно предполагается, что $t_0=0$, т.е. начало наблюдения за процессом восстановления совпадает с началом первого периода восстановления. Пусть $F(x) = \mathbf{P}\{\tau_i \leq x\} = \mathbf{P}\{\tau \leq x\}$, $\mathbf{E}\tau = \mu$. Для исследования поведения процесса восстановления применяется функция восстановления $H(t)$ – среднее число восстановлений до момента t , и её дифференциальная характеристика $h(t) = H'(t)$; $h(t)$ – это интенсивность восстановления, т.е. $\mathbf{P}\{\text{на промежутке } (t, t + \Delta) \text{ произошло восстановление}\} = h(t)\Delta + o(\Delta)$.

Известна

Теорема (Смита или Узловая теорема восстановления): *если $Q(x)$ – монотонно невозрастающая интегрируемая на $(0, \infty)$ функция, то*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t Q(t-s) dH(s) = \mu^{-1} \int_0^{\infty} Q(s) d(s).$$

Следуя [1], обозначим $\gamma(t)$ – время с момента t до следующего момента восстановления, а $\gamma^*(t)$ – время, прошедшее от последнего восстановления, произошедшего ранее t , т.е. если $t_n \leq t < t_{n+1}$, то $\gamma(t) = t_{n+1} - t$, $\gamma^*(t) = t - t_n$. $\gamma(t)$ – это величина перескока (процесса восстановления через уровень t), а γ^* – величина недоскока (до уровня t). Если сл.в. τ имеет

конечное среднее $\mu := \int_0^{\infty} x dF(x)$ и τ нерешётчата, то при $t \rightarrow \infty$ процесс

восстановления переходит в *стационарный режим*, имеет *стационарное распределение*, и соответственно распределения сл.в. $\gamma(t)$ и $\gamma^*(t)$ сходятся к некоторому предельному распределению; сл.в. с этими предельными распределениями называются стационарными перескоком и недоскоком, обозначим их γ и γ^* . Известно, что (см. [1] и [2]) для

$$F_\gamma(x, t) = \mathbf{P}\{\gamma(t) \leq x\} \text{ и } F_{\gamma^*}(x, t) = \mathbf{P}\{\gamma^*(t) \leq x\}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_\gamma(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} F_{\gamma^*}(x, t) = G(x) = \mu^{-1} \int_0^x (1 - F(s)) ds \quad (1)$$

и, соответственно, плотность предельного распределения

$$g(x) = G'(x) = \mu^{-1} (1 - F(x)). \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что сл.в. γ и γ^* имеют на один момент меньше, чем сл.в. τ .

Назовём $\tau' = \gamma + \gamma^*$ – стационарное время восстановления. В [3] утверждается, что стационарное распределение перескока γ обладает следующим свойством: при известной величине τ' времени восстановления стационарного процесса восстановления время перескока распределено равномерно на интервале $(0, \tau')$, иначе говоря, сл.в. $\frac{\gamma}{\gamma + \gamma^*} = \frac{\gamma}{\tau'}$ равномерно распределена на $(0;1)$. В [3] не доказывается этого утверждения, автор ограничился некими эмпирическими соображениями, не сославшись на источник, где бы это факт доказывался; подобные же эмпирические соображения имеются и в [2].

Цель настоящей работы – доказать сформулированное, но не доказанное в [2] и [3] утверждение, а именно: если существует стационарное распределение процесса восстановления, то сл.в. (γ/τ') распределена равномерно на $(0;1)$.

Теорема 1. Пусть $F(x)$ непрерывна и п.в. имеет плотность $f(x) = F'(x)$, $\mathbf{E}\tau = \int_0^{\infty} x dF(x) = \mu < \infty$. Тогда сл.в. $\frac{\gamma}{\gamma + \gamma^*}$ имеет равномерное распределение на интервале $(0;1)$.

Доказательство. Оценим вероятность события $A(x, y, t) = \{\gamma(t) > x, \gamma^*(t) > y\}$. Это событие может произойти, если последний перед моментом t момент восстановления произошёл ранее чем $(t - x)$ (обозначим этот момент восстановления u), и начавшийся в момент u период восстановления закончился после времени $(t+y)$; либо же первый момент восстановления исследуемого процесса восстановления случился не ранее времени $(t+y)$. Иначе говоря, при $t > x$

$$\mathbf{P}\{\gamma(t) > x, \gamma^*(t) > y\} = \int_0^{t-x} (1 - F(t+y-u)) dH(u) + (1 - F(t+y)),$$

переходя к пределу при $t \rightarrow +\infty$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\gamma > x, \gamma^* > y\} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\gamma(t) > x, \gamma^*(t) > y\} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^{t-x} (1 - F(t+y-u)) dH(u) + (1 - F(t+y)) \right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s (1 - F(s+x+y-u)) dH(u). \end{aligned}$$

Положив $Q(s) = (1 - F(s+x+y))$, применяем теорему Смита:

$$\mathbf{P}\{\gamma > x, \gamma^* > y\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s Q(s-u) dH(u) = \mu^{-1} \int_0^\infty Q(t) dt = \mu^{-1} \int_{x+y}^\infty (1-F(t)) dt,$$

поэтому плотность распределения пары сл.в. (γ, γ^*) равна

$$p_{\gamma, \gamma^*}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mu^{-1} \int_{x+y}^\infty (1-F(t)) dt = \mu^{-1} f(x+y).$$

Далее, совместная плотность $p_{\frac{\gamma}{\gamma+\gamma^*}, \gamma}(w, x)$ распределение пары сл.в.

$\left(\frac{\gamma}{\gamma+\gamma^*}, \gamma\right)$ вычисляется стандартным образом, используя формулы пере-
хода и соответствующий якобиан для $w \in (0;1)$:

$$w = \frac{x}{x+y}, \quad \begin{cases} x = x, \\ y = \frac{x(1-w)}{w} \end{cases}, \quad \mathcal{J} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{x}{w^2} \end{vmatrix} = -\frac{x}{w^2}; \quad |\mathcal{J}| = \frac{x}{w^2};$$

$$p_{\frac{\gamma}{\gamma+\gamma^*}, \gamma}(w, x) = p_{\gamma, \gamma^*}\left(x, \frac{x(1-w)}{w}\right) \times \frac{x}{w^2} = \frac{x}{\mu w^2} f\left(x + \frac{x(1-w)}{w}\right) = \frac{x}{\mu w^2} f\left(\frac{x}{w}\right).$$

Поэтому
$$p_{\frac{\gamma}{\gamma+\gamma^*}, \gamma}(w) = \frac{1}{\mu w^2} \int_0^\infty x f\left(\frac{x}{w}\right) dx = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty s f(s) ds = 1, \quad \text{т.е.}$$

$\frac{\gamma}{\gamma+\gamma^*} = \frac{\gamma}{\tau}$ распределена равномерно на $(0;1)$. Теорема доказана¹.

Теорема 2. Пусть $F(x)$ – произвольная нерешётчатая функция распределения, (здесь мы не требуем непрерывности и существования плотности распределения), и $\mathbf{E}\tau = \mu < \infty$. Тогда сл.в. γ (и γ^*) имеет такое же распределение, как сл.в. $\tau'\zeta$, где τ' – время восстановления стационарного процесса восстановления, а ζ распределена равномерно на $(0;1)$.

Доказательство. Разобьём доказательство на несколько этапов.

1. Сначала заметим, что распределение сл.в. τ' отлично от распределения сл.в. τ . Например, если τ имеет экспоненциальное распределение, то в соответствии с (2) и γ имеет то же самое распределение, но

$\gamma \leq \tau'$, значит, $\tau' \neq \tau$ и в этом случае $\mathbf{P}\{\tau' \leq x\} \leq \mathbf{P}\{\tau \leq x\}$. Вообще говоря, для произвольного распределения сл.в. τ можно утверждать, что сл.в. τ' в некотором смысле больше сл.в. τ . Это объясняется тем, что если при дос-

¹ Это доказательство было предложено В.В. Козловым.

точно больших t точка t попала на некоторый период восстановления стационарной (или близкой к стационарной) версии процесса восстановления, то, скорее всего, этот период восстановления несколько больше других периодов восстановления, на которые эта точка t не попала (вероятность накрытия фиксированного t случайным интервалом больше для интервалов большей длины).

Пусть $G_y(x) = \mathbf{P}\{\gamma \leq x | \tau' = y\}$, где τ' – тот самый стационарный период восстановления, на котором мы фиксируем перескок. Так как $\gamma + \gamma^* = y$, и сл.в. γ и γ^* одинаково распределены, $G_y(x) = \mathbf{P}\{\gamma \leq x | \tau' = y\} = \mathbf{P}\{\gamma^* > \tau' - x | \tau' = y\} = 1 - G_y(y - x)$, и поскольку вследствие (2) п.в. существует плотность $g_y(x) = G_y'(x)$, то $g_y(x) = g_y(y - x)$, при этом $g_y(x) \neq 0$ при $x \in (0, y)$.

Итак, при каждом фиксированном $\tau' = y$ распределение $G_y(x)$ симметрично относительно точки $(y/2)$. Далее, сл.в. $\zeta = (\gamma/\tau')$ и $\zeta^* = (\gamma^*/\tau')$ имеют одинаковые ф.р. $Z(x) = \mathbf{P}\{\zeta \leq x\} = \mathbf{P}\{\zeta^* \leq x\}$ на $(0;1)$ (так как сл.в. γ и γ^* распределены одинаково). При этом $\forall y$ $Z_y(x) = \mathbf{P}\{\zeta \leq x | \tau' = y\} = \mathbf{P}\{\zeta^* > 1 - x | \tau' = y\} = 1 - Z_y(1 - y)$ и поэтому распределение сл.в. ζ и ζ^* симметрично относительно точки $1/2$. Вообще говоря, сл.в. ζ и ζ^* могут быть зависимы от сл.в. τ' . Но наша задача – найти такую *независимую* от τ' сл.в. ζ , чтобы $\zeta \tau' \stackrel{D}{=} \gamma$.

Сначала покажем, что такая сл.в. ζ для дискретных распределений τ имеет равномерное на $(0;1)$ распределение.

2. Пусть время восстановления τ – дискретная сл.в., принимающая два значения: $\mathbf{P}\{\tau = a\} = p > 0$, $\mathbf{P}\{\tau = b\} = q = 1 - p > 0$, $0 < a < b$, и это – нерешётчатое распределение: $(a/b) \notin \mathbb{Q}$. В этом случае (см. [1] и [2]) существует стационарное распределение процесса восстановления. Причём в стационарном режиме, как и в нестационарном, время восстановления дискретно: $\mathbf{P}\{\tau' = a\} = p^*$, $\mathbf{P}\{\tau' = b\} = q^* = 1 - p^*$. (Далее мы увидим, что $p^* < p$, т.е. τ' “в некотором смысле” больше τ ; интуитивно это связано с тем, что произвольный момент времени t с большей вероятностью попадает на *большой* период восстановления.) Далее, если при больших $t \rightarrow \infty$ момент t попадает на некоторый дискретный период восстановления, то от нестационарного распределения периода восстановления его отличает только вероятность попадания на *большой* или *меньший* дискретный промежуток (p^* и q^*).

Далее, величины перескока и недоскока γ и γ^* в соответствии с (2) имеют следующую кусочно-постоянную плотность:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin (0, b); \\ \mu^{-1}, & \text{если } x \in (0, a); \\ (1-p)\mu^{-1} = q\mu^{-1}, & \text{если } x \in (a, b), \end{cases} \quad \text{здесь } \mu = E\tau = ap + bq. \quad (3)$$

Как уже говорилось, мы ищем такую *независимую* от τ' сл.в. ζ (τ' принимает значения a и b с вероятностями p^* и q^*), что сл.в. $\zeta\tau'$ имеет плотность распределения $g(x)$. Поскольку отношения γ/τ' и γ^*/τ' имеют симметричное относительно точки $1/2$ распределение на $(0;1)$, и $\gamma \stackrel{D}{=} \zeta\tau'$, то и ζ не может быть распределена иначе, чем симметрично на $(0;1)$. Иначе говоря, если $R(x)$ – ф.р. сл.в. ζ , то $R(x) = 1 - R(1-x)$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta\tau' \leq x\} &= \mathbf{P}\{\gamma \leq x\} = G(x) = \mathbf{P}\{\zeta\tau' \leq x \mid \tau' = a\}p^* + \mathbf{P}\{\zeta\tau' \leq x \mid \tau' = b\}q^* = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin (0, b); \\ q^*R(xb^{-1}), & \text{если } x \in (a, b); \\ p^*R(xa^{-1}) + q^*R(xb^{-1}), & \text{если } x \in (0, a). \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку $G(x)$ имеет плотность, $R(x)$ также имеет плотность. Далее, если плотность распределения сл.в. ζ есть $\rho(x) = R'(x)$, то плотность распределения $g(x)$ сл.в. $\zeta\tau' = \gamma$ такова (см. (2)):

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin (0, b); \\ q^*b^{-1}\rho(xb^{-1}) = q\mu^{-1} & \text{при } x \in (a, b); \\ p^*a^{-1}\rho(xa^{-1}) + q^*b^{-1}\rho(xb^{-1}) = \mu^{-1} & \text{при } x \in (0, a). \end{cases} \quad (4)$$

Поскольку $g(x) = \text{const}$ на (a, b) , из (4) следует, что при $t \in (a/b; 1)$ функция $\rho(t) = \text{const}$, и по причине симметричности функции $\rho(t)$ ($\rho(x) = \rho(1-x)$) она также постоянна и равна тому же значению и при $t \in (0; 1-a/b)$. Отсюда входящее в третью формулу (4) слагаемое $p^*a^{-1}\rho(xa^{-1})$ постоянно на $(a^2/b; a)$; соответственно, на этом же отрезке постоянна и $q^*b^{-1}\rho(xb^{-1})$, т.е. $\rho(t)$ постоянна на $((a/b)^2; a/b)$ и на $(1-a/b; 1-(a/b)^2)$. Повторяя эти рассуждения, получаем две *пересекаю-*

щихся последовательности интервалов $\{I_n\} = \left\{ \left((a/b)^{n+1}; (a/b)^n \right) \right\}$ и $\{J_n\} = \left\{ \left(1 - (a/b)^n; 1 - (a/b)^{n+1} \right) \right\}$, на каждом из которых функция $\rho(t)$ постоянна. Пусть $k = \min(n : (a/b)^n < 1/2)$. Поскольку $\bigcup_{j=1}^k (I_j \cup J_j)$ есть $(0;1)$ за исключением, быть может, конечного числа точек, и интервалы одной последовательности пересекаются с интервалами другой, можно сделать вывод, что $\rho(t)$ – ступенчатая функция с не более чем конечным количеством скачков. Пусть эти скачки происходят в точках $0 < y_1 < y_2 < \dots < y_s < 1$. Тогда входящие в (4) функции имеют скачки в точках $ay_1, ay_2, \dots, ay_s, by_1, by_2, \dots, by_s$, и функция $g(x)$ обязана иметь разрыв в точке ay_1 – минимуме из точек разрыва входящих в (4) функций, что противоречит (3), т.к. $0 < ay_1 < a$. Итак, $\rho(x) = \text{const}$ на $(0;1)$, и поскольку $\rho(x)$ – плотность распределения, то $\rho(x) \equiv 1$, т.е. ζ распределена равномерно на $(0;1)$. Далее, из (4) и $\rho(x) \equiv 1$ следует $\mathbf{P}\{\tau' = a\} = p^* = a p \mu^{-1}$, $\mathbf{P}\{\tau' = b\} = q^* = b q \mu^{-1}$, $p^* < p$, $q^* > q$, и

$$\mathbf{P}\{\tau \leq x\} \geq \mathbf{P}\{\tau' \leq x\}; \quad \mathbf{E}\tau' = \frac{a^2 p + b^2 q}{ap + bq} = \frac{\mathbf{E}(\tau)^2}{\mathbf{E}\tau} > \mathbf{E}\tau = ap + bq.$$

3. Теперь рассмотрим дискретное нерешётчатое распределение времени восстановления τ_N с конечным числом состояний, равным N : $\mathbf{P}\{\tau_N = X_i\} = p_i$, $0 < X_1 < X_2 < \dots < X_N$, $p_i > 0$, $i = 1, \dots, N$, $\sum_i p_i = 1$, $\mathbf{E}\tau_N = \sum_i p_i X_i = \mu$. Нерешётчатость распределения τ_N означает, что набор (X_1, X_2, \dots, X_N) несоизмерим, т.е. $X_i / X_j \notin \mathbb{Q}$ при некоторых i, j . В этом случае существует стационарное (естественно, тоже дискретное) распределение времени восстановления, принимающее значения X_1, X_2, \dots, X_N с неизвестными нам вероятностями $p_i^* \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, а плотность распределения стационарного перескока γ_N имеет вид

$$g_N(x) = \mu^{-1} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}(x; X_{j-1}, X_j) \left(1 - \sum_{i=0}^{j-1} p_i \right), \quad (5)$$

где $\mathbf{1}(x; a, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (a; b), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

(Для удобства считаем $X_0 = p_0 = 0$). Опять мы хотим найти независимую от τ' сл.в. ζ , такую, что $\zeta \tau' \stackrel{D}{=} \gamma_N$; понятно, что опять ζ симметрично распределена на $(0;1)$; а поскольку плотность ф.р. γ_N непрерывна за исключением конечного числа точек, то п.в. существует плотность $\rho(x)$ сл.в. ζ . Тогда

$$g_N(x) = \sum_{j=1}^N \mathbf{1}(x; 0, X_j) p_j^* X_j^{-1} \rho(x / X_j). \quad (6)$$

Поскольку на интервале $(X_{N-1}; X_N)$ выполнено $g_N(x) = p_N^* X_N^{-1} \rho(x / X_N) = \text{const}$, получаем, что $\rho(t) = \text{const}$ при $t \in ((X_{N-1} / X_N); 1)$. На интервале $(X_{N-2}; X_{N-1})$ $g_N(x) = p_N^* X_N^{-1} \rho(x / X_N) + p_{N-1}^* X_{N-1}^{-1} \rho(x / X_{N-1}) = \text{const}$, и поэтому $\rho(x / X_{N-1}) = \text{const}$ при $x / X_{N-1} \in ((X_{N-1} / X_N); 1)$, т.е. при $x \in ((X_{N-1}^2 / X_N), X_{N-1})$ постоянными являются и $\rho(x / X_{N-1})$, и $\rho(x / X_N)$.

Следовательно, $\rho(t) = \text{const}$ при $t \in ((X_{N-1} / X_N)^2, (X_{N-1} / X_N))$. Положим $k_1 = \min\left(n : \left(X_{N-1} / X_N\right)^n < \max\left((X_{N-2} / X_N), (X_N / 2)\right)\right)$. Аналогично конструкции п. 2 строим последовательность интервалов $\{I_k^1\} = \left\{\left((X_{N-1} / X_N)^k; (X_{N-1} / X_N)^{k-1}\right)\right\}$ до тех пор, пока $k \leq k_1$. Если $(X_{N-1} / X_N)^{k_1} < X_N / 2$, то объединение интервалов I_k^1 и симметричных им $J_k^1 = \left(1 - (X_{N-1} / X_N)^{k-1}; 1 - (X_{N-1} / X_N)^k\right)$ покрывает интервал $(0;1)$ за исключением, быть может, конечного числа точек. На каждом из интервалов I_k и J_k функция $\rho(t)$ постоянна, и, повторяя рассуждения п. 2, получаем, что $\rho(t) \equiv 1$.

Если же $X_N / 2 < (X_{N-1} / X_N)^{k_1} < X_{N-2} / X_N$, то, учитывая, что при $t \in ((X_{N-1} / X_N), 1)$ $\rho(t) = \text{const}$, получаем, что $\rho(x / X_{N-2}) = \text{const}$ при $x \in ((X_{N-2} X_{N-1} / X_N); X_{N-2})$. Отсюда, подставляя значения переменной из этого интервала в функцию $\rho(x / X_N)$, получаем, что $\rho(t) = \text{const}$ при $t \in (X_{N-2} X_{N-1} X_N^{-2}; X_{N-2} X_N^{-1})$. Теперь строим последовательность интерва-

лов $\{I_k^2\} = \left\{ \left((X_{N-2}/X_N)^k \times (X_{N-1}/X_N); (X_{N-2}/X_N)^k \right) \right\}$ до номера

$k_2 = \min \left(n : \frac{X_{N-2}^k X_{N-1}}{X_N^k X_N} < \max (X_{N-3}/X_N, X_N/2) \right)$. И опять, в зависимости

от того, меньше или больше левый конец последнего интервала величины $X_N/2$, мы либо завершаем доказательство, используя постоянство

функции $\rho(t)$ на интервалах $I_k^1 (k=1, \dots, k_1)$, $I_k^2 (k=1, \dots, k_2)$ и симметричных им относительно середины интервала $(0;1)$ интервалах J_k^1

$(k=1, \dots, k_1)$ и $J_k^2 (k=1, \dots, k_2)$ – аналогично рассуждениям п. 2, либо начинаем

строить новую последовательность интервалов $\{I_k^3\} = \left\{ \left((X_{N-3}/X_N)^k \times (X_{N-1}X_{N-2}/X_N^2); (X_{N-3}/X_N)^k \right) \right\}$ до тех пор, пока

$\frac{X_{N-3}^k X_{N-1}X_{N-2}}{X_N^k X_N^2} \geq \max ((X_{N-3}/X_N), (X_N/2))$, etc. Эта процедура заведомо

конечна (поскольку конечно число значений X_i), и в итоге мы получаем,

что $\rho(t) \equiv 1$ на $(0;1)$. Аналогично п. 2, из (5) и (6) несложно показать, что

$p_i^* = \frac{X_i p_i}{\mu}$. Итак, $\gamma_N = \zeta \tau_N^*$, где ζ равномерно распределена на $(0,1)$ и не

зависит от τ_N^* , а τ_N^* – дискретная сл.в., принимающая значения X_i , $i=1, 2, \dots, N$,

$$\mathbf{P}\{\tau_N^* = X_i\} = \mu^{-1} X_i p_i. \quad (7)$$

4. Далее, любая ф.р. может быть приближена ступенчатой функцией, т.е. ф.р. дискретной сл.в. с конечным числом значений. Для произвольного распределения времени восстановления τ (это распределение может быть непрерывным, дискретным или смешанным) выберем последовательность дискретных *нерешётчатых* τ_N так, чтобы $\mathbf{P}\{\tau_N < x\} \rightarrow \mathbf{P}\{\tau < x\}$ при $N \rightarrow +\infty$.

Для каждой из сл.в. τ_N , рассматриваемой как время восстановления некоторого процесса восстановления, имеется предельное распределение времени восстановления τ_N^* и стационарное распределение времени перескока (недоскока) процесса восстановления – γ_N и γ_N^* , и для всех них

$\gamma_N = \overset{D}{\zeta} \tau_N^*$, где ζ – равномерно распределённая на $(0;1)$ сл.в., не зависящая

от τ_N^* ; τ_N^* распределена в соответствии с (7).

Соответственно, соотношение $\gamma_N = \zeta \tau_N^*$ перейдёт и на предельное распределение процесса восстановления, имеющего в качестве времени восстановления произвольную нерешётчатую сл.в. τ с конечным математическим ожиданием. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 1 является частным случаем теоремы 2, однако мы приводим здесь её доказательство, поскольку, во-первых, случай непрерывного распределения времени восстановления является наиболее используемым в приложениях, и, во-вторых, доказательство теоремы 1 намного элегантнее доказательства теоремы 2, которое, конечно, нуждается в усовершенствовании.

Замечание 2. Предельным переходом в формуле (7) можно получить плотность распределения стационарного времени восстановления τ' , однако это можно сделать и более простым способом. Действительно, пусть $F^*(x) = P\{\tau' \leq x\}$ – ф.р. стационарного периода восстановления τ' , $f^*(x) = F^{*\prime}(x)$. Тогда, если ζ – равномерно распределённая на (0;1) сл.в., независимая от τ' , и $\gamma = \gamma^* = \zeta \tau'$, то

$$\begin{aligned} G(x) &= P\{\gamma \leq x\} = P\{\tau' \zeta \leq x\} = P\{\tau' \leq x\} + P\{\tau' > x \& \zeta \leq x/\tau'\} = \\ &= F^*(x) + \int_x^\infty xt^{-1} dF^*(t); \quad g(x) = G'(x) = \int_x^\infty t^{-1} dF^*(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) следует, что, если существует $g'(x)$, то существует $f^*(x)$ и $g'(x) = -\frac{f^*(x)}{x}$ (поскольку из (2) $g(x) = \mu^{-1}(1 - F(x))$, $g'(x) \leq 0$), и

$$f^*(x) = -xg'(x), \quad F^*(x) = G(x) - xg(x) = \mu^{-1} \left(\int_0^x (1 - F(s)) ds - x(1 - F(x)) \right).$$

Кроме того, из $\gamma = \zeta \tau'$ и (2) следует $E\gamma = E\zeta E\tau' = E\tau/2$; $E\tau' = 2E\gamma = \frac{E\tau^2}{E\tau} \geq E\tau$, поскольку $E\gamma = \frac{E\tau^2}{2\mu}$.

Соотношения (8) позволяют найти любой конечный момент стационарного времени восстановления τ' . Заметим, что количество конечных моментов τ' на единицу меньше числа конечных моментов τ .

Автор выражает глубокую признательность Василию Васильевичу Козлову за ценные консультации, помощь и активное участие в подготовке

статьи, а также благодарит А.Ю. Веретенникова за постоянную и деликатную поддержку в работе.

Работа поддержана РФФИ (Грант № 14-01-00319 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко, Б.В.* Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. М.: Наука, 1966. 432 с. и последующие издания.
2. *Кокс, Д.* Теория восстановления / Д. Кокс, В. Смит. М.: Советское радио, 1967. 300 с.
3. *Lindvall, T.* Lectures on the Coupling Method. Wiley, New York, 1992. xi+257 pp.

УДК 517.54

В. О. Кузнецов

Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: kvo_kuz@mail.ru

К ЗАДАЧЕ О МАКСИМУМЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ

Рассматривается задача о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих односвязных областей. Получены достаточные условия, при которых границы областей экстремального разбиения являются жордановыми кривыми.

Ключевые слова: квадратичный дифференциал, неналегающие области, экстремальное разбиение, конформный радиус, приведенный модуль односвязной области.

V. O. Kuznetsov

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Russia, Saint Petersburg, e-mail: kvo_kuz@mail.ru

ON THE PROBLEM ON MAXIMIZING THE PRODUCT OF POWERS OF CONFORMAL RADII

Problems on the maximum of the product of conformal radii powers for nonoverlapping simply connected domains are considered. Sufficient conditions, under which the boundaries of domains of extremal decomposition are Jordan curves, are obtained.

Keywords: quadratic differential, nonoverlapping domains, extremal decomposition, conformal radii, reduced module of simply-connected domain.

Пусть D – ограниченная односвязная область на \mathbb{C} , $a \in D$. Под $R(D, a)$ понимаем конформный радиус односвязной области D относительно точки a . Наименьшую ограниченную односвязную область, содержащую внутреннее замыкание односвязной области D , будем обозначать через D^+ . Всюду в дальнейшем \mathbb{S} – область на \mathbb{C} , ограниченная конечным числом невырожденных кусочно-аналитических кривых. Рассмотрим две связанные друг с другом задачи.

Задача 1. Пусть a_1, \dots, a_n ($n \geq 2$) – различные конечные фиксированные точки \mathbb{S} , $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – заданные положительные числа. Найти максимум функционала

$$I_1 = I_1(a_1, \dots, a_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \mathbb{S}) = \prod_{j=1}^n R(D_j, a_j)^{\alpha_j} \quad (1)$$

для всех систем неналегающих односвязных областей D_1, \dots, D_n на \mathbb{S} таких, что $a_j \in D_j$, $j = 1, \dots, n$.

Задача 2. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – заданные положительные числа, $a_1, \dots, a_n, D_1, \dots, D_n$ ($n \geq 2$) – система точек и неналегающих односвязных областей на \mathbb{S} таких, что $a_j \in D_j$, $j = 1, \dots, n$. Найти максимум функционала (1) для всех указанных систем точек a_j и областей D_j .

В задаче 1 имеет место следующий качественный результат [1].

Теорема А. Существует положительный квадратичный дифференциал

$$Q(z)dz^2 = Q(z, a_1, \dots, a_n, \mathbb{S})dz^2 \quad (2)$$

на \mathbb{S} , регулярный на \mathbb{S} за исключением двойных полюсов в точках a_1, \dots, a_n , содержащихся в круговых областях D_1, \dots, D_n этого дифференциала. Пусть Φ – объединение всех критических траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$ на \mathbb{S} . Внутреннее замыкание множества Φ пусто и $\mathbb{S} \setminus \bar{\Phi} = \bigcup_{k=1}^n D_k$. Числа α_k являются длинами в Q -метрике траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$ в областях D_k , $k = 1, \dots, n$. Система областей D_1, \dots, D_n , и только она, реализует максимум функционала (1) в задаче 1.

Используя рассуждения теории нормальных семейств, нетрудно показать, что если область \mathbb{S} является ограниченной, то существуют системы точек и областей, реализующие максимум функционала в задаче 2. Если a_1, \dots, a_n – некоторая экстремальная система точек задачи 2, то соот-

ветствующей экстремальной системой областей этой задачи является экстремальная система областей задачи 1 для точек a_1, \dots, a_n . Таким образом, каждая экстремальная система областей задачи 2 также описывается квадратичным дифференциалом (2).

Из теоремы А вытекает, что:

- границы экстремальных областей в задачах 1 и 2 являются кусочно-аналитическими кривыми,
- множество $\bar{\Phi}$ связно,
- пересечение множества $\bar{\Phi}$ с каждой компонентой связности множества $\partial\mathbb{S}$ непусто.

Известно (см., например, [2,3]), что границы экстремальных областей в задаче 1, вообще говоря, жордановыми кривыми не являются. Цель настоящей работы показать, что в задаче 2 при определенных предположениях это невозможно. Справедлива

Теорема 1. Пусть \mathcal{D} – экстремальная система областей задачи 2, $D \in \mathcal{D}$. Если точка z_0 является носителем нескольких граничных элементов области D , то пересечение $\partial\mathbb{S}$ с каждой компонентой связности множества $\bar{\Phi} \setminus \{z_0\}$ непусто.

Доказательство. Пусть $a_1, \dots, a_n, D_1, \dots, D_n$ – экстремальная система точек и областей в задаче 2, и пусть точка z_0 является носителем нескольких граничных элементов области D_1 . Если $z_0 \notin \bar{\Phi}$, то утверждение теоремы 1 справедливо, поскольку в силу теоремы А множество $\bar{\Phi}$ связно и $\bar{\Phi} \cap \partial\mathbb{S} \neq \emptyset$.

Пусть $z_0 \in \bar{\Phi}$. Предположим, что компонента связности Φ' множества $\bar{\Phi} \setminus \{z_0\}$ с множеством $\partial\mathbb{S}$ не пересекается. Положим $\Phi'' = \bar{\Phi} \setminus \Phi'$. Тогда содержащая точку a_1 компонента связности D_0 множества $\mathbb{S} \setminus \Phi''$ является односвязной областью такой, что $D_1 \subset D_0$, $\partial D_0 \subset \partial D_1$, $\partial D_0 \cap \bar{\Phi}' = \{z_0\}$. Пусть D_1, \dots, D_m – экстремальные области, лежащие в D_0 . Тогда $2 \leq m \leq n$, $\partial D_j \subset \bar{\Phi}'$ при $j = 2, \dots, m$, и $\bar{D}_j \cap D_0 = \emptyset$ при $j = m + 1, \dots, n$.

Рассмотрим конформный гомеоморфизм $\zeta = \sigma(z)$ области D_0 на круг $U_\zeta = \{\zeta: |\zeta| < 1\}$, нормированный условиями $\sigma(a_1) = 0$, $\sigma'(a_1) > 0$, и пусть $z = s(\zeta)$ – обратное отображение. Положим $b_j = \sigma(a_j)$, $G_j = \sigma(D_j)$,

$j = 1, \dots, m$. Поскольку D_1, \dots, D_n – экстремальная система областей в задаче 1 для точек a_1, \dots, a_n , то G_1, \dots, G_m – экстремальная система областей в задаче 1 для круга U_ζ и точек b_1, \dots, b_m (с параметрами $\alpha_1, \dots, \alpha_m$). Из теоремы А тогда вытекает, что G_1, \dots, G_m – круговые области квадратичного дифференциала $Q(\zeta, b_1, \dots, b_m, U_\zeta) d\zeta^2$. Поскольку $T = \{\zeta: |\zeta| = 1\} = \sigma(\partial D_0) \subset \sigma(\partial D_1) = \partial G_1$, $\left(\bigcup_{j=1}^m \partial G_j\right) \setminus T = \sigma(\Phi')$ и $\overline{U_\zeta} \cap \sigma(\Phi') = \{\sigma(z_0)\}$, то единственным нулем этого дифференциала на окружности T_ζ является точка $\sigma(z_0)$.

Через $m(D, a) = (2\pi)^{-1} \log R(D, a)$ будем обозначать приведенный модуль односвязной области D относительно точки a . Пусть $\varepsilon > 0$, $\lambda = 1 + \varepsilon$, $|\mu| = \lambda$. Положим $\tilde{b}_j = \mu b_j$, $\tilde{G}_j = (\mu G_j) \cap U_\zeta$, $j = 1, \dots, m$. Тогда (см. доказательство теоремы 2 в [4]) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ $\tilde{b}_j \in U_\zeta$, $j = 1, \dots, m$, $\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_m$ – односвязные области такие, что $m(\tilde{G}_1, \tilde{b}_1) > m(G_1, b_1)$, $m(\tilde{G}_j, \tilde{b}_j) = m(G_j, b_j) + \frac{\log \lambda}{2\pi} + o(\varepsilon)$, $j = 2, \dots, m$, где $o(\varepsilon)$ не зависит от $\arg \mu$. Полагая $\tilde{a}_j = s(\tilde{b}_j)$, $\tilde{D}_j = s(\tilde{G}_j)$, $j = 1, \dots, m$, и $\tilde{a}_j = a_j$, $\tilde{D}_j = D_j$, $j = m+1, \dots, n$, получим варьированную систему точек $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$ и областей $\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n$.

При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ для варьированной системы точек и областей имеем $m(\tilde{G}_j, \tilde{b}_j) > m(G_j, b_j)$, $j = 1, \dots, m$, и $m(\tilde{D}_j, \tilde{a}_j) = m(D_j, a_j)$, $j = m+1, \dots, n$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 [m(\tilde{D}_j, \tilde{a}_j) - m(D_j, a_j)] = \sum_{j=1}^m \alpha_j^2 (m(\tilde{G}_j, \tilde{b}_j) - m(G_j, b_j)) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=2}^m \alpha_j^2 (\log |s'(\tilde{b}_j)| - \log |s'(b_j)|) > h(\mu) - h(1), \quad (3)$$

где $h(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=2}^m \alpha_j^2 \log |s'(b_j \zeta)|$. Поскольку $z = s(\zeta)$ – конформный гомеоморфизм, то $h(\zeta)$ — гармоническая в круге $\lambda \overline{U_\zeta}$ функция. Поэтому существует μ такое, что $|\mu| = \lambda$ и $h(\mu) > h(1)$. Из (3) тогда вытекает, что

$\sum_1^n \alpha_j^2 m(\tilde{D}_j, \tilde{a}_j) > \sum_1^n \alpha_j^2 m(D_j, a_j)$. Перепиcывая это неравенство в терминах конформных радиусов, получим

$$\prod_{j=1}^n R(\tilde{D}_j, \tilde{a}_j)^{\alpha_j^2} > \prod_{j=1}^n R(D_j, a_j)^{\alpha_j^2},$$

что противоречит экстремальности исходной системы точек и областей. ■

Следствие 1. Если \mathcal{D} — экстремальная система областей задачи 2, $D \in \mathcal{D}$ и $D^+ \subset \mathbb{S}$, то граница области D является жордановой кривой.

Доказательство. Пусть \mathcal{D} — экстремальная система областей задачи 2, $D \in \mathcal{D}$ и $D^+ \subset \mathbb{S}$. Предположим, что граница области D жордановой кривой не является. Поскольку границы экстремальных областей являются кусочно-аналитическими кривыми, то это означает, что существует точка z_0 , являющаяся носителем по крайней мере двух различных граничных элементов области D . Проведем в области D разрез γ , соединяющий два различных граничных элемента с носителем в этой точке, и рассмотрим связную компоненту Φ' множества $\bar{\Phi} \setminus \{z_0\}$, лежащую внутри γ . Поскольку $\Phi' \subset D^+ \subset \mathbb{S}$, то $\Phi' \cap \partial\mathbb{S} = \emptyset$, что невозможно в силу теоремы 1. ■

Если $\mathbb{S} = U_z = \{ |z| < 1 \}$, то $D^+ \subset U_z$, поэтому справедливо

Следствие 2 [5]. Границы всех экстремальных областей в задаче 2 о разбиении круга U являются жордановыми кривыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Емельянов, Е.Г. Теоремы об экстремальном разбиении в семействе систем областей различных типов / Е.Г. Емельянов, Г.В. Кузьмина // Записки науч. семинаров ПОМИ. 1997. Т.237. С. 74-104.
2. Куфарев, П.П. К вопросу о конформных отображениях дополнительных областей // Докл. АН СССР. 1950. Т.73. С.881-884.
3. Куфарев, П.П. Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей / П.П. Куфарев, А.Э. Фалес // Уч. записки Томск. ун-та. 1952. Т.17. С.25-35.
4. Кузнецов, В.О. О максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей в круге // Записки науч. семинаров ПОМИ. 1997. Т.237. С.105-118.
5. Кузнецов, В.О. О геометрических свойствах экстремальных разбиений // Записки науч. семинаров ПОМИ. 2013. Т.418. С.121-135.

УДК 517.925

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

О БИФУРКАЦИЯХ СШИТОГО ТРОЙНОГО ЦИКЛА

Описана бифуркационная диаграмма типичной двухпараметрической деформации кусочно-гладкого векторного поля в окрестности сшитого тройного цикла.

Ключевые слова: кусочно-гладкое векторное поле, сшитый тройной цикл, бифуркационная диаграмма, типичность.

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

ON BIFURCATIONS OF A SEWING TRIPLE CYCLE

We describe the bifurcation diagram of a generic two-parameter deformation of a piecewise smooth vector field in a neighborhood of a sewing triple cycle.

Keywords: piecewise smooth vector field, sewing triple cycle, bifurcation diagram, generic character.

1. Введение. Пусть M – ориентируемое компактное двумерное C^∞ -многообразие, D – разбиение M на компактные двумерные C^∞ -подмногообразия M_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, такие, что $M = M_1 \cup \dots \cup M_n$, $M_i \cap M_j = \partial M_i \cap \partial M_j$ при $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$. Кусочно-гладким векторным полем класса C^r ($r \geq 1$) на многообразии M с разбиением D назовем элемент топологического векторного пространства $X^r(M, D) := X^r(M_1) \oplus \dots \oplus X^r(M_n)$, где $X^r(M_i)$ – топологическое векторное пространство векторных полей класса C^r на M_i с C^r -топологией. Траекториями векторного поля $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(n)}) \in X^r(M, D)$, следуя [1, с. 95], будем называть траектории дифференциального включения $\dot{x} \in \hat{X}(x)$, $x \in M$, где $\hat{X}(x) = \{X^{(i)}(x)\}$ при $x \in \text{int } M_i$ и $\hat{X}(x)$ – выпуклая оболочка векторов $X^{(i)}(x)$ и $X^{(j)}(x)$ при $x \in \partial M_i \cap \partial M_j$. Кусочно-гладкое векторное поле можно интерпретировать и как класс $\{X\}$ касательных

векторных полей $X : M \rightarrow TM$ таких, что $X(x) = X^{(i)}(x)$, если $x \in \text{int } M_i$. Эти векторные поля, вообще говоря, разрывны в точках ∂M_i .

Кусочно-гладкие векторные поля применяются в качестве математических моделей реальных динамических систем с переключениями.

Типичные бифуркации в одно- и двухпараметрических семействах гладких векторных полей на двумерных многообразиях в основном изучены. Для кусочно-гладких векторных полей возникают новые «механизмы» бифуркаций. Наибольший интерес представляет изучение бифуркаций, при которых рождаются устойчивые периодические траектории (автоколебания). В [1] приведено описание бифуркации особых точек первой степени негрубости. Некоторые нелокальные бифуркации рассмотрены автором в работах [2-8]. В настоящей работе мы рассматриваем бифуркации кусочно-гладкого векторного поля, имеющего негрубый устойчивый предельный цикл, касающийся линии разрыва векторного поля (рис. 1). В случае «общего положения» такие векторные поля образуют подмногообразие коразмерности два в $X^r(M, D)$. Поэтому их бифуркации следует изучать в двухпараметрических семействах общего положения.

2. Условия и результаты. Рассмотрим семейство векторных полей $X_\varepsilon = (X_\varepsilon^{(1)}, \dots, X_\varepsilon^{(n)}) \in X^r(M, D)$, $r \geq 2$, C^r -гладко зависящих от параметра ε , меняющегося в некоторой окрестности E_0 точки $0 \in \mathbb{R}^2$. Продолжим векторные поля $X_\varepsilon^{(j)}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, до векторных полей $\bar{X}_\varepsilon^{(j)}$ на некоторой окрестности M_i в M так, чтобы отображения $(x, \varepsilon) \mapsto \bar{X}_\varepsilon^{(j)}(x)$ принадлежали классу C^r .

Пусть точка $z^0 \in M_{i_-} \cap M_{i_+}$, при некоторых $i_-, i_+ \in \{1, \dots, n\}$, $i_- \neq i_+$.

Выберем локальную карту $h : V \rightarrow \mathbb{R}^2$, $k = 1, 2$, так, чтобы

$$h(z^0) = (0, 0), h(V \cap M_{i_-}) = \{(x, y) : y \leq 0\}, h(V \cap M_{i_+}) = \{(x, y) : y \geq 0\}. \quad (1)$$

Пусть в этой карте $X_\varepsilon^{(i_\pm)}(z) = P^\pm(x, y, \varepsilon)\partial/\partial x + Q^\pm(x, y, \varepsilon)\partial/\partial y$.

Предположим, что для поля X_0 выполняются приведенные ниже условия (A₁) – (A₅).

$$(A_1) Q^+(0) = 0, P^+(0)\partial Q^+(0)/\partial x > 0.$$

$$(A_2) Q^-(0) = 0, P^-(0)\partial Q^-(0)/\partial x > 0.$$

$$(A_3) P^+(0)P^-(0) > 0.$$

Эти условия не зависят от выбора локальной карты h , удовлетворяющей условиям (1). Без ограничения общности можно считать, что h выбрана так, что

$$P^\pm(0) > 0, Q^\pm(0) = 0, \partial Q^\pm(0)/\partial x > 0. \quad (2)$$

(A₄) Через точку z^0 проходит замкнутая траектория Γ_0 поля X_0 , не содержащая линейных особенностей и особых точек, отличных от z^0 .

Пусть $\eta: (-u_1, u_1) \rightarrow M_{i_k}$ C^r -вложение, трансверсальное полю $X_0^{(i_k)}$, такое, что $\eta(0) \in \Gamma_0$, а дуга $\eta(0, u_1)$ находится с той же стороны от Γ_0 , что и дуга $h^{-1}\{0\} \times (0, y_1)$, при достаточно малом $y_1 > 0$. При выполнении условий (A₁) – (A₄) найдутся такие числа $u_k > 0$, $k = 1, 2$, что траектория поля X_0 , начинающаяся в точке $\eta(u)$, $u \in [0, u_1)$, следующий раз пересечет дугу $\eta[0, u_2)$ в точке $\eta(f_0^+(u))$, где $f_0^+(\cdot) \in C^r$, $f_0^+(0) = 0$, $(f_0^+)'(u) > 0$, то есть на дуге $\eta[0, u_1)$ определена функция f_0 последования по траекториям поля X_0 .

$$(A_5) (f_0^+)'(0) < 1.$$

Ниже мы покажем, в этом случае функция последования может быть продолжена на дугу $\eta(-u_1, u_1)$ с сохранением C^1 -гладкости. Поэтому Γ_0 является устойчивой замкнутой траекторией. Мы также выясним, что при близких к нулю ε поле X_ε может иметь в окрестности Γ_0 до трех замкнутых траекторий, что и позволяет назвать Γ_0 устойчивым *сшитым* тройным циклом.

Из (2) по теореме о неявной функции следует, что существуют такие число $\hat{x} > 0$ и окрестность $E_1 \subset E_0$ точки $0 \in \mathbb{R}^2$, что для $\varepsilon \in E_1$ уравнение $Q^+(x, 0, \varepsilon) = 0$ ($Q^-(x, 0, \varepsilon) = 0$) имеет в интервале $(-\hat{x}, \hat{x})$ единственное решение $x = x_+(\varepsilon)$ ($x = x_-(\varepsilon)$), при этом $x_\pm(\cdot) \in C^r$, $x_\pm(0) = 0$, $\partial Q^\pm(x_\pm(\varepsilon), 0, \varepsilon)/\partial x > 0$. Обозначим $z_\pm(\varepsilon) := h^{-1}(x_\pm(\varepsilon), 0)$, $x_0(\varepsilon) := x_-(\varepsilon) - x_+(\varepsilon)$. При $x_0(\varepsilon) \neq 0$ $z_\pm(\varepsilon)$ является грубой особой точкой поля X_ε типа 2а или 2б [1, С. 164].

Если окрестность $E_2 \subset E_1$ точки $0 \in \mathbb{R}^2$ достаточно мала, то из точки $h^{-1}(x_+(\varepsilon), 0)$ выходит положительная (отрицательная) полутраектория поля X_ε , $\varepsilon \in E_2$, пересекающая дугу $\eta(-u_1, u_1)$ в точке $\eta(u_+(\varepsilon))$ ($\eta(u_-(\varepsilon))$), где $u_\pm(\cdot) \in C^r$, $u_\pm(0) = 0$. Обозначим $u_0(\varepsilon) := u_+(\varepsilon) - u_-(\varepsilon)$. Теперь мы можем сформулировать условие

$$(B) \begin{vmatrix} \partial x_0(0)/\partial \varepsilon_1 & \partial x_0(0)/\partial \varepsilon_2 \\ \partial u_0(0)/\partial \varepsilon_1 & \partial u_0(0)/\partial \varepsilon_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если это условие выполняется, то в некоторой окрестности $E_3 \subset E_2$ точки $0 \in \mathbb{R}^2$ можно выбрать координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ так, что

$$x_0(\varepsilon) = \varepsilon_1, \quad u_0(\varepsilon) = \varepsilon_2. \quad (3)$$

В дальнейшем будем отождествлять точку $\varepsilon \in E_3$ с ее координатной строкой: $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и обозначать $|\varepsilon| := \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\}$.

Теорема. Пусть семейство векторных полей $X_\varepsilon \in X^r(M, D)$, $\varepsilon \in E_0$, удовлетворяет условиям $(A_1) - (A_5)$ и (B) . Тогда существуют такие числа $0 < \delta_0 < \delta$ и окрестность U кривой Γ_0 , что все положительные полутраектории векторного поля X_ε , $\varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0) \times (-\delta, \delta)$, начинающиеся в точках U , не выходят из U , а бифуркационная диаграмма семейства X_ε , $\varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0) \times (-\delta, \delta)$, в U и соответствующие и фазовые портреты имеют вид, изображенный на рис. 1 и 2. Здесь $B_1 = (0, \delta_0) \times \{0\}$, $B_6 = (-\delta_0, 0) \times \{0\}$, $B_5 = \{0\} \times (0, \delta)$, $B_9 = \{0\} \times (-\delta, 0)$, при $j = 2, 3, 4$ $B_j = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta_0), \varepsilon_2 = \beta_j(\varepsilon_1)\}$, где $\beta_j : (0, \delta_0) \rightarrow (0, \delta)$, $\beta_j \in C^r$, $\beta_j(+0) = 0$, при $k = 7, 8$ $B_k = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta_0, 0), \varepsilon_2 = \beta_k(\varepsilon_1)\}$, где $\beta_k : (-\delta_0, 0) \rightarrow (-\delta, 0)$, $\beta_k \in C^r$, $\beta_k(-0) = 0$.

Векторные поля X_ε , $\varepsilon \in E_k$, грубые в U , а векторные поля X_ε , $\varepsilon \in B_k$, имеют в U первую степень негрубости.

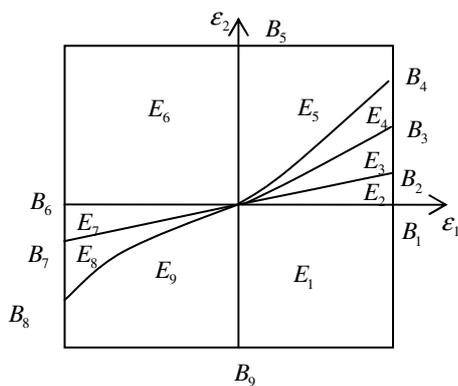


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма

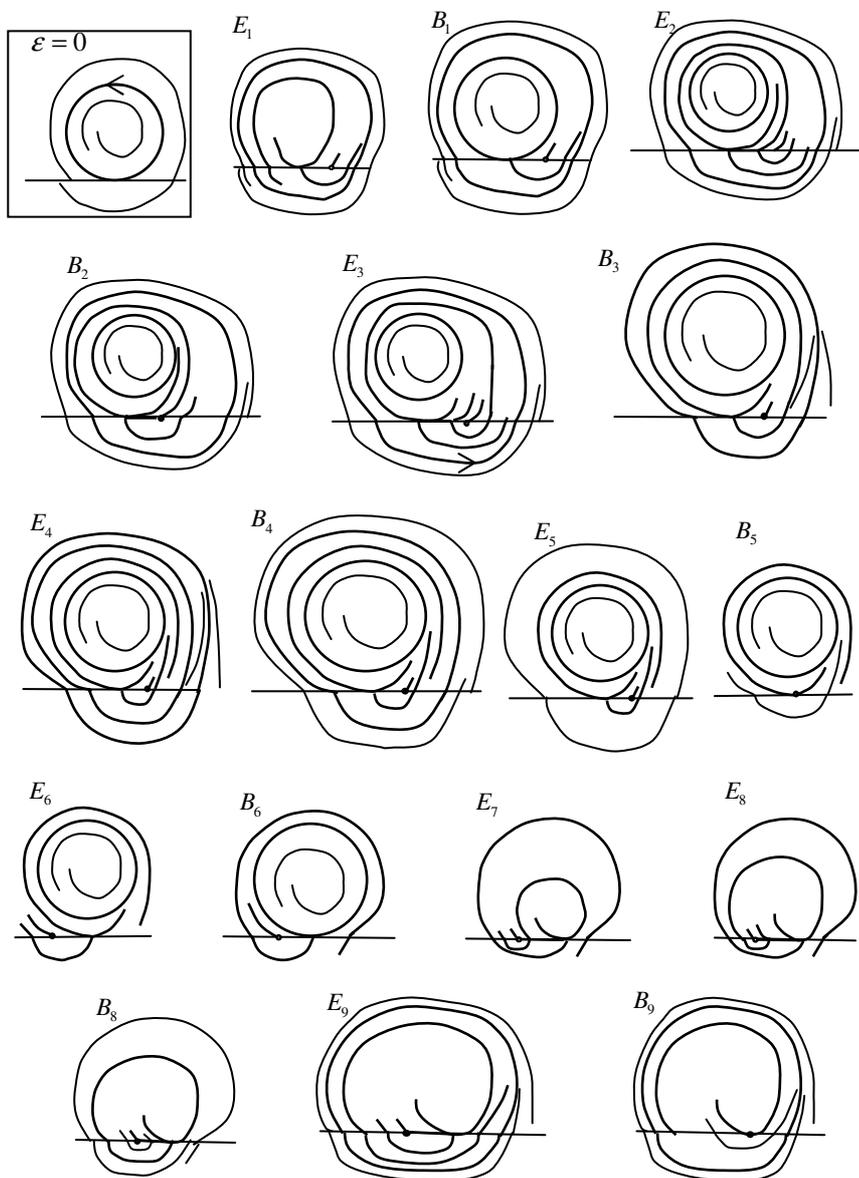


Рис. 2. Фазовые портреты векторных полей X_ϵ в окрестности U

Доказательство приводится в пунктах 3–5.

3. Функции соответствия. Обозначим $\eta_\varepsilon(u) := \eta(u_-(\varepsilon) + u)$ и $\zeta_\varepsilon(u) := h^{-1}(x_+(\varepsilon) + u, 0)$.

Лемма 1. При некоторых $\bar{u} > 0$ и $\bar{\delta} > 0$ положительная (отрицательная) полутраектория поля X_ε , $|\varepsilon| < \bar{\delta}$, начинающаяся в точке $\zeta_\varepsilon(u)$, $u \in [0, \bar{u}]$ ($u \in [-\bar{u}, 0]$) первый раз пересекает дугу $\eta(-u_1, u_1)$ в точке $\eta_\varepsilon(\chi_\varepsilon^+(u))$ ($\eta_\varepsilon(\chi_\varepsilon^-(u))$), где

$$\chi_\varepsilon^\pm(\cdot) \in C^r, \chi_\varepsilon^+(0) = \varepsilon_2, \chi_\varepsilon^-(0) = 0, \quad (4)$$

$$(\chi_\varepsilon^\pm)'(0) = 0, (\chi_\varepsilon^+)'(u) < 0 \text{ (} (\chi_\varepsilon^-)'(u) > 0 \text{)} \text{ при } u \in (0, \bar{u}] \text{ (} u \in [-\bar{u}, 0) \text{)}, \quad (5)$$

$$(\chi_0^+)''(0) := \lambda_+ < 0, (\chi_0^-)''(0) := \lambda_- < 0. \quad (6)$$

Доказательство. Докажем существование и свойства функции соответствия $\chi_\varepsilon^+(u)$. Для $\chi_\varepsilon^-(u)$ построения аналогичны. Так как $P^+(0) > 0$, то мы можем выбрать числа $\bar{d} > 0$ и $\delta_1 > 0$ так, чтобы $P^+(x, y, \varepsilon) > 0$ при $(x, y, \varepsilon) \in [-\bar{d}, \bar{d}] \times [-\bar{d}, \bar{d}] \times (-\delta_1, \delta_1)^2$. Мы можем также считать, что при этих значениях переменных $|x_+(\varepsilon)| < \bar{d}$ и $\text{sgn } Q^+(x, 0, \varepsilon) = \text{sgn}(x - x_+(\varepsilon))$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q^+(x, y, \varepsilon)}{P^+(x, y, \varepsilon)}, \quad (x, y, \varepsilon) \in [-\bar{d}, \bar{d}] \times [-\bar{d}, \bar{d}] \times (-\delta_1, \delta_1)^2. \quad (7)$$

Его интегральные кривые являются дугами траекторий векторного поля $\bar{X}_\varepsilon^{(i_*)}$. Пусть $Y(x, u, v, \varepsilon)$ – решение уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию $Y(u, u, v, \varepsilon) = v$. При достаточно малых \bar{d} и δ_1 интегральная кривая $y = Y(x, u, v, \varepsilon)$ определена для $v = 0$, $x_+(\varepsilon) \leq u < \bar{d}$, $u \leq x \leq \bar{d}$ и является дугой траектории векторного поля $X_\varepsilon^{(i_*)}$. При некоторых $u' > 0$, $\delta_2 \in (0, \delta_1]$ определено вложение $\zeta_\varepsilon^+ : [0, u'] \rightarrow M_{i_*}$, $|\varepsilon| < \delta_2$, $\zeta_\varepsilon^+(u) := h^{-1}(\bar{d}, Y(\bar{d}, x_+(\varepsilon), 0, \varepsilon) - u)$.

При достаточно малых \bar{u} и $\delta_3 \in (0, \delta_2]$ определена функция

$$\varphi_\varepsilon^+(u) := Y(\bar{d}, x_+(\varepsilon), 0, \varepsilon) - Y(\bar{d}, x_+(\varepsilon) + u, 0, \varepsilon), \quad u \in [0, \bar{u}], \quad |\varepsilon| < \delta_3.$$

Ясно, что $\varphi_\varepsilon^+(\cdot)$ – функция соответствия по траекториям векторного поля $X_\varepsilon^{(i_*)}$ между дугами $\zeta_\varepsilon[0, \bar{u}]$ и $\zeta_\varepsilon^+[0, u']$,

$$\varphi_\varepsilon^+(0) = 0. \quad (8)$$

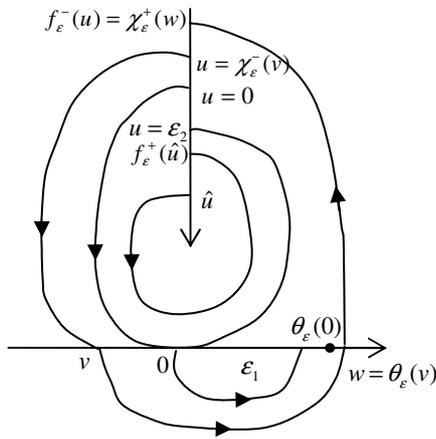


Рис. 3. Функции соответствия и функции последования

Так как $Y'_u(x, u, v, \varepsilon) = -Y'_v(x, u, v, \varepsilon)Q^+(u, v, \varepsilon)/P^+(u, v, \varepsilon)$ [9, С. 120], а $Q^+(x_+(\varepsilon), 0, \varepsilon) = 0$, то

$$(\varphi_\varepsilon^+)'(0) = 0. \quad (9)$$

Поскольку

$$Y''_{uu}(x, u, v, \varepsilon) =$$

$$-(Y'_v(x, u, v, \varepsilon)/P^+(u, v, \varepsilon))'_u Q^+(u, v, \varepsilon) - (Y'_v(d, u, v, \varepsilon)/P^+(u, v, \varepsilon)) \frac{\partial}{\partial x} Q^+(u, v, \varepsilon),$$

то

$$(\varphi_\varepsilon^+)''(0) = (Y'_v(d, x_+(\varepsilon), 0, \varepsilon)/P^+(x_+(\varepsilon), 0, \varepsilon)) \partial Q^+(x_+(\varepsilon), 0, \varepsilon) / \partial x > 0. \quad (10)$$

Вектор $X_\varepsilon^{(i_4)}(\zeta_\varepsilon^+(0))$ не касается дуги $\zeta_\varepsilon^+[0, u']$. Поэтому при достаточно малых $\delta_4 \in (0, \delta_3]$ и $u_3 > 0$ положительная полутраектория поля X_ε , $|\varepsilon| < \delta_2$, начинающаяся в точке $\zeta_\varepsilon^+(u)$, $0 \leq u \leq u_3$, первый раз пересекает дугу $\eta(-u_1, u_1)$ в точке $\eta_\varepsilon(\psi_\varepsilon^+(u))$, где

$$\psi_\varepsilon^+(\cdot) \in C^r, \psi_\varepsilon^+(0) = \varepsilon_2, (\psi_\varepsilon^+)'(u) < 0. \quad (11)$$

Ввиду (8) – (11) при некоторых $\bar{u} > 0$ и $\bar{\delta} \in (0, \delta_4]$ для $u \in [0, \bar{u}]$, $|\varepsilon| < \bar{\delta}$ $\chi_\varepsilon^+(u) := \psi_\varepsilon^+(\varphi_\varepsilon^+(u))$ определено и удовлетворяет утверждениям леммы.

Из определения чисел $x_\pm(\varepsilon)$, из (3) и [1, С.175] следует

Лемма 2. Числа \bar{u} и $\bar{\delta}$ можно считать выбранными так, что положительная полутраектория поля $X_\varepsilon^{(i_*)}$, $|\varepsilon| < \bar{\delta}$, начинающаяся в точке $\zeta_\varepsilon(u)$, $u \in [-\bar{u}, \varepsilon_1]$ кончается в точке $\zeta_\varepsilon(\theta_\varepsilon(u))$, где $\theta_\varepsilon(\cdot) \in C^r$, $(\theta_\varepsilon)'(u) < 0$, $\theta_\varepsilon(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $(\theta_\varepsilon)'(\varepsilon_1) = -1$, а положительная полутраектория поля $\bar{X}_0^{(i_*)}$ начинающаяся в точке $\zeta_0(u)$, $u \in [-\bar{u}, 0]$ следующий раз пересекает ∂M_{i_*} в точке $\zeta_0(\bar{\theta}_0(u))$, где $\bar{\theta}_0(\cdot) \in C^r$, $\bar{\theta}_0(0) = 0$, $(\bar{\theta}_0)'(0) = -1$.

4. Функции последования и функция расхождения. Теперь мы можем определить функцию последования f_0 по траекториям векторного поля X_0 на дуге $\eta(-u_1, u_1)$ при достаточно малом u_1 , взяв $f_0(u) := \chi_0^+ \circ \theta_0 \circ (\chi_0^-)^{-1}(u)$ для $u \in (-u_1, 0]$ и $f_0(u) := f_0^+(u)$ для $u \in [0, u_1)$. Определим также функцию \bar{f}_0 , положив $\bar{f}_0(u) := \chi_0^+ \circ \bar{\theta}_0 \circ (\chi_0^-)^{-1}(u)$ для $u \in (-u_1, 0]$ и $\bar{f}_0(u) := f_0^+(u)$ для $u \in [0, u_1)$. Ее можно представить как композицию функций соответствия по траекториям векторных полей $\bar{X}_0^{(j)}$ между гладкими дугами, которым эти траектории трансверсальны. Поэтому $\bar{f}_0 \in C^r$, и из условия (A₅) имеем $(\bar{f}_0)'(0) = (f_0^+)'(0) < 1$. Так как

$$(f_0)'(u) = \theta_0'(v)(\chi_0^+)'/(\chi_0^-)'(v) \Big|_{v=(\chi_0^-)^{-1}(u)},$$

то, используя равенства $\theta_0(0) = 0$, $(\theta_0)'(0) = -1$, (5), (6) и правило Лопиталя, получаем

$$(f_0)'(-0) = -\lim_{v \rightarrow -0} (\chi_0^+)'/(\chi_0^-)'(v) = \lim_{v \rightarrow -0} (\chi_0^+)''(\theta_0(v))/(\chi_0^-)''(v) = \lambda_+ / \lambda_-.$$

Точно также $(\bar{f}_0)'(-0) = \lambda_+ / \lambda_-$. Но $(\bar{f}_0)'(-0) = (\bar{f}_0)'(0) = (f_0^+)'(0) < 1$. Поэтому f_0 непрерывно дифференцируема и

$$0 < (f_0)'(0) = \lambda_+ / \lambda_- < 1. \quad (12)$$

Отсюда следует, что Γ_0 – устойчивая замкнутая траектория поля X_0 .

Мы можем выбрать такие числа $u_4 > u_* > 0$ и $\delta \in (0, \bar{\delta})$, что траектория поля X_ε , $|\varepsilon| < \delta$, начинающаяся в точке $\eta_\varepsilon(u)$, $u \in [0, u_*]$, следующий раз пересечет дугу $\eta_\varepsilon[0, u_4]$ в точке $\eta_\varepsilon(f_\varepsilon^+(u))$, где $f_\varepsilon^+(\cdot) \in C^r$,

$$f_\varepsilon^+(0) = \varepsilon_2, \quad (13)$$

$(f_\varepsilon^+)'(u) > 0$, то есть на дуге $\eta_\varepsilon[0, u_4]$ определена функция f_ε^+ последования по траекториям поля X_ε . При $\varepsilon = 0$ она совпадает с ранее введенной функцией f_0^+ . Так как $f_0^+(0) = 0$, $0 < (f_0^+)'(0) < 1$, то можно считать, что при $|\varepsilon| < \delta$

$$f_\varepsilon^+(u_*) < u_* , \quad (14)$$

$$0 < (f_\varepsilon^+)'(u) < 1 \text{ для } u \in [0, u_*] . \quad (15)$$

Определим функцию последования $f_\varepsilon^-(u) := \chi_\varepsilon^+ \circ \theta_\varepsilon \circ (\chi_\varepsilon^-)^{-1}(u)$ и функцию расхождения $d(v, \varepsilon) := \chi_\varepsilon^+(\theta_\varepsilon(v)) - \chi_\varepsilon^-(v)$. Так как $f_0^-(u) = f_0(u)$ при $u \in (-u_1, 0]$, то можно считать, что u_* и δ выбраны так, что $f_\varepsilon^-(u)$ определена для $u \in [-u_*, u_r(\varepsilon)]$, где $u_r(\varepsilon) = 0$, если $|\varepsilon| < \delta$, $\varepsilon_1 \geq 0$ и $u_r(\varepsilon) = \chi_\varepsilon^-(\theta_\varepsilon^{-1}(0))$, если $|\varepsilon| < \delta$, $\varepsilon_1 < 0$, $f_\varepsilon^-(u) > -u_*$, $0 < (f_\varepsilon^-)'(-u_*) < 1$ при $|\varepsilon| < \delta$. Соответственно, $d(v, \varepsilon)$ определена для $v \in [v_l(\varepsilon), v_r(\varepsilon)]$, $|\varepsilon| < \delta$, где $v_l(\varepsilon) = (\chi_\varepsilon^-)^{-1}(-u_*)$, $v_r(\varepsilon) = 0$, если $\varepsilon_1 \geq 0$, и $v_r(\varepsilon) = \theta_\varepsilon^{-1}(0)$, если $\varepsilon_1 < 0$,

$$d(v_l(\varepsilon), \varepsilon) > 0 , \quad d'(v_l(\varepsilon), \varepsilon) < 0 . \quad (16)$$

Нетрудно убедиться, что

$$d(\hat{v}, \varepsilon) = 0, \quad d'_v(\hat{v}, \varepsilon) < 0 \Leftrightarrow f_\varepsilon^-(\hat{u}) = \hat{u}, \quad (f_\varepsilon^-)'(\hat{u}) < 1 \text{ при } \hat{u} = \chi_\varepsilon^-(\hat{v}), \quad (17)$$

$$d(\hat{v}, \varepsilon) = d'_v(\hat{v}, \varepsilon) = 0, \quad d''_{vv}(\hat{v}, \varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow f_\varepsilon^-(\hat{u}) = \hat{u}, \quad (f_\varepsilon^-)'(\hat{u}) = 1, \quad (f_\varepsilon^-)''(\hat{u}) \neq 0 \text{ при } \hat{u} = \chi_\varepsilon^-(\hat{v}). \quad (18)$$

Вследствие (6) и (12)

$$(\chi_0^-)''(0) < (\chi_0^+)''(0) < 0 . \quad (19)$$

Поскольку

$$d''_{vv}(v, \varepsilon) = (\chi_\varepsilon^+)''(\theta_\varepsilon(v))(\theta_\varepsilon'(v))^2 + (\chi_\varepsilon^+)''(\theta_\varepsilon(v))(\theta_\varepsilon)''(v) - (\chi_\varepsilon^-)''(v),$$

то из (19) и равенств $\theta_0(0) = 0$, $(\theta_0)'(0) = -1$, $(\chi_0^+)''(0) = 0$ следует, что числа u_* и δ можно считать выбранными столь малыми, что

$$d''_{vv}(v, \varepsilon) > 0 \text{ для } v \in [v_-(\varepsilon), v_+(\varepsilon)], \quad |\varepsilon| < \delta . \quad (20)$$

$$\text{Так как } \theta_0(0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \chi_\varepsilon^+(0) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \chi_\varepsilon^-(0) = 0, \quad (\chi_\varepsilon^+)''(0) = 0,$$

$$d'_{\varepsilon_2}(v, \varepsilon) = \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \chi_\varepsilon^+ \right)'(\theta_\varepsilon(v)) + (\chi_\varepsilon^+)''(\theta_\varepsilon(v)) \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \theta_\varepsilon(v) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \chi_\varepsilon^-(v),$$

то можно считать, что при выбранных u_* и δ

$$d'_{\varepsilon_2}(v, \varepsilon) > 1/2 \text{ для } v \in [v_-(\varepsilon), v_+(\varepsilon)], \quad |\varepsilon| < \delta . \quad (21)$$

5. Построение бифуркационной диаграммы. Используя теорему о трубке траекторий [10], можно построить цилиндрическую окрестность U кривой Γ_0 , ограниченную двумя простыми замкнутыми кусочно-гладкими кривыми Γ_- и Γ_+ , со следующими свойствами: 1) Γ_- (Γ_+) пересекает ду-

гу $\eta[-u_*, u_*]$ в единственной точке $\gamma^- = \eta(u^-)$ ($\gamma^+ = \eta(u^+)$), где $-u_* < u^- < f_0(-u_*)$ ($f_0(u_*) < u^- < u_*$); 2) Γ_- (Γ_+) состоит из гладких дуг, принадлежащих подмногообразиям M_i , трансверсальных ∂M_i , с концами, лежащими на ∂M_i , и таких, что в их точках векторное поле $X_0^{(i)}$ им трансверсально и направлено внутрь U ; 3) в точках $U \cap \partial M_i$, отличных от z^0 , векторное поле $X_0^{(i)}$ трансверсально ∂M_i ; 4) векторные поля $X_0^{(i)}$ не имеют в U особых точек.

Мы можем считать δ столь малым, что при $|\varepsilon| < \delta$ 1) γ^- (γ^+) принадлежит дуге $\eta_\varepsilon(-u_*, f_\varepsilon^-(-u_*))$ ($\eta_\varepsilon(f_\varepsilon^+(u_*), u_*)$); 2) на каждой гладкой дуге Γ_- и Γ_+ , принадлежащей M_i , векторное поле $X_\varepsilon^{(i)}$ трансверсально этой дуге и направлено внутрь U (тем самым, положительные полутраектории поля X_ε , начинающиеся в точках U , не выходят из U); 3) любая положительная полутраектория поля X_ε , начинающаяся в точке из U , пересекает дугу $\eta_\varepsilon[-u_*, u_*]$ между точками γ^- и γ^+ .

Из (13) – (15) следует, что f_ε^+ при $\varepsilon \in (-\delta, \delta) \times (-\delta, 0)$ не имеет неподвижных точек, а при $\varepsilon \in (-\delta, \delta) \times [0, \delta)$ имеет единственную неподвижную точку $\hat{u}(\varepsilon)$, причем $0 < (f_\varepsilon^+)'(\hat{u}(\varepsilon)) < 1$ и $\hat{u}(\varepsilon_1, 0) = 0$.

При $\varepsilon \in E_1 := (0, \delta) \times (-\delta, 0)$ и $\varepsilon \in B_1 := (0, \delta) \times \{0\}$ $\theta_\varepsilon(0) > 0$, и из (4) и (5) получаем $d(0, \varepsilon) = \chi_\varepsilon^+(\theta_\varepsilon(0)) < \chi_\varepsilon^+(0) = \varepsilon_2$, и потому

$$d(0, \varepsilon) < 0 \text{ для } \varepsilon \in E_1 \cup B_1. \quad (22)$$

Отсюда, а также из (16) и (20) следует, что $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет единственный нуль $\hat{v}(\varepsilon) \in (v_1(\varepsilon), 0)$, $d'_v(\hat{v}(\varepsilon), \varepsilon) < 0$. В соответствие с (19) f_ε^- имеет единственную неподвижную точку $\hat{u}(\varepsilon) \in (-u_*, 0)$, причем $0 < (f_\varepsilon^-)'(\hat{u}(\varepsilon)) < 1$.

Пусть $\varepsilon \in B_5 := \{0\} \times (0, \delta)$ или $\varepsilon \in B_9 := \{0\} \times (-\delta, 0)$. В силу (19) мы можем считать δ столь малым, что

$$(\chi_\varepsilon^-)''(0) < (\chi_\varepsilon^+)''(0) < 0. \quad (23)$$

Так как $(\chi_\varepsilon^\pm)'(0) = 0$, то

$d'_v(v, \varepsilon) = (\chi_\varepsilon^+)''(\theta_\varepsilon(v))(\theta_\varepsilon)'(v) - (\chi_\varepsilon^-)''(v) = (\chi_\varepsilon^+)''(v_*)\theta_\varepsilon(v)(\theta_\varepsilon)'(v) - (\chi_\varepsilon^-)''(v_{**})v$, где $v < v_{**} < 0 < v_* < \theta_\varepsilon(v)$. Отсюда и из (23), учитывая, что при $\varepsilon_1 = 0$ $\theta'_\varepsilon(0) = -1$, $\theta_\varepsilon(v) = -v + o(v)$, получаем, что существует такое число

$\tilde{v}(\varepsilon) \in (v_l(\varepsilon), 0)$, что $d'_v(v, \varepsilon) < 0$ при всех $v \in [\tilde{v}(\varepsilon), 0)$. Из этого неравенства, из (16) и (20) следует, что

$$d'_v(v, \varepsilon) < 0 \text{ при всех } v \in [v_l(\varepsilon), 0), \varepsilon \in B_5 \cup B_9. \quad (24)$$

Так как при $\varepsilon \in B_5$ $d(0, \varepsilon) = \varepsilon_2 > 0$, то

$$d(v, \varepsilon) \geq \varepsilon_2 > 0 \text{ при } v \in [v_l(\varepsilon), 0], \varepsilon \in B_5. \quad (25)$$

Таким образом, при $\varepsilon \in B_5$ f_ε^- не имеет неподвижных точек.

При $\varepsilon \in B_9$ $d(0, \varepsilon) = \varepsilon_2 < 0$. Вместе с (16) и (24) это влечет существование у f_ε^- единственной (устойчивой гиперболической) неподвижной точки.

Пусть $\varepsilon \in (0, \delta) \times (0, \delta)$. Тогда $v_r(\varepsilon) = 0$. Проверим, что

$$d'_v(0, \varepsilon) > 0. \quad (26)$$

Находим

$$d'_v(0, \varepsilon) = (\chi_\varepsilon^+)'(\theta_\varepsilon(0))(\theta_\varepsilon)'(0) - (\chi_\varepsilon^-)'(0). \quad (27)$$

Согласно леммам 1 и 2 второе слагаемое в (27) равно нулю, а оба множителя в первом слагаемом отрицательны. Тем самым, имеем (26).

Из (16), (20) и (26) следует, что существует такая C^r -функция $m : (0, \delta) \times (-\delta, \delta) \rightarrow (v_l(\varepsilon), 0)$, что

$$d'_v(m(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad (28)$$

$$d'_v(v, \varepsilon) < 0 \text{ при } v \in [v_l(\varepsilon), m(\varepsilon)], \quad d'_v(v, \varepsilon) > 0 \text{ при } v \in (m(\varepsilon), 0]. \quad (29)$$

Обозначим $M(\varepsilon) := d(m(\varepsilon), \varepsilon)$ – наименьшее значение $d(\cdot, \varepsilon)$ на отрезке $[v_l(\varepsilon), 0]$. Вследствие (21) и (28)

$$M'_{\varepsilon_2}(\varepsilon) > 0. \quad (30)$$

Из (22) получаем, что

$$M(\varepsilon_1, 0) < 0 \text{ при всех } \varepsilon_1 \in (0, \delta). \quad (31)$$

Ввиду (25) при достаточно малом $\delta_0 \in (0, \delta)$ $d(v, \varepsilon) \geq \delta/4$, если $\varepsilon_2 = \delta/2$, $0 < \varepsilon_1 < \delta_0$, $v \in [v_l(\varepsilon), 0]$. Поэтому

$$M(\varepsilon_1, \delta/2) > 0 \text{ для всех } \varepsilon_1 \in (0, \delta_0). \quad (32)$$

Из (30) – (32) теперь получаем, что для любого $\varepsilon_1 \in (0, \delta_0)$ существует число $\beta_4(\varepsilon_1) \in (0, \delta/2)$ такое, что

$$\operatorname{sgn} M(\varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_4(\varepsilon_1)). \quad (33)$$

По теореме о неявной функции $\beta_4(\cdot) \in C^r$. Покажем, что $\beta_4(+0) = 0$. Предположим, что это не так. Тогда существует последовательность $\tau_n \downarrow 0$, $n \in \mathbb{N}$, для которой $\lim \beta_4(\tau_n) = a \in (0, \delta/2]$. Обозначим

$\varepsilon^{(n)} := (\tau_n, \beta_4(\tau_n))$. Ввиду (25) $\forall v \in [v_l(\varepsilon), 0]$ $d(v, (0, a)) \geq a$. Следовательно, при некотором $n \in \mathbb{N} \forall v \in [v_l(\varepsilon), 0]$ $d(v, \varepsilon^{(n)}) > 0$ в противоречие с (33). Итак, $\beta_3(+0) = 0$.

Из (29) и (33) вытекает, что $d(0, \varepsilon) > 0$ при $\varepsilon_2 = \beta_4(\varepsilon_1)$. Вместе с (21) и (22) это влечет существование для любого $\varepsilon_1 \in (0, \delta_0)$ такого числа $\beta_3(\varepsilon_1) \in (0, \beta_4(\varepsilon_1))$, что $\beta_3(\cdot) \in C^r$ и

$$\operatorname{sgn} d(0, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_3(\varepsilon_1)). \quad (34)$$

Выберем $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ так, чтобы $\varepsilon_1 \in (0, \delta_0)$, $\varepsilon_2 \in (0, \beta_3(\varepsilon_1))$. Так как $\chi_\varepsilon^+(0) = \varepsilon_2 > 0$, $\chi_\varepsilon^+(\theta_\varepsilon(0)) = d(0, \varepsilon) < 0$, $(\chi_\varepsilon^+)'(v) < 0$, то $\chi_\varepsilon^+(\cdot)$ имеет на интервале $(0, \theta_\varepsilon(0))$ единственный нуль $\hat{v}(\varepsilon)$. Это означает, что векторное поле X_ε имеет в U единственную замкнутую (неустойчивую) траекторию, содержащую дугу линии разрыва. При $\varepsilon_1 \in (0, \delta_0)$, $\varepsilon_2 \notin (0, \beta_3(\varepsilon_1))$ $\chi_\varepsilon^+(\cdot)$ не имеет нулей на $(0, \theta_\varepsilon(0))$, а векторное поле X_ε не имеет в U замкнутых траекторий, содержащую дугу линии разрыва.

Ввиду (4) мы можем считать, что при всех допустимых (v, ε)

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \chi_\varepsilon^+(v) > 0. \quad (35)$$

Пусть $\varepsilon_1 \in (0, \delta_0)$ фиксировано. Так как при $\varepsilon_2 = 0$ $\chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1) < \chi_\varepsilon^+(0) = \varepsilon_2 = 0$, а при $\varepsilon_2 = \beta_3(\varepsilon_1)$ $\chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1) > \chi_\varepsilon^+(\theta_\varepsilon(0)) = d(0, \varepsilon) = 0$, то, учитывая (35), получаем, что существует такое число $\beta_2(\varepsilon_1) \in (0, \beta_3(\varepsilon_1))$, что $\operatorname{sgn} \chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_2(\varepsilon_1))$, то есть выходящая сепаратриса особой точки $z_-(\varepsilon)$ идет в особую точку $z_+(\varepsilon)$ только при $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$. По теореме о неявной функции $\beta_2(\cdot) \in C^r$.

Обозначим $B_k := \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta_0), \varepsilon_2 = \beta_k(\varepsilon_1)\}$, $k = 2, 3, 4$;

$E_n := \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta_0), \beta_{n-1}(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_n(\varepsilon_1)\}$, $n = 2, 3, 4, 5$,

где положили $\beta_1(\varepsilon_1) := 0$, $\beta_5(\varepsilon_1) := \delta$.

Из (16), (20), (28), (29), (33) и (34), учитывая (17) и (18), получаем следующие утверждения. При $\varepsilon \in \bigcup_{k=1}^3 (E_k \cup B_k)$ f_ε^- имеет устойчивую гиперболическую неподвижную точку $u_1^-(\varepsilon)$. При $\varepsilon \in \bigcup_{k=1}^2 (E_k \cup B_k)$ $u_1^-(\varepsilon)$ – единственная неподвижная точка у f_ε^- , при $\varepsilon \in B_3$ ($\varepsilon \in E_3$) f_ε^- имеет еще и неустойчивую гиперболическую неподвижную точку $u_2^-(\varepsilon) = 0$ ($u_2^-(\varepsilon) \in (u_1^-(\varepsilon), 0)$). При $\varepsilon \in B_4$ f_ε^- имеет единственную (двукратную) неподвижную точку. При $\varepsilon \in E_4$ f_ε^- не имеет неподвижных точек.

При $\varepsilon \in (-\delta_0, 0) \times (-\delta, \delta)$

$$d'_v(v_r(\varepsilon), \varepsilon) = (\chi_\varepsilon^+)'(0)(\theta_\varepsilon)'(v_r(\varepsilon)) - (\chi_\varepsilon^-)'(v_r(\varepsilon)) = -(\chi_\varepsilon^-)'(v_r(\varepsilon)) \quad (36)$$

и потому $d'_v(v_r(\varepsilon), \varepsilon) < 0$. Отсюда, а также из (16) и (20) получаем, что

$$d'_v(v, \varepsilon) < 0 \text{ при всех } \varepsilon \in (-\delta_0, 0) \times (-\delta, \delta), \quad v_l(\varepsilon) \leq v \leq v_r(\varepsilon). \quad (37)$$

Из равенства $\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} d(v_r(\varepsilon), \varepsilon) = d'_{\varepsilon_2}(v_r(\varepsilon), \varepsilon) + d'_v(v_r(\varepsilon), \varepsilon)(v_r)'_{\varepsilon_2}(\varepsilon)$, из (21), (36) и (5) следует, что u_* , δ можно считать выбранными столь малыми, что

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} d(v_r(\varepsilon), \varepsilon) > 0. \quad (38)$$

При $\varepsilon \in (-\delta_0, 0) \times \{0\}$ $d(v_r(\varepsilon), \varepsilon) = \varepsilon_2 - \chi_\varepsilon^-(v_r(\varepsilon)) = -\chi_\varepsilon^-(v_r(\varepsilon)) > 0$. С другой стороны, так как при $\varepsilon = (0, -\delta/2)$ $d(v_r(\varepsilon), \varepsilon) = d(0, \varepsilon) = -\delta/2 < 0$, то δ_0 можно полагать столь малым, что $d(v_r(\varepsilon), \varepsilon) < 0$ при $\varepsilon_2 = -\delta/2$, $0 < \varepsilon_1 < \delta_0$. Отсюда и из (38) получаем, что существует такая C^r -функция $\beta_8 : (-\delta_0, 0) \rightarrow (-\delta, 0)$, что

$$\operatorname{sgn} d(v_r(\varepsilon), \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_8(\varepsilon_1)). \quad (39)$$

Как и для β_4 доказывается, что $\beta_8(-0) = 0$.

Для $\varepsilon \in (-\delta_0, 0) \times (-\delta, \delta)$ обозначим $R(\varepsilon) := \chi_\varepsilon^+(0) - \chi_\varepsilon^-(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 - \chi_\varepsilon^-(\varepsilon_1)$. Ввиду (4) мы можем считать, что

$$R'_{\varepsilon_2}(\varepsilon) > 0. \quad (40)$$

Так как при $\varepsilon_2 = 0$ $R(\varepsilon) = -\chi_\varepsilon^-(\varepsilon_1) > 0$, а при $\varepsilon_2 = \beta_8(\varepsilon_1)$ в силу (39)

$$R(\varepsilon) = \chi_\varepsilon^+(0) - \chi_\varepsilon^-(\varepsilon_1) < \chi_\varepsilon^+(0) - \chi_\varepsilon^-(v_r(\varepsilon)) = d(v_r(\varepsilon), \varepsilon) = 0,$$

то, учитывая (40), получаем, что существует число $\beta_7(\varepsilon_1) \in (\beta_8(\varepsilon_1), 0)$, для которого $\operatorname{sgn} R(\varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_7(\varepsilon_1))$. Это означает, что выходящая сепаратриса особой точки $z_+(\varepsilon)$ идет в особую точку $z_-(\varepsilon)$ только при $\varepsilon_2 = \beta_7(\varepsilon_1)$. По теореме о неявной функции $\beta_7(\cdot) \in C^r$.

Обозначим $B_k := \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta_0, 0), \varepsilon_2 = \beta_k(\varepsilon_1)\}$, $k = 6, 7, 8$,

$$E_n := \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta_0, 0), \beta_n(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_{n-1}(\varepsilon_1)\}, \quad n = 6, 7, 8, 9,$$

где положили $\beta_5(\varepsilon_1) := \delta$, $\beta_6(\varepsilon_1) := 0$, $\beta_9(\varepsilon_1) := -\delta$.

Нетрудно убедиться, что $\chi_\varepsilon^+(0) - \chi_\varepsilon^-(v) = 0$ при $v \in ((v_r(\varepsilon), 0))$, то есть существует устойчивая замкнутая траектория, содержащая линейную особенность (дугу $\zeta_\varepsilon((v, 0))$, $v \in ((v_r(\varepsilon), 0))$ только если $\varepsilon \in E_7$.

Из (16), (37) и (39) получаем, что при $\varepsilon \in E_6 \cup B_6 \cup E_7 \cup B_7 \cup E_8$ f_ε^- не имеет неподвижных точек, при $\varepsilon \in B_8$ ($\varepsilon \in E_9$) f_ε^- имеет единственную (устойчивую) неподвижную точку $u_r(\varepsilon)$ ($\hat{u}(\varepsilon) \in (-u_*, u_r(\varepsilon))$).

Из полученного выше описания неподвижных точек функций последования f_ε^+ и f_ε^- , замкнутых траекторий, содержащих линейные особенности, и выбора окрестности U следуют утверждения теоремы о векторных полях X_ε при $\varepsilon \in E_k$ и $\varepsilon \in B_k$, $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. Ройтенберг, В.Ш. О бифуркациях кусочно-гладкого векторного поля в окрестности петли сепаратрисы особой точки на линии разрыва // Математика и мат. образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып.5. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2006. С. 49-52.
3. Ройтенберг, В.Ш. О бифуркациях замкнутой траектории кусочно-гладкого векторного поля, проходящей через особую точку на линии разрыва // Математика, физика, экономика и физ.-мат. образование. Ч. 1. Материалы конф. "Чтения Ушинского" физ.-мат. факультета. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2006. С. 23-29.
4. Ройтенберг, В.Ш. О бифуркациях сепаратрисного контура кусочно-гладкого векторного поля // Мат. методы в технике и технологиях – ММТТ-20: сб. тр. XX междунар. науч. конф.: в 10 т. Т. 1. Изд-во ЯГТУ, 2007. С. 69-71.
5. Ройтенберг, В.Ш. О бифуркациях кусочно-гладких векторных полей, имеющих петлю сепаратрисы седла, находящегося на линии разрыва // Математика и мат. образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып.6. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2008. С. 46-56.
6. Ройтенберг, В.Ш. О бифуркациях петли сепаратрисы особой точки на линии разрыва // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-21: Сб. тр. XXI междунар. науч. конф.: в 10 т. Т. 1. Саратов, 2008. С.125-127.
7. Ройтенберг, В.Ш. О бифуркациях петли сепаратрисы сшитого седло-узла // Труды VI междунар. Колмогоровских чтений. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2008. С. 148-153.
8. Ройтенберг, В.Ш. О рождении предельных циклов из контура, образованного сепаратрисами седла и сшитого седло-узла кусочно-гладкого векторного поля // Вестник Костромского гос. ун-та им. Н.А. Некрасова. 2014. №2. С. 26-30.
9. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения: пер. с англ. М.: Мир, 1970. 720 с.
10. Палис, Ж. Геометрическая теория динамических систем на плоскости: Введение: пер. с англ. / Ж. Палис Ж, В. ди Мелу. М.: Мир, 1986. 301 с.

А. В. Бородин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: alvasborodin@mail.ru

ЧАСТНЫЕ И ПОЛНАЯ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. I

Предложено новое определение вариации функции многих переменных, установлены основные свойства этой вариации, взаимосвязь с классическими определениями вариации. Определен соответствующий интеграл типа Римана-Стилтьеса.

Ключевые слова: частные вариации, полная вариация, частные интегралы Римана-Стилтьеса, полный интеграл Римана-Стилтьеса.

A. V. Borodin

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: alvasborodin@mail.ru

PARTIAL AND TOTAL VARIATION FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES. I

In this paper we propose a new definition of variation of a function of several variables, the basic properties of this variation, the relationship with the classical definition of variation. The corresponding integral of Riemann-Stieltjes is defined.

Keywords: partial variations, total variation, partial Riemann-Stieltjes integrals, total Riemann-Stieltjes integral.

Существуют несколько обобщений понятия вариации функции одного переменного на случай функции многих переменных (см. работы [1-3, 4-8] и ссылки в них). В настоящей работе предлагается новое определение вариации функции многих переменных, основанное на обобщении понятия приращения функции и его использовании по аналогии с определением одномерной вариации по Жордану. При этом естественным образом возникают понятия частной и полной вариации функции, соответствующих частных и полного интегралов типа Римана-Стилтьеса. Это существенно сближает предлагаемую вариацию для функции многих переменных с вариацией функции одной переменной (по Жордану).

Для простоты и краткости ограничимся трёхмерным случаем, причём основной упор будем делать на идейной, а не технической стороне вопроса.

Пусть $D \subset \mathbf{R}^3$ – ограниченное открытое односвязное множество с границей $S = \partial D$ необходимой гладкости (например, липшицевой границей [8]), $\bar{D} := D \cup S$ – её замыкание (аналог отрезка в \mathbf{R}^1). Совокупность таких множеств обозначается через Ω^3 .

Пусть $u = f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$ ($x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$) – вещественная функция трёх вещественных переменных x_1, x_2, x_3 , определённая на $\bar{D} \in \Omega^3$ и непрерывная там (т.е. $f \in C(\bar{D})$). Обобщим на эту функцию понятие приращения функции f одной переменной $x = x_1 \in \mathbf{R}^1$ на отрезке $[a, b] \subset \mathbf{R}^1$:

$$\Delta f([a, b]) := f(b) - f(a). \quad (1')$$

Определение 1. Приращением функции f на \bar{D} в заданном направлении $e = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)$ называется величина – поверхностный интеграл первого рода

$$\Delta f(\bar{D}, e) := \int_S f(x) \cos(e; \nu(x)) d\sigma(x), \quad (1)$$

где $\nu(x) = (\cos \varphi_1(x), \cos \varphi_2(x), \cos \varphi_3(x))$ – орт внешней нормали к поверхности S в точке $x \in S$, $(e; \nu(x))$ – угол между ортами e и $\nu(x)$, $d\sigma(x)$ – элемент площади поверхности S в точке $x \in S$.

Замечание 1. С позиции этого определения аналогом функции $\varphi(x_1) := x_1$, для которой $\Delta \varphi([a, b]) := b - a$, будет линейная форма $\varphi(x_1, x_2, x_3) := (e, x) = (\cos \alpha_1) x_1 + (\cos \alpha_2) x_2 + (\cos \alpha_3) x_3$, для которой $\Delta \varphi(\bar{D}, e) = |D|$, где $|D|$ – мера (объём) множества D .

Замечание 2. Определение (1) корректно и для конечносвязной области D , ориентированной внешним образом. Это надо иметь в виду и во всех последующих определениях и утверждениях, но это техническая сторона вопроса (как, впрочем, и размерность n исходного векторного пространства \mathbf{R}^n , гладкость границы $S = \partial D$ и функции f).

Замечание 3. Поскольку для любого вектора $a \neq 0$ $\cos(a; \nu) = \cos(e; \nu)$, где $e = a/|a|$, то определение (1) равносильно определению

$$\Delta f(\bar{D}, a) := \int_S f(x) \cos(a, \nu(x)) d\sigma(x).$$

Отметим некоторые свойства приращения (1), вытекающие из его определения и аналогичные свойствам приращения (1').

Свойство 1. Пусть

$$D = D_1 \cup D_2 \cup S_{12} \in \Omega^3,$$

где $D_k \in \Omega^3$ такие, что $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $(S_1 \cap S_2) \setminus S = S_{12}$ — липшицева поверхность ($S_k = \partial D_k$ — граница D_k , ориентированная внешним образом).

Тогда

$$\Delta f(\bar{D}, e) = \Delta f(\bar{D}_1, e) + \Delta f(\bar{D}_2, e).$$

Действительно, поверхность S_{12} , разделяющая области D_1 и D_2 , ориентирована относительно этих областей противоположным образом. Поэтому ввиду условий леммы

$$\int_{S_1} f(x) \cos(e, \nu(x)) d\sigma(x) + \int_{S_2} f(x) \cos(e, \nu(x)) d\sigma(x) = \int_S f(x) \cos(e, \nu(x)) d\sigma(x).$$

Свойство 1 допускает следующее его обобщение.

Свойство 1'. Пусть

$$D = \left(\bigcup_{k=1}^n D_k \right) \cup \left(\bigcup_{k \neq k'} S_{kk'} \right) \in \Omega^3,$$

где $D_k \in \Omega^3$ такие, что $D_k \cap D_{k'} = \emptyset$, $(S_k \cap S_{k'}) \setminus \partial(\bar{D}_k \cup \bar{D}_{k'}) = S_{kk'}$ ($k \neq k'$) — липшицевы поверхности. Тогда

$$\Delta f(\bar{D}, e) = \sum_{k=1}^n \Delta f(\bar{D}_k, e). \quad (2)$$

При этом множество

$$S_{1+n} = \bigcup_{k \neq k'} S_{kk'}$$

называется *внутренней границей* множества

$$D_{1+n} = \bigcup_{k=1}^n D_k.$$

Соответственно $S = \partial D$ — его *внешней границей*, а объединение $S_{0+n} := S \cup S_{1+n}$ — его *полной границей* (или *сетью*). Само множество D_{1+n} называется *разбиением* множества D порядка n , а его слагаемые D_k — *элементами* (ячейками) разбиения. Граница $S_k := \partial D_k$ k -го элемента D_k называется k -й *ячейкой сети* S_{0+n} . При этом $D_0 := D$, $S_0 := S$.

Далее, из равенства $\cos(a, \nu) = \sum_{k=1}^n (a_k / |a|) \cos(a_k, \nu)$, где $a := a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$, вытекает

Свойство 2. Если a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) – вектора такие, что $a := a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$, то (учитывая замечание 3)

$$\Delta f(\bar{D}, a) = \sum_{k=1}^n (|a_k| / |a|) \Delta f(\bar{D}, a_k). \quad (3)$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что если $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbf{R}^3$ – ортонормированный базис и

$$a = a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3$$

– разложение вектора a по этому базису, то

$$\Delta f(\bar{D}, a) = \sum_{k=1}^3 (|a^k| / |a|) \Delta f(\bar{D}, e_k) = \sum_{k=1}^3 \cos(\alpha_k) \Delta f(\bar{D}, e_k), \quad (4)$$

где $|a| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$, $\cos(\alpha_k) := |a^k| / |a|$ ($k = 1, 2, 3$). Если ввести орт $e = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)$ вектора a и градиент вариации функции f на \bar{D} :

$$\nabla f(\bar{D}) := (\Delta f(\bar{D}, e_1), \Delta f(\bar{D}, e_2), \Delta f(\bar{D}, e_3)), \quad (5)$$

то формула (4) переписывается так

$$\Delta f(\bar{D}, a) = (e, \nabla f(\bar{D})). \quad (4')$$

Из формулы (4') вытекает следующее важное утверждение.

Теорема 1. Максимум приращения f на \bar{D} достигается в направлении градиента вариации функции f на \bar{D} , т. е.

$$\max_a \Delta f(\bar{D}, a) = \Delta f(\bar{D}, \nabla f(\bar{D})) = |\nabla f(\bar{D})|.$$

Кроме того, из неё следует, что $\Delta f(\bar{D}, a) = 0$ тогда и только тогда, когда направление $a \perp \nabla f(\bar{D})$. Такое направление называется *стационарным* для функции f на \bar{D} . Множество стационарных направлений $x \in \mathbf{R}^3$ образует (при условии $\nabla f(\bar{D}) \neq 0$) *стационарное подпространство* (стационарную гиперплоскость) функции f на \bar{D} :

$$\sum_{k=1}^3 x^k \Delta f(\bar{D}, e_k) = 0,$$

вдоль которого (которой) приращение f на \bar{D} равно нулю. Если $\nabla f(\bar{D}) = 0$, то стационарным является всё пространство \mathbf{R}^3 .

Затем, определение 1 позволяет распространить на функции многих переменных ряд понятий, связанных с приращением и характерных для функции одной переменной.

Определение 2. Функция f называется *неубывающей* (возрастающей) на $\bar{D} \in \Omega^3$ в направлении e , если для любого $\bar{G} \in \Omega^3, \bar{G} \subseteq \bar{D}$

$$\Delta f(\bar{G}, e) \geq 0 \quad (> 0).$$

Аналогично определяется невозрастающая (убывающая) на $\bar{D} \in \Omega^3$ в направлении e функция f .

Установим связь монотонности функции многих переменных f со знаком её производной (конечно, при условии, что функция f дифференцируема в \bar{D}). Для этого потребуется важное само по себе утверждение.

Лемма 1. Если функция f непрерывно дифференцируема в \bar{D} (т. е. $f \in C^1(\bar{D})$), то

$$\Delta f(\bar{D}, e) = \int_{\bar{D}} \frac{\partial f(x)}{\partial e} dx. \quad (1^*)$$

Доказательство. Воспользуемся формулой интегрирования по частям функций нескольких переменных [8]:

$$\int_D \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) dx = \int_S f(x) g(x) \nu_i(x) d\sigma(x) - \int_D f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx \quad (f, g \in C^1(\bar{D}))$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Умножая эти равенства на $\cos \alpha_i$ (соответственно) и складывая полученные результаты, имеем

$$\int_D \frac{\partial f(x)}{\partial e} g(x) dx = \int_S f(x) g(x) \cos(e; \nu(x)) d\sigma(x) - \int_D f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial e} dx.$$

Полагая в этой формуле $g(x) = 1$, получим формулу

$$\int_D \frac{\partial f(x)}{\partial e} dx = \int_S f(x) \cos(e; \nu(x)) d\sigma(x), \quad (*)$$

или ввиду (1) формулу (2). \square

Заметим, что формулу (*) можно вывести и непосредственно из формулы Гаусса-Остроградского. Кстати, из неё следует замечание 1.

Таким образом, для функций класса $C^1(\bar{D})$ приращение (1) можно определить по более «простой» формуле (1*). В случае функции одной переменной эта формула есть ни что иное как формула Ньютона – Лейбница

$$\int_{[a,b]} f'(x) dx = f(b) - f(a),$$

что ещё раз подчёркивает корректность определения 1 (см. (1')).

Теперь для приращения (1) ((2)) сформулируем аналог теоремы Ролля.

Теорема 2. Если функция $f \in C^1(\bar{D})$ и

$$\Delta f(\bar{D}, e) = 0, \quad (6)$$

то существует точка $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in D$ такая, что $\partial f(\xi)/\partial e = 0$.

Доказательство. Возможны три случая:

- 1) $\partial f(x)/\partial e > 0 \quad (\forall x \in D)$,
- 2) $\partial f(x)/\partial e < 0 \quad (\forall x \in D)$,
- 3) $(\exists x', x'' \in D) : \partial f(x')/\partial e > 0, \partial f(x'')/\partial e < 0$.

В первом (втором) случае согласно (1*) и непрерывности производной $\partial f(x)/\partial e$ на D $\Delta f(\bar{D}, e) > 0 (< 0)$, что противоречит условию (6) теоремы. В третьем случае ввиду связности множества D и непрерывности производной $\partial f(x)/\partial e$ на D существует точка $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in D$ такая, что $\partial f(\xi)/\partial e = 0$, что и требовалось показать. \square

Далее аналог теоремы Лагранжа (формулы конечных приращений).

Теорема 3. Если функция $f \in C^1(\bar{D})$, то существует точка $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in D$ такая, что

$$\Delta f(\bar{D}, e) = \frac{\partial f(\xi)}{\partial e} |D|, \quad (7)$$

где $|D|$ – мера (объём) множества D .

Доказательство. Проведём с помощью теоремы 1, не опираясь на теорему о среднем для кратных интегралов. Введём функцию

$$g(x) := f(x) - \frac{\Delta f(\bar{D}, e)}{|D|} (e, x),$$

где $(e, x) := \sum_{i=1}^3 (\cos \alpha_i) x_i$ — скалярное произведение векторов e и x .

Для неё

$$\Delta g(\bar{D}, e) := \Delta f(\bar{D}, e) - \frac{\Delta f(\bar{D}, e)}{|D|} \Delta(e, x)(\bar{D}, e),$$

где в силу формулы (1*)

$$\Delta(e, x)(\bar{D}, e) = \int_D \frac{\partial}{\partial e} \sum_{i=1}^3 (\cos \alpha_i) x_i dx = \int_D \sum_{i=1}^3 (\cos \alpha_i)^2 dx = \int_D dx = |D|.$$

Поэтому $\Delta g(\bar{D}, e) = 0$. Но тогда по теореме 2 существует точка $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in D$ такая, что

$$\partial g(\xi)/\partial e = \partial f(\xi)/\partial e - \frac{\Delta f(\bar{D}, e)}{|D|} = 0,$$

что и требовалось доказать. \square

Из этой теоремы вытекает

Следствие 1. Если функция $f \in C^1(\bar{D})$, то она неубывающая на $\bar{D} \in \Omega^3$ в направлении e тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$(\forall x \in D): \partial f(x)/\partial e \geq 0. \quad (8)$$

Причём $f \in C^1(\bar{D})$ возрастает на $\bar{D} \in \Omega^3$ в направлении e , если

$$(\forall x \in D): \partial f(x)/\partial e > 0.$$

Доказательство. Пусть $\bar{G} \in \Omega^3, \bar{G} \subseteq \bar{D}$. Тогда согласно (7)

$$\Delta f(\bar{G}, e) / |\bar{G}| = \frac{\partial f(\xi)}{\partial e} \quad (\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in G).$$

Отсюда ввиду условия $\partial f(x)/\partial e \in C(\bar{D})$

$$\lim_{\delta(\bar{G}) \rightarrow 0} \Delta f(\bar{G}, e) / |\bar{G}| = \frac{\partial f(x)}{\partial e},$$

где $\delta(G)$ – диаметр множества G , а x – точка, общая для всех $\bar{G} : \delta(\bar{G}) \rightarrow 0$ (это условие дальше обозначается так: $\bar{G} \rightarrow x$). Необходимость условия (8) доказана. Его достаточность и вторая часть следствия вытекают непосредственно из равенства (7) (для $\bar{G} \in \Omega^3, \bar{G} \subseteq \bar{D}$). \square

Приведённое доказательство служит источником определения.

Определение 3. Если функция $f \in C(\bar{D})$, точка $x \in D$ и существует предел

$$\lim_{\bar{G} \rightarrow x} \Delta f(\bar{G}, e) / |\bar{G}|,$$

то этот предел называется производной функции f в точке $x \in D$ в направлении e и обозначается символом $\partial_e f(x)$ (и символом $\partial_i f(x)$, если $e = e_i$ – координатный орт).

Таким образом,

$$\partial_e f(x) := \lim_{\bar{G} \rightarrow x} \Delta f(\bar{G}, e) / |\bar{G}|. \quad (9)$$

Из доказательства следствия 1 вытекает, что для функции $f \in C^1(\bar{D})$ справедливы равенства

$$\partial_e f(x) = \partial f(x)/\partial e \quad (\partial_i f(x) = \partial f(x)/\partial x_i). \quad (9')$$

Теперь по аналогии с жордановой вариацией функции одной переменной [1, 3, 7, 9] определим вариацию функции $f \in C(\bar{D})$ многих переменных на множестве $\bar{D} \in \Omega^3$ в направлении e .

Пусть $D_{1+n} = \bigcup_{k=1}^n D_k$ — разбиение открытой области D на открытые подобласти D_k (порядка n , см. абзац после формулы (2)). Тогда

$$\bar{D} = \bigcup_{k=1}^n \bar{D}_k \quad (10)$$

— разбиение замкнутой области \bar{D} на замкнутые подобласти \bar{D}_k (элементы разбиения). Обозначается \bar{D}_{1+n} , т. е. (и это подразумевается в (10))

$$\bar{D}_{1+n} := \left\{ \bar{D}_k \right\}_{k=1}^n. \quad (10')$$

Совокупность всевозможных таких разбиений (любого порядка n) обозначается через $P(\bar{D})$

Определение 4. Для функции $f \in C(\bar{D})$ величина (точная верхняя грань на $P(\bar{D})$)

$$V(f; \bar{D}, e) := \sup_{P(\bar{D})} \sum_{k=1}^n |\Delta f(\bar{D}_k, e)| \quad (11)$$

называется изменением (вариацией) функции $f \in C(\bar{D})$ на множестве $\bar{D} \in \Omega^3$ в направлении e . Если $V(f; \bar{D}, e) < \infty$, то f называется функцией с конечным изменением (ограниченной вариацией) на \bar{D} в направлении e ; обозначается $f \in BV(D, e)$.

Если $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbf{R}^3$ — декартов базис, то $V_i(f; \bar{D}) := V(f; \bar{D}, e_i)$ ($i = 1, 2, 3$) называются частными вариациями функции $f \in C(\bar{D})$ на множестве $\bar{D} \in \Omega^3$. Поскольку ввиду (4)

$$\Delta f(\bar{D}_k, e) = \sum_{i=1}^3 \cos(\alpha_{ki}) \Delta f(\bar{D}_k, e_i) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

то
$$|\Delta f(\bar{D}_k, e)| \leq \sum_{i=1}^3 |\Delta f(\bar{D}_k, e_i)| \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f(\bar{D}_k, e)| \leq \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^n |\Delta f(\bar{D}_k, e_i)| \right) \leq \sum_{i=1}^3 V_i(f; \bar{D}).$$

Отсюда получаем оценку

$$V(f; \bar{D}, e) \leq \sum_{i=1}^3 V_i(f; \bar{D}). \quad (12)$$

Таким образом, имеет место утверждение.

Теорема 4. Если функция $f \in C(\bar{D})$ имеет конечные частные изменения на \bar{D} , то она имеет конечное изменение на \bar{D} в любом направлении e и справедлива оценка (12).

Для монотонных в заданном направлении функций конечность их изменения в том же направлении гарантируется следующей теоремой.

Теорема 5. Если функция $f \in C(\bar{D})$ монотонная на \bar{D} в направлении e , то она имеет конечное изменение на \bar{D} в направлении e и справедливо равенство

$$V(f; \bar{D}, e) = |\Delta f(\bar{D}, e)|. \quad (13)$$

В самом деле, в силу определений 4 и 2 имеем

$$V(f; \bar{D}, e) = \sup_{P(\bar{D})} \left| \sum_{k=1}^n \Delta f(\bar{D}_k, e) \right| = \sup_{P(\bar{D})} |\Delta f(\bar{D}, e)| = |\Delta f(\bar{D}, e)|.$$

Похожий результат имеет место для функций $f \in C(\bar{D})$, удовлетворяющих на \bar{D} в направлении e условию (типа Липшица): $(\forall \bar{G} \in \Omega^3, \bar{G} \subseteq \bar{D})$

$$|\Delta f(\bar{G}, e)| \leq c(f; e) |G|, \quad (14)$$

где $c(f; e) = \text{const} \geq 0$. Только вместо равенства (13) получим оценку

$$V(f; \bar{D}, e) \leq c(f; e) |\bar{D}|.$$

В силу теоремы 3 условию (14) удовлетворяют функции $f \in C^1(\bar{D})$, причём

$$c(f; e) = \sup_{x \in \bar{D}} |\partial_e f(x)|.$$

Далее, так как $\Delta(f + g)(\bar{D}_k, e) = \Delta f(\bar{D}_k, e) + \Delta g(\bar{D}_k, e)$, то

$$|\Delta(f + g)(\bar{D}_k, e)| \leq |\Delta f(\bar{D}_k, e)| + |\Delta g(\bar{D}_k, e)|,$$

и значит,

$$\begin{aligned} V((f + g); \bar{D}, e) &= \sup_{P(\bar{D})} \sum_{k=1}^n |\Delta(f + g)(\bar{D}_k, e)| \leq \sup_{P(\bar{D})} \sum_{k=1}^n |\Delta f(\bar{D}_k, e)| + \\ &+ \sup_{P(\bar{D})} \sum_{k=1}^n |\Delta g(\bar{D}_k, e)| = V(f; \bar{D}, e) + V(g; \bar{D}, e), \end{aligned}$$

т. е. справедливо «неравенство треугольника»

$$V((f + g); \bar{D}, e) \leq V(f; \bar{D}, e) + V(g; \bar{D}, e). \quad (15)$$

Из него следует, что если функции $f \in C(\bar{D})$ и $g \in C(\bar{D})$ имеют конечное изменение на \bar{D} в направлении e , то и их сумма $f + g$ имеет конечное изменение на \bar{D} в направлении e и справедливо неравенство (15).

К этому следует добавить свойство «положительной однородности»

$$V((cf); \bar{D}, e) = c |V(f; \bar{D}, e)| \quad (c = \text{const}), \quad (16)$$

вытекающее из определения (11) и очевидных равенств $\Delta(cf)(\bar{D}_k, e) = c \Delta f(\bar{D}_k, e)$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Кроме того, необходимо отметить, что из (11) вытекает

$$V(f; \bar{D}, e) = 0 \Leftrightarrow (\forall \bar{G} \in \Omega^3, \bar{G} \subseteq \bar{D}): \Delta f(\bar{G}, e) = 0,$$

а значит, ввиду (9)

$$(\forall x \in D): \partial_e f(x) = \lim_{\bar{G} \rightarrow x} \Delta f(\bar{G}, e) / |\bar{G}| = 0.$$

Отсюда заключаем, что по крайней мере для $f \in C^1(\bar{D})$ (см. (9')) $V(f; \bar{D}, e) = 0$ тогда и только тогда, когда функция $f \in C^1(\bar{D})$ постоянная в направлении e и фактически является функцией от двух переменных (относительно декартовой системы координат $\{e'_1 = e, e'_2, e'_3\}$). При этом фраза «функция $f \in C^1(\bar{D})$ постоянная в направлении e » означает, что для любой точки $x^0 \in D$ на связной (в пределах множества \bar{D}) части прямой $L(x^0, e) = \{x \in \mathbf{R}^3: x = x^0 + et\}$ функция f постоянна. Понятно, что указанная часть является отрезком с концами на границе ∂D .

Из сказанного следует, что $V(f; \bar{D}, e)$ как функция от $f \in BV(D, e)$ является неотрицательным однородно-выпуклым функционалом [4].

Пусть теперь $D_0 = D = D_1 \cup D_2 \cup S_{12}$. Тогда при условиях, сформулированных в свойстве 1, нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$V(f; \bar{D}_1 \cup \bar{D}_2, e) \geq V(f; \bar{D}_1, e) + V(f; \bar{D}_2, e).$$

Если затем взять произвольное разбиение $D_{01+n} = \bigcup_{k=1}^n D_{0k}$ (области D_0), в нём выделить ячейки $D_{0k'}$ ($k' \in \{1, 2, \dots, n\}$), разделённые поверхностью S_{12} на две непересекающиеся части $D_{1k'}$ и $D_{2k'}$, отнести 1-ю часть $D_{1k'}$ к разбиению области D_1 , а 2-ю часть $D_{2k'}$ к разбиению области D_2 , то получим оценку

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f(\bar{D}_{0k}, e)| \leq V(f; \bar{D}_1, e) + V(f; \bar{D}_2, e),$$

а из неё оценку

$$V(f; \bar{D}_1 \cup \bar{D}_2, e) \leq V(f; \bar{D}_1, e) + V(f; \bar{D}_2, e).$$

Тем самым установлено следующее утверждение (свойство – «аддитивность по разбиению»).

Теорема 6. Пусть $D = D_1 \cup D_2 \cup S_{12} \in \Omega^3$, где $D_k \in \Omega^3$ такие, что $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $(S_1 \cap S_2) \setminus S = S_{12}$ (где $S_k = \partial D_k$ — граница D_k , ориентированная внешним образом). Тогда

$$V(f; \bar{D}_1 \cup \bar{D}_2, e) = V(f; \bar{D}_1, e) + V(f; \bar{D}_2, e).$$

Вышеизложенное позволяет определить аналог интеграла Римана-Стилтьеса [4, 7, 9], а именно:

Определение 5. Пусть функции $f \in C(\bar{D})$, $g \in BV(D, e)$;

$D_{1+n} = \bigcup_{k=1}^n D_k$ — произвольное разбиение области $D \in \Omega^3$,

$\lambda := \max_{1 \leq k \leq n} \delta(D_k)$, $x_k \in D_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Тогда предел

$$\int_{\bar{D}} f(x) d_e g(x) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta g(\bar{D}_k, e), \quad (17)$$

если он существует и не зависит от разбиения D_{1+n} области D и выбора точек $x_k \in D_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), называется интегралом от функции $f \in C(\bar{D})$ по функции $g \in BV(D, e)$ на множестве $\bar{D} \in \Omega^3$ в направлении e .

Из (17) следует оценка

$$\left| \int_{\bar{D}} f(x) d_e g(x) \right| \leq V(f; \bar{D}, e) \|f\|_C \quad (\|f\|_C = \sup_{x \in \bar{D}} |f(x)|).$$

Если $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbf{R}^3$ — декартов базис, то

$$\int_D f(x) d_i g(x) := \int_D f(x) d_{e_i} g(x) \quad (i = 1, 2, 3)$$

называются частными интегралами от функции $f \in C(\bar{D})$ по функции $g \in BV(D, e)$ на множестве \bar{D} .

Для функции $g \in C^1(\bar{D})$, согласно лемме 1,

$$\Delta g(\bar{D}_k, e) = \int_{D_k} \frac{\partial g(x)}{\partial e} dx \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда по теореме о среднем существует точка $x'_k \in D_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) такая, что

$$\Delta g(\bar{D}_k, e) = \frac{\partial g(x'_k)}{\partial e} |D_k| \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Подставляя эти значения в (17) и заменяя там $x_k \in D_k$ на $x'_k \in D_k$, получим формулу для вычисления интеграла от функции $f \in C(\bar{D})$ по функции $g \in C^1(\bar{D})$ на множестве $\bar{D} \in \Omega^3$ в направлении e :

$$\int_{\bar{D}} f(x) d_e g(x) = \int_{\bar{D}} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial e} dx. \quad (18)$$

В частности,

$$\int_{\bar{D}} f(x) d_i g(x) = \int_{\bar{D}} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx \quad (i = 1, 2, 3).$$

Отсюда вытекает равенство

$$\begin{aligned} \int_{\bar{D}} f(x) d_e g(x) &= \\ &= \sum_{i=1}^3 \cos(\alpha_i) \int_{\bar{D}} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx = \sum_{i=1}^3 \cos(\alpha_i) \int_{\bar{D}} f(x) d_i g(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь определение (11) с позиции теоремы 1. Поскольку, согласно теореме 1,

$$(\forall e \in \mathbf{R}^3): \Delta f(\bar{D}_k, e) \leq \Delta f(\bar{D}_k, \nabla f(\bar{D}_k)) = |\nabla f(\bar{D}_k)| \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

то из (11) получаем, что $(\forall e \in \mathbf{R}^3)$:

$$V(f; \bar{D}, e) \leq \sup_{P(\bar{D})} \sum_{k=1}^n |\Delta f(\bar{D}_k, \nabla f(\bar{D}_k))| = \sup_{P(\bar{D})} \sum_{k=1}^n |\nabla f(\bar{D}_k)|. \quad (19)$$

Отсюда вполне естественным является следующее определение.

Определение 6. Для функции $f \in C(\bar{D})$ величина

$$V(f; \bar{D}) := \sup_{P(\bar{D})} \sum_{k=1}^n |\Delta f(\bar{D}_k, \nabla f(\bar{D}_k))| = \sup_{P(\bar{D})} \sum_{k=1}^n |\nabla f(\bar{D}_k)|, \quad (20)$$

где (см. (5))

$$\nabla f(\bar{D}_k) := (\Delta f(\bar{D}_k, e_1), \Delta f(\bar{D}_k, e_2), \Delta f(\bar{D}_k, e_3)) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

называется полным изменением (вариацией) функции $f \in C(\bar{D})$ на множестве $\bar{D} \in \Omega^3$. Если $V(f; \bar{D}) < \infty$, то f называется функцией с конечным полным изменением (ограниченной полной вариацией) на \bar{D} ; обозначается $f \in BV(\bar{D})$.

Из (19) и (20) следует, что

$$(\forall e \in \mathbf{R}^3): V(f; \bar{D}, e) \leq V(f; \bar{D}),$$

и, следовательно, если $f \in BV(\bar{D})$, то $f \in BV(\bar{D}, e) (\forall e \in \mathbf{R}^3)$.

Если $f \in C^1(\bar{D})$, то в силу (1*) и теоремы о среднем

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{D}_k) &= \left(\int_{D_k} \partial_1 f(x) dx, \int_{D_k} \partial_2 f(x) dx, \int_{D_k} \partial_3 f(x) dx \right) = \\ &= (\partial_1 f(\xi_{1k}), \partial_2 f(\xi_{2k}), \partial_3 f(\xi_{3k})) |D_k|, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\xi_{ik} \in D_k (i = 1, 2, 3)$. Отсюда

$$|\nabla f(\bar{D}_k)| = \left(\left(\int_{D_k} \partial_1 f(x) dx \right)^2 + \left(\int_{D_k} \partial_2 f(x) dx \right)^2 + \left(\int_{D_k} \partial_3 f(x) dx \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (22)$$

Поэтому, если $D = \left(\bigcup_{k=1}^n D_k \right) \cup \left(\bigcup_{k \neq k'} S_{kk'} \right)$ (см. свойство 1'), то в силу неравенства Коши-Буняковского [К-Ф]

$$|\nabla f(\bar{D})| \leq \sum_{k=1}^n |\nabla f(\bar{D}_k)|. \quad (23)$$

Пусть

$$D_{1+n_\alpha}^\alpha = \bigcup_{k=1}^{n_\alpha} D_k^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots), \quad (24)$$

где

$$D_{1+n_\alpha}^\alpha \supset D_{1+n_{\alpha+1}}^{\alpha+1} \quad (\alpha = 1, 2, \dots),$$

т. е. (24) – последовательность вложенных друг в друга разбиений множества D (каждое последующее разбиение $D_{1+n_{\alpha+1}}^{\alpha+1}$ области D является разбиением предыдущего разбиения $D_{1+n_\alpha}^\alpha$ области D).

Тогда ввиду (23)

$$\sum_{k=1}^{n_\alpha} |\nabla f(\bar{D}_k^\alpha)| \leq \sum_{k=1}^{n_{\alpha+1}} |\nabla f(\bar{D}_k^{\alpha+1})| \quad (\alpha = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, для последовательностей типа (24) существует предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_\alpha} |\nabla f(\bar{D}_k^\alpha)| \quad (25)$$

(не превосходящий полной вариации (20)).

Теперь среди последовательностей (24) выделим те, у которых диаметры элементов разбиения стремятся к нулю, т. е.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq n_\alpha} \delta(\bar{D}_k^\alpha) = 0. \quad (26)$$

Для таких последовательностей предел (25) в силу второго равенства (21) равен интегралу

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_\alpha} |\nabla f(\bar{D}_k^\alpha)| = \int_{\bar{D}} |\text{grad } f(x)| dx.$$

А поскольку для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ в силу (20) существует разбиение $D_{1+n} = \bigcup_{k=1}^n D_k$ такое, что

$$\left| V(f; \bar{D}) - \sum_{k=1}^n |\nabla f(\bar{D}_k)| \right| \leq \varepsilon,$$

то, положив в (24) ((26)) $D_{1+n_1}^1 = D_{1+n}$, получим

$$\left| V(f; \bar{D}) - \int_{\bar{D}} |\text{grad } f(x)| dx \right| \leq \varepsilon.$$

Тем самым доказана следующая теорема (аналог теоремы Кронрода [1, 3])

Теорема 7. Если функция $f \in C^1(\bar{D})$, то её полная вариация на \bar{D}

$$V(f; \bar{D}) = \int_{\bar{D}} |\text{grad } f(x)| dx. \quad (27)$$

Следовательно, для $f \in C^1(\bar{D})$ полная вариация в смысле (20) совпадает со старшей вариацией в смысле Кронрода-Витушкина [1, 3]. Кроме того отметим, что интеграл в (27) в работе [2] принят за определение вариации (по Джустини) для функций многих переменных. Поэтому результаты, связанные с указанными двумя вариациями, имеют место и для вариации в смысле определения (20). Это указывает на то, что определение (20) является наиболее естественным при переходе от функций одной переменной к функциям многих переменных. Но обо всём этом (включая инвариантность свойств функций $f \in BV(\bar{D})$ при таком переходе) – во второй части данной работы. Там же будет рассмотрена связь вариации (20) с другими существующими вариациями функции многих переменных. При этом следует указать на важность понятия вариации при решении некорректно поставленных задач (см. [6] и ссылки там). Первую же часть работы завершим ещё одним важным определением, замыкающим определение 5.

Определение 7. Пусть функции $f \in C(\bar{D})$, $g \in BV(D)$;

$D_{1+n} = \bigcup_{k=1}^n D_k$ – произвольное разбиение области $D \in \Omega^3$,

$\lambda := \max_{1 \leq k \leq n} \delta(D_k)$, $x_k \in D_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Тогда предел

$$\int_{\bar{D}} f(x) d_{\nabla}(g(x)) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k) |\nabla g(\bar{D}_k)|, \quad (28)$$

если он существует и не зависит от разбиения D_{1+n} области D и выбора точек $x_k \in D_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), называется (полным) интегралом от функции $f \in C(\bar{D})$ по функции $g \in BV(D)$ на множестве $\bar{D} \in \Omega^3$.

Из этого определения следует

$$\left| \int_{\bar{D}} f(x) d_{\nabla}(g(x)) \right| \leq V(f; \bar{D}) \|f\|_C.$$

Если же $g \in C^1(\bar{D})$, то в силу (21), (28) получаем формулу для вычисления интеграла (28):

$$\int_{\bar{D}} f(x) d_{\nabla}(g(x)) = \int_{\bar{D}} f(x) |\text{grad } g(x)| dx. \quad (29)$$

Другие свойства интеграла (28) будут рассмотрены во второй части этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Витушкин, А.Г. О многомерных вариациях. М.: ГИТТЛ, 1955. 220 с.
2. Джусты, Э. Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации. М.: Мир, 1989. 240 с.
3. Иванов, Л.Д. Вариации множеств и функций. М.: Наука, 1975. 352 с.
4. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. М.: Наука, 1976. 544 с.
5. Леонов, А.С. Замечания о полной вариации функции нескольких переменных и многомерном аналоге принципа выбора Хелли // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 1. С. 69–80.
6. Леонов, А.С. Полные вариации высших порядков для функций нескольких переменных и их применение в теории некорректных задач // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 198–212.
7. Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: ГИТТЛ, 1957. 552 с.
8. Ректорис, К. Вариационные методы в математической физике. М.: Мир, 1985. 590 с.
9. Фиктенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1966. 656 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УДК 51(076.5)

**И.М. Борковская¹, Е.И. Ловенецкая¹,
О.Н. Пыжкова¹, Д. Мозырская²**

¹Белорусский государственный технологический университет,
Беларусь, г. Минск, e-mail: borkovskaia@gmail.com,
e_blinova@mail.ru, olga.pyzhcova@gmail.com

²Белостокский технический университет,
Польша, г. Белосток, e-mail: d.mozyrska@pb.edu.pl

УРОВНЕВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ КАК ЧАСТЬ УРОВНЕВОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИИ

Предлагается система оценки знаний, активизирующая учебную и познавательную деятельность студентов. Подчеркивается важность личностно-ориентированной уровневой образовательной технологии для качественной подготовки современного инженера.

Ключевые слова: *уровневая образовательная технология, педагогические измерения, уровневое тестирование.*

**I. M. Borkovskaya¹, E. I. Lovenetskaya¹,
O. N. Pyzhkova¹, D. Mozyrska²**

¹Belarusian State Technological University,
Republic of Belarus, Minsk, e-mail: borkovskaia@gmail.com,
e_blinova@mail.ru, olga.pyzhcova@gmail.com

²Bialystok University of Technology,
Poland, Bialystok, e-mail: d.mozyrska@pb.edu.pl

LEVEL TESTING AS PART OF THE LEVEL EDUCATIONAL TECHNOLOGY

The article presents some aspects of the approach to teaching Math based on a level technology of mathematical instruction process. We propose a knowledge evaluation that permits to determine the current education student's level.

Keywords: *level technology of mathematical instruction process, educational measurement, level testing.*

Основными задачами высшей технической школы остаются формирование у выпускников вузов системы необходимых знаний, умений и навыков, а также развитие способности и готовности применять эти знания в профессиональной деятельности. Этим задачам соответствуют два направления: во-первых, поиск путей повышения качества фундаментальной подготовки будущего инженера, его базовых, системообразующих знаний; во-вторых, компетентностный подход в обучении, где акцент делается на умении применять получаемые знания на практике. Необходимо, чтобы процесс обучения обеспечивал не только высокое качество фундаментальных знаний, но и готовность специалиста к профессиональной деятельности.

В современных условиях, когда уровень школьной математической подготовки абитуриентов, поступающих на инженерные специальности, в целом чрезвычайно низок и очевиден широкий разброс этого уровня, традиционная методология высшего образования, рассчитанная на абстрактного «среднего» студента, представляется недостаточно гибкой для эффективного ведения учебного процесса с учетом личности обучаемого, его способностей, начального уровня образования.

В этой связи возникает потребность в применении таких образовательных технологий, которые были бы ориентированы на активные методы овладения знаниями, развитие творческих способностей студентов, переход от поточного к личностно-ориентированному (индивидуализированному) обучению с учетом образовательных стандартов нового поколения и возможностей личности. Одной из таких образовательных технологий является личностно-ориентированная уровневая образовательная технология, которая пробуждает у студентов интерес к приобретению знаний и которая в течение нескольких лет разрабатывается и внедряется в учебный процесс на кафедре высшей математики Белорусского государственного технологического университета [1]. Целью уровневой технологии является создание условий для включения каждого студента в деятельность, соответствующую зоне его ближайшего развития, обеспечение условий для самостоятельного (и/или под контролем преподавателя) усвоения программного материала в том размере и с той глубиной, которую позволяют индивидуальные особенности обучаемого.

Весь курс изучаемой дисциплины разбивается на блоки-темы и три уровня их понимания. Первый уровень (базовый) обеспечивает возможность успешного продолжения обучения, второй – содержит материал, достаточный для обеспечения самостоятельной (или под контролем преподавателя) работы обучаемого с учебной литературой. Третий уровень (необязательный) предназначен для студентов, склонных к научно-исследовательской работе. Он дополняет и углубляет разделы первых двух

уровней, содержит более сложные задания олимпиадного характера, знакомит студентов с математическим моделированием по избранной специальности. Каждый студент получает одно из равносильных заданий по теме сразу на всех уровнях, однако к выполнению последующего уровня приступает лишь после выполнения всех заданий предыдущего. При выполнении уровневых заданий сильный студент, как и слабый, обязан выполнить стандартные задачи базового уровня, при этом, как правило, он делает это гораздо быстрее и часто более оригинальным методом. В результате выполнения задания каждый студент оказывается на своем уровне.

Такой подход к методике преподавания способствует созданию ситуаций успеха в учебно-познавательной деятельности и в целом направляет процесс обучения не только на усвоение информации, но и на формирование самостоятельности студентов, на раскрытие их личностного потенциала, повышение их внутренней мотивации. Происходит первоначальное осмысление студентом собственных индивидуальных особенностей усвоения учебного материала. Уровневая методология ориентирована на выполнение важнейшей задачи высшей школы – подготовку специалистов, способных творчески мыслить и самостоятельно работать, определять проблемы и находить пути их решения. Использование уровневой образовательной технологии – один из факторов, способствующих активизации мотивационной сферы, без которой невозможно развитие и саморазвитие личности. Безусловно, преподавателю необходимо использовать средства и методы, которые способствовали бы выработке у студентов мотивации к изучению предмета и давали бы стимул к личностному развитию и профессиональному росту.

Переход на уровневую систему обучения требует серьезной подготовительной работы по методическому обеспечению учебного процесса [2]. Направления уровневого методического обеспечения учебного процесса в основном традиционны по содержанию: лекции, практические и лабораторные занятия, контрольные и самостоятельные работы, работа под контролем преподавателя, экзамены (в том числе и в виде тестов) и др., однако организуются они по уровневой методологии.

Одной из составных частей уровневой образовательной технологии преподавания математических дисциплин является уровневое тестирование как форма оценивания знаний студентов [3]. В процессе обучения математике можно продуктивно использовать различные формы уровневого тестирования:

предварительный контроль (успех изучения любой темы (раздела или курса) зависит от степени усвоения тех понятий, терминов, положений и т.д., которые изучались на предшествующих этапах обучения). Если информации об этом у преподавателя нет, то он лишен возможности проек-

тирования и управления в учебном процессе, выбора оптимального его варианта. Необходимую информацию преподаватель получает, применяя предварительный контроль (учет) знаний. Последний необходим еще и для того, чтобы зафиксировать (сделать срез) исходного уровня знаний. Сравнение исходного начального уровня знаний с конечным (достигнутым) позволяет измерить их «прирост», а также выявить степень выработки необходимых умений и навыков. Если известны входные и выходные характеристики системы, проблемы ее оптимизации считаются во многом решенными;

текущий контроль (как практический, так и теоретический). Он нужен для диагностирования хода дидактического процесса, выявления динамики последнего, сопоставления реально достигнутых на отдельных этапах результатов с запроектированными. Кроме собственно прогностической функции, текущий контроль и учет знаний, умений стимулирует учебный труд учащихся, способствует своевременному определению пробелов в усвоении материала, повышению общей продуктивности учебного труда и может осуществляться в ходе повседневной учебной работы;

рубежный контроль (например, когда в начале следующего семестра контролируется усвоение материала предыдущего). Рубежный (поэтапный, периодический) тестовый контроль проводится обычно после изучения логически законченной части (раздела, модуля) программы или в конце учебного периода (семестра, курса). Он состоит в проверке учебной деятельности по освоению сравнительно большего объема материала и должен обладать достаточно высокой надежностью и валидностью;

итоговый контроль (когда контролируются знания по разделам читаемого курса или по курсу в целом). Осуществляется во время заключительного повторения, а также в процессе экзаменов (зачетов). Именно на этом этапе дидактического процесса систематизируется и обобщается учебный материал. С высокой успешностью могут быть применены соответствующим образом составленные тесты обученности. К сожалению, терминология видов и уровней контроля до конца не установлена, и разные авторы используют термины различно.

Более подробно остановимся на уровневой идеологии рубежного и итогового контроля.

Слово «тест» (test) английского происхождения и на языке оригинала означает «испытание», «проверка». Тест обученности — это совокупность заданий, сориентированных на определение (измерение) уровня (степени) усвоения определенных аспектов (частей) содержания обучения. Степень обученности зависит от степени реализации цели обучения. Обученность включает: наличный, имеющийся к сегодняшнему дню, запас знаний; сложившиеся учебные действия, умения и навыки, фрагменты умения учиться.

Правильно составленные тесты обученности должны удовлетворять ряду требований. Они должны быть:

- относительно краткосрочными, т. е. не требовать больших затрат времени;
- однозначными, т. е. не допускать произвольного толкования тестового задания;
- правильными, т. е. исключать возможность формулирования многозначных ответов;
- относительно краткими, требующими сжатых ответов;
- информационными, т. е. такими, которые обеспечивают возможность соотнесения количественной оценки за выполнение теста с порядковой или даже интервальной шкалой измерений;
- удобными, т. е. пригодными для быстрой математической обработки результатов;
- стандартными, т. е. пригодными для широкого практического использования – измерения уровня обученности возможно более широких контингентов обучаемых, овладевающих одинаковым объемом знаний на одном и том же уровне обучения.

При формулировке тестовых заданий для всех видов тестов следует предусмотреть возможность получения в ответах студентов исчерпывающей информации как об уровне приобретенных и усвоенных знаний, так и об умении оперировать ими, об овладении логическими приемами мышления (анализа и синтеза, доказательства, аналогий и противопоставления, индукции и дедукции и др.). Например, тестовое задание по дисциплине «Эконометрика и экономико-математические методы и модели» может иметь вид:

1. Какова цель эконометрики:

- а) изучить качественные аспекты экономических явлений;
- б) определить способы сбора и группировки статистических данных;
- в) разработать способы моделирования и количественного анализа реальных экономических объектов;
- г) представить экономические данные в наглядном виде?

2. Что является основными задачами регрессионного анализа:

- а) составление прогноза и рекомендаций для конкретных экономических явлений по результатам эконометрического моделирования;
- б) нахождение случайной переменной;
- в) проверка качества параметров модели и самой модели в целом;
- г) установление формы корреляционной связи, т. е. установление вида функции регрессии?

3. Если парный коэффициент корреляции между признаками Y и X равен 1, то это означает:

- а) отсутствие связи;
- б) наличие слабой корреляционной связи;
- в) наличие обратной линейной связи;
- г) наличие прямой линейной связи.

4. Уравнение регрессии имеет вид $y = 5,32 + 0,54x$. На сколько единиц своего измерения в среднем изменится y при увеличении x на одну единицу своего измерения:

- а) увеличится на 5,86;
- б) увеличится на 0,54;
- в) увеличится на 5,32;
- г) не изменится?

5. Какие значения может принимать парный коэффициент корреляции:

- а) -1,975; б) 0,045;
- в) -0,524; г) 5,1?

6. Имеются следующие данные: коэффициент регрессии $b_1 = 4,225$, стандартная ошибка коэффициента регрессии $S_{b_1} = 0,25$. Определите $t_{расч\ b_1}$ (критерий Стьюдента) и оцените значимость коэффициента регрессии b_1 , если $t_{табл} = 2,11$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

- а) 0,059, коэффициент незначим;
- б) 16,9, коэффициент значим;
- в) 4,225, коэффициент значим;
- г) -16,9, коэффициент незначим.

7. Что называется мультиколлинеарностью:

- а) тесная линейная зависимость между факторными признаками;
- б) увеличение значимости оценок параметров модели;
- в) увеличение коэффициента детерминации при добавлении экзогенных переменных;
- г) зависимость между уровнями случайной переменной в различные промежутки времени?

8. Выберите аналог понятия «экзогенная переменная»:

- а) результат;
- б) независимая переменная;
- в) зависимая переменная, определяемая внутри системы;
- г) предопределенная переменная.

9. По следующим данным:

X	1	2	3	4	5
Y	4,5	5,5	4	2	2,5

вычислить коэффициент корреляции и проверить его значимость на уровне значимости 0,05, если $\sum X_i = 15$, $\sum Y_i = 18,5$, $\sum X_i^2 = 55$, $\sum Y_i^2 = 76,75$, $\sum X_i Y_i = 48$.

При разработке тестов важно, насколько они соответствуют запро-ектированным целям обучения, образования, развития обучаемых.

В рамках программы международного сотрудничества Белорусского государственного технологического и Белостокского технического уни-верситетов в области поиска эффективных форм учебного процесса было апробировано несколько разновидностей уровневого контроля в форме тестирования. Одна из форм уровневого тестирования такова: на каждое задание теста даются четыре ответа, различающиеся по уровню сложно-сти. Число правильных ответов варьируется от 0 до 4. Студент, отвечая на каждый вопрос предлагаемого ему задания, может указать «да», «нет» или не отвечать вообще. За каждый правильный ответ начисляется балл, при неправильном ответе — отрицательный балл, вопрос без ответа не оцени-вается. Однако если студент не выбирает ни один из предложенных вари-антов ответа на какое-либо задание, то назначается штраф (обычно равно-ценный одному неправильному ответу). Это стимулирует развитие (мате-матической) интуиции, поскольку попытка указать правильный ответ не ве-дет к потере баллов, если указывается не более одного ответа. К недостаткам этой формы тестирования следует отнести тот факт, что при таком тестиро-вании студенты часто «гадали», отвечая «нет» или «да» на все вопросы кон-кретного задания, не вдумываясь в задания по существу. Тогда было объяв-лено число правильных ответов от одного до трех из четырех предлагаемых на каждое задание и штраф, равноценный 5 неправильным ответам за все «да» или все «нет». Ситуация улучшилась, но и здесь обнаружили недос-татки. Применялись и другие схемы тестирования. Анализируя ситуацию в целом, отметим, что наиболее удачной оказалась форма тестирования, когда число правильных ответов от одного до трех (обычно два) из четырех без штрафов за отсутствие ответов по каждому заданию с начислением двух по-ложительных баллов за правильный и одного отрицательного за неправиль-ный ответы с возможностью вписать свой (студенческий) ответ.

Приведем пример уровневого тестового задания с использованием второй формы тестирования.

$$\text{Функция } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ в точке } x_0 = 0 :$$

а) является непрерывной;

б) является дифференцируемой, причем $f'(0) = \frac{1}{2}$;

в) имеет экстремум;

г) меняет выпуклость на вогнутость.

Во второй форме уровневого тестирования правильных ответов от одного до трех, при ответе правильно хотя бы на один и при отсутствии

неправильных начисляется балл (лучше 2 балла), при наличии хотя бы одного неправильного ответа – отрицательный балл, полностью правильно выполненное задание оценивается в три балла. При такой форме «угадывать» становится невыгодно.

Обычно данный контроль реализуется в форме экзамена или экзамена-теста. Если речь идет об экзамене, то он осуществляется на основании уровневого билета, где предлагаются задания двух типов: в заданиях первого типа уровни отмечены (обозначены), в других нет (скрытые уровни). Апробированы различные формы уровневого тестирования, проанализированы их достоинства и недостатки, а также выработаны некоторые принципы тестирования, однако универсальных рецептов, в том числе и уровневого, пока не найдено.

Тестирование как форма первичного контроля малоэффективно и нецелесообразно, однако и его применение при вторичном контроле требует большой осторожности и осмотрительности.

Тест целесообразен после обычных контрольных работ как итоговый контроль по теме, как рубежный контроль. Причем хорошо, когда этот тест уровневый, например, на данное задание теста приводится ряд ответов, из которых несколько правильных и которые различаются глубиной понимания контролируемого задания учебного материала. Возможна также «уровневая» система штрафов за отказы отвечать на какие-то задания.

В качестве форм текущего, рубежного и итогового контроля можно рекомендовать опрос по теории, математические диктанты, контрольные (без пользования справочной литературой) и самостоятельные (со справочной литературой) работы, тесты, расчетно-графические задания и др.

Главной формой контроля усвоения курса является итоговый экзамен или зачет (в устной форме, письменной, письменной с последующим устным собеседованием, в форме теста). Для большей эффективности контролируемых мероприятий целесообразно использовать уровневую технологию контроля качества обучения, при этом уровни могут быть скрытые, но непременным условием должно быть наличие в каждом уровне задании хотя бы одного простого ответа (базового уровня).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марченко, В.М.* Уровневая технология преподавания высшей математики в вузе / В.М. Марченко, И.М. Борковская, О.Н. Пыжкова // Труды БГТУ. Сер. VIII: Учеб.-метод. работа. 2009. С. 98–107.
2. *Марченко, В.М.* О методическом обеспечении и системе оценки знаний студентов в уровневой образовательной технологии / В.М. Марченко, И.М. Борковская, О.Н. Пыжкова // Тр. БГТУ. Сер. VIII: Учеб.-метод. работа. 2012. С. 39–41.

3. Марченко, В.М. Уровневое тестирование как часть уровневой образовательной технологии: опыт и перспективы / В.М. Марченко, И.М. Борковская, О.Н. Пыжкова // Университетское образование: опыт, проблемы, перспективы развития: тез. докл. III Междунар. конгресса, 15-17 мая 2013 г.: в 2 ч. Ч. 2 / отв. ред. Р.С. Пионова. Минск: МГЛУ, 2013. С. 79-83.

УДК 536.2

И. С. Веригин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: bondarevaib@ystu.ru

**ОБ ОПЫТЕ ОСВОЕНИЯ
ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ
ПРИ ИЗУЧЕНИИ СТУДЕНТАМИ–БАКАЛАВРАМИ
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
«ТЕПЛОТЕХНИКА И ТЕРМОДИНАМИКА»
ПО ПРОГРАММЕ ТРЕТЬЕГО ПОКОЛЕНИЯ**

Рассматривается опыт применения методики освоения студентами-бакалаврами основных положений многоплановой профессиональной компетенции ПК-1 при изучении курса «Теплотехника и термодинамика».

Ключевые слова: теплотехническое образование, бакалавриат, профессиональные компетенции, опыт освоения.

I. S. Verigin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: bondarevaib@ystu.ru

**ABOUT EXPERIENSE RUN IN PROFESSIONAL COMPETE
IN STUDY BACHELOR STUDENT IN QUESTION
DISCIPLINE «HEAT ENGINEERING AND
THERMODYNAMIC» BY PROGRAMME THIRD
ACROSS THE GENERATIONS**

The papers examines the experience of application of methods run by bachelor students basic postulates of versatile professional competence PC-1 in the study of discipline "Heat engineering and thermodynamic"

Keywords: heat power engineering education, bachelor student, professional competence, experience run in.

В рабочей программе третьего поколения учебной дисциплины «Теплотехника и термодинамика» направления 220 400 «Управление в технических системах» (профессиональный цикл, вариативная часть, заочная форма обучения) предусмотрено, при изучении данной дисциплины, формирование у студентов основной, из ФГОС ВПО, профессиональной компетенции ПК-1, оригинал которой, согласно пункту 5.2 ФГОС записан: «способность представить адекватную современному уровню знаний научную картину мира на основе знания основных положений законов и методов естественных наук и математики» [1].

С учётом основных разделов данной учебной дисциплины: технической термодинамики, теплопередачи и прикладной теплотехники (теплоэнерготехнологий) [2-4], в рабочей программе содержание ПК-1 изложено в формате: «способность представить адекватную современному уровню знаний картину мира на основе знаний основных положений законов и методов естественных наук и математики, **в части применения основных положений первого и второго законов термодинамики, теплопередачи в теплоэнерготехнологиях на основе методов математического анализа и моделирования**» [полужирное начертание - адаптация основного содержания ПК-1 по ФГОС контенту (содержанию) рабочей программы учебной дисциплины «Теплотехника и термодинамика», рассматриваемого в данной работе образовательного стандарта]

С учётом реальных и жёстких факторов заочной формы обучения по действующему учебному плану: малое количество часов лекций (8 часов); лабораторных занятий (4 часа); отсутствие практических или семинарских занятий; общая трудоёмкость дисциплины всего (72 часа); самостоятельная работа (60 часов); форма контроля (зачёт); отсутствие текущих консультаций; низкий уровень школьной подготовки студентов; по основному виду трудовой деятельности, как правило, студенты работают в качестве наёмных работников в секторе рыночной экономики, где, за редким исключением, не дают, положенного по трудовому законодательству, учебного оплачиваемого (и даже неоплачиваемого) отпуска студентам на экзаменационные сессии; высокие требования образовательного стандарта к качеству подготовки востребованных рынком выпускников – бакалавров и исключительная практической важностью учебной дисциплины (современная цивилизация существует, в основном, благодаря выработке и потреблению тепловой и электрической энергии), автором практикуется следующая форма обучения (по хронологии процесса):

1. **Лекции:** ознакомление с рабочей программой, значением дисциплины; беседа, по готовому на бумажном носителе, опорному конспекту по дисциплине (раздаточный вариант конспекта находится у каждого студента на руках во время лекции, этот же конспект выдаётся каждому сту-

денту (если он пожелает) на электронном носителе; ознакомление с тематикой контрольной работы, лабораторных занятий; выдача на руки: учебно-методических разработок автора для оперативного выполнения контрольной работы в течение семестра с подробным решением типовых задач, контрольных вопросов для зачёта по дисциплине в объёме рабочей программы, порядка сдачи зачёта, списка рекомендуемой литературы, согласованием времени консультаций в семестре (за счёт личного времени преподавателя, так как учебным планом такое время не предусматривается).

2. **Просмотр** и обсуждение учебных видеофильмов (на второй четырёхчасовой лекции) по третьей (прикладной) части дисциплины в специализированной учебно-исследовательской лаборатории вихревых теплогенераторов кафедры ДВС, где осуществляется важнейший аспект учебного процесса – визуализация, **во взаимосвязи**, основ теории теплоэнерготехнологий и их базовых конструктивно – компоновочных решений современных энергетических машин, вырабатывающих и потребляющих разные виды (формы) энергии, согласно требованиям ПК-1.

3. **Взаимосвязь** теоретического и практического материала курса (после просмотра видеофильмов) дополнительно (на лекционных часах в аудитории) формируется обсуждением раздаточного материала с базовыми математическими уравнениями, отражающими физическую сущность трёх основных разделов рабочей программы:

• **технической термодинамики** – акцентируется внимание на основные законы термодинамики, согласно которым работают (действуют) энергетические машины (первый и второй законы термодинамики) и их эффективность при преобразовании энергии в этих машинах; при этом рассматриваются три формулировки первого закона: «первый закон термодинамики, являясь частным случаем всеобщего закона сохранения и превращения энергии, устанавливает, что **теплота может быть преобразована (превращена) в механическую работу и, наоборот, работа в теплоту (первая формулировка)**»; «**невозможно построить вечный двигатель первого рода, то есть двигатель, который совершал бы механическую работу без подвода энергии со стороны (вторая формулировка)**»; «**теплота, подводимая к телу (в тепловом двигателе к рабочему телу) расходуется на изменение внутренней энергии тела и на совершение механической работы против внешних сил**» (третья формулировка, из которой вытекает его основное уравнение (без доказательства))

$$Q = \Delta U + L; \quad q = \Delta U + l, \quad (1)$$

где Q – количество теплоты, подводимое к телу произвольной массы, Дж; ΔU – изменение внутренней энергии тела, Дж; L – работа, совершаемая телом при его расширении против внешних сил, Дж; второе уравнение выражает тот же смысл, но все величины отнесены к 1 кг массы тела; второй

закон термодинамики – определяет условия, при которых возможно превращение (преобразование) теплоты в механическую работу, что в первом законе термодинамики никак не отражено; формулировок второго закона, как и первого, несколько, в раздаточном материале приводятся две формулировки, выражающие его практическую значимость для энергетических машин: «тепловая энергия может быть преобразована в механическую энергию лишь в том случае, если существует в машине разность температур между источником тепла и потребителем (первая формулировка)»; «невозможно построить вечный двигатель второго рода, то есть двигатель, который совершал бы механическую работу без разности температур и термическим КПД, равным единице» (вторая формулировка).

Уравнение второго закона (без вывода)

$$\Delta Q = T_{cp} \cdot \Delta S, \quad (2)$$

где ΔQ – теплота, подводимая к телу, Дж; T_{cp} – средняя температура тела в термодинамическом процессе подвода (или отвода) тепла, К; ΔS – изменение энтропии в данном процессе, Дж/К; общее уравнение первого и второго законов термодинамики:

$$T_{cp} \cdot \Delta S = \Delta U + L; \quad (3)$$

• **теплопередачи (теплообмена)** – один из основных процессов, протекающий в неживой и живой природе, в том числе в теплоэнерготехнологиях, внимание студентов акцентируется на основные законы и их математические формулировки: основной закон теплопроводности (закон Фурье)

$$dQ = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \cdot dF \cdot d\tau \quad (4)$$

и дифференциальное уравнение теплопроводности в наиболее простой конечной форме записи

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{\rho c}, \quad (5)$$

в уравнениях (4) – (5): Q , λ , t , n , x , y , z , ρ , c , q_v – соответственно тепловой поток, коэффициент теплопроводности, температура, координаты (n , x , y , z) тела, плотность, теплоёмкость тела и внутренние источники тепла в теле.

Уравнение (5) устанавливает фундаментальную связь между временным и пространственным изменением температуры в любой точке тела в самом общем виде (случае) и справедливо для всех без исключения процессов теплопроводности (что как раз соответствует требованиям ПК-1), но для решения конкретной задачи теплопроводности, в том числе технической, надо к уравнению (5) добавлять математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса, которые здесь, из-за ограниченного объёма статьи, не приводим, но на занятии они подробно обсуждаются в режиме реального времени.

Уравнение конвективного теплообмена (конвективной теплоотдачи) в базовой форме, Вт:

$$Q = \alpha \cdot F \cdot (t_{ж} - t_{ст}), \quad (6)$$

где Q , α , F , $t_{ж}$, $t_{ст}$ – соответственно тепловой поток, коэффициент теплоотдачи, поверхность передачи тепла, температуры энергоносителя (жидкости или газа) и поверхности стенки, с которой соприкасается (контактирует, омывает, обтекает) энергоноситель; акцентируется внимание студентов на то, что, несмотря на простоту записи уравнения (6), основная трудность в расчёте величины Q состоит в аналитическом нахождении надёжного значения величины коэффициента теплоотдачи α , вследствие невозможности, на сегодня, точно задать условия однозначности к системе дифференциальных уравнений конвективного теплообмена, из которых можно было бы также надёжно теоретически вычислить величину α для конкретной технической задачи; система дифференциальных уравнений также находится в раздаточном материале у студентов и анализируется преподавателем вместе со студентами в режиме реального времени на лекционном занятии.

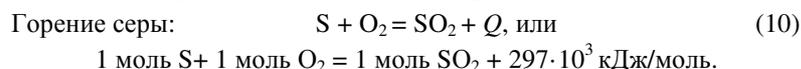
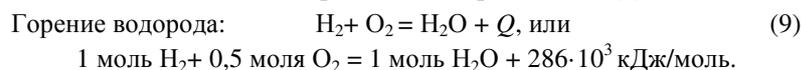
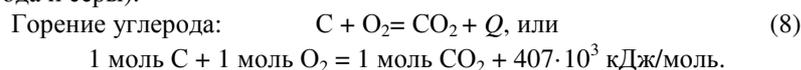
Лучистый теплообмен и его уравнения – также важнейший фундаментальный процесс в природе, в том числе и в теплоэнерготехнологиях, акцент фокусируется на основных законах лучистого теплообмена (из курса физики) и их адаптации к теплоэнерготехнологиям с упором на процессы горения органического топлива в топочных устройствах котельных агрегатов и промышленных и бытовых печей, как наиболее распространённых в настоящее время и в обозримом будущем. Полная система конечных (расчётных) уравнений лучистого теплообмена выдаётся на лекции в раздаточном материале, обсуждается и анализируется в режиме реального времени, здесь приведём лишь, в качестве примера, наиболее общее расчётное уравнение лучистого теплообмена между двумя телами, произвольно расположенными (ориентированными относительно друг друга) телами

$$Q_{1-2} = C_0 \cdot \varepsilon_{пр} \cdot F_p \cdot \psi_{1-2} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (7)$$

где Q_{1-2} – лучистый тепловой поток от более нагретого тела к менее нагретому, Вт; C_0 – коэффициент излучения абсолютно чёрного тела, Вт/м²·К⁴; $\varepsilon_{пр}$ – приведённая степень черноты двух взаимно облучающихся тел; F_p – условная расчётная поверхность лучистого теплообмена; ψ_{1-2} – средний угловой коэффициент облучённости двух тел; T_1 и T_2 – абсолютные температуры, соответственно, более и менее нагретых тел, участвующих во взаимном тепловом облучении, К;

• **теплоэнерготехнологии** – акцентируется внимание, в соответствии с содержанием ПК-1, в раздаточном материале, на фундаментальных теоретических (экзотермических) процессах горения органического топлива, на использовании которых получают около 80% теплоты в современ-

ных теплоэнерготехнологиях, с рассмотрением и анализом системы уравнений теплового и материального балансов процессов горения, первыми и основными из которых являются уравнения стехиометрических реакций горения основных горючих элементов органического топлива (углерода, водорода и серы).



В правой части уравнений (8) – (10) числовые величины, в кДж/моль, и есть та теплота, которая выделяется при сгорании количественной единицы массы (1 моль) топлива и расходуется при реализации конкретных теплоэнерготехнологий, автоматизацией и управлением которыми предстоит заниматься будущим выпускникам-бакалаврам.

Изложенная форма дидактики проведения занятий, как показывает опыт автора, позволяет на сегодня осуществить, на удовлетворительном уровне, освоить студентами основные положения многоплановой профессиональной компетенции ПК-1; при этом из рекомендуемых ФГОС ВПО стандартных средств контроля освоения компетенций, наиболее результативными являются непосредственное живое собеседование преподавателя со студентами и устный опрос при защите отчётов по лабораторным работам, контрольной работы, итоговом зачёте в объёме контрольных вопросов по программе данной дисциплины.

Активное и комплексное рассмотрение и обсуждение преподавателем, на всех видах аудиторных занятий, в режиме реального времени основных положений и требований профессиональных компетенций инженерно-технических направлений ФГОС ВПО, способствует повышенному интересу у студентов-заочников к студенческой научно-исследовательской деятельности, которые подготовили доклады и их тезисы к опубликованию в отдельной подсекции «Теплотехника» в рамках 67-й Всероссийской научно-технической конференции студентов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием, проводимой в ЯГТУ в 2014 году.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральный государственный общеобразовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 220400 Управление в технических системах (квалификация (степень) «Бакалавр»). Утверждён Минобрнауки РФ 22 декабря 3009 г, 15 с.

2. Теплотехника: Учебник для вузов /А. М. Архаров, И. А. Архаров, В. Н. Афанасьев и др.; под общ. ред. А. М. Архарова, В. Н. Афанасьева. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 712 с.
3. Теплопередача: Учебник для вузов / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Энергоиздат, 1981. 416 с.
4. *Рудобашина, С. П.* Теплотехника. М.: Колосс, 2010. 559 с.

УДК 544.45

И. С. Веригин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail*: bondarevaib@ystu.ru

**О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГОРЕНИЯ
ТВЁРДОГО РАСПЫЛЕННОГО ТОПЛИВА
В РАЗРАБОТКЕ ДИДАКТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ
ОСВОЕНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ
В УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
«ТЕПЛОТЕХНИКА И ТЕРМОДИНАМИКА»**

Рассматривается опыт и аспекты применения системы дифференциальных уравнений, описывающих процессы сгорания твёрдого распыленного топлива при освоении профессиональных компетенций студентами-заочниками в части теплоэнерготехнологий.

Ключевые слова: *теплотехническое образование, бакалавриат, специалитет, профессиональные компетенции, опыт освоения.*

I. S. Verigin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, *e-mail*: bondarevaib@ystu.ru

**ABOUT MATHEMATICAL MODEL OF HARD POWERED
FUEL COMBUSTION IN THE DEVELOPMENT OF DIDACTIC
SUPPORT OF STUDING PROFESSIONAL COMPETENCES
IN THE EDUCATIONAL DISCIPLINE
“HEAT ENGINEERING AND THERMODYNAMIC”**

The papers examines experiment and aspects application system differential equalization description process combustion hard dispersion fuel by assimilation professional competence by student beching eye into partly power engineering technology.

Keywords: *heat power engineering education, bachelor student, specialize, professional competence experience run in.*

Процессы горения (сгорания) органического топлива в биосфере Земли, и в теплоэнерготехнологиях в частности, являются одним из фундаментальных процессов (законов) Земной природы, познание (освоение) которых предусмотрено в контенте ФГОС ВПО третьего поколения инженерно-технологических и энергомашиностроительных направлений. Из всех видов органического топлива, применяемого в современных теплоэнерготехнологиях (газ, нефть, древесина, биомасса, уголь и др.), уголь, теплотворная способность и большие запасы в недрах земли которого вполне приемлемы и экономически оправданы для широкого использования его в топливных устройствах теплоэнерготехнологий, требует при этом предварительной подготовки (переработки – превращения в пыль) для последующего сжигания при помощи специальных пылеугольных горелок в топочных устройствах (топках) камерного типа.

Основными тепловыми характеристиками интенсивности процесса горения в топочном устройстве является тепловое напряжение топочного объёма, представляющее собой тепловую мощность топки (кВт/м^3), отнесённую к её объёму без учёта тепловых потерь в топке:

$$q_v = q/V_T = B \cdot q_n^p / V_T, \quad (1)$$

где B – расход топлива, кг/с или $\text{м}^3/\text{с}$; q_n^p – низшая удельная теплота сгорания топлива, кДж/кг или кДж/м^3 ; q – тепловая мощность выделяемая при горении топлива в объёме топочного пространства, кВт .

Оптимальные значения q_v зависят от сорта топлива и **способа его сжигания** и составляют, в частности, для пылеугольных топок, в котлоагрегатах крупных котельных, тепловых электростанций (ТЭС) и теплоэлектроцентралей (ТЭЦ) – основных источниках выработки (производства) тепловой и электрической энергии, $140\text{-}230 \text{ кВт/м}^3$.

В условиях происходящего ныне реинжиниринга [2] высшего профессионального образования, в рамках формирования инновационной экономики, включающего модернизацию содержания и структуры образования, технологии обучения и ресурсного обеспечения, дисциплиной, оптимально обеспечивающей подготовку специалистов к инновационной деятельности, на начальном этапе профессионального становления является математика и математические методы познания сложных инженерно-технологических процессов и явлений.

Математическое описание топочного процесса горения твёрдого топлива необходимо для его моделирования с целью получения обобщённых соотношений и оптимизации компоновки топочного объёма (топки) в системе парогенератора (котла, котельной установки, промышленной печи, топливника бытовой печи и т. п.).

Вследствие сложности физико-химического процесса горения распыленного твёрдого топлива, к настоящему времени не имеется его надёжного и полного математического описания; поэтому в расчётной и про-

ектной инженерной практике пока имеется возможность применять уже разработанные упрощённые математические модели, например, приближённая математическая модель факельного горения полидисперсного топлива в топочной камере, по Д. М. Хзмаяну и Т. В. Виленскому, изложенная в [1, с. 118-120].

Система дифференциальных уравнений, описывающих горение пылеугольных частиц в топке теплогенератора, включает [1]:

1. Уравнение изменения температуры частиц топлива, записанное для фракции i , учитывающее выделение тепла при химических реакциях, конвективную теплоотдачу от частиц к несущему газу, диффузионную теплопроводность от окислителя к частицам, излучение на облучаемую поверхность и взаимное переизлучение частиц топлива друг на друга:

$$\frac{dT_i}{d\xi} = \frac{T_{r,b} X e^\xi \cdot 6}{T_r U_B F' \rho_i c_i \delta_i} \left\{ \frac{273}{T_r} Q_k \beta C K_{\text{эф}} - \frac{Nu \lambda}{\delta_i} (T_i - T_r) - \frac{273 C_r}{T_r \rho_r} C K_{\text{эф}} (T_i - T_r) - \sigma_0 \alpha \phi (T_i^4 - T_{об}^4) - \sigma_0 \alpha \sum_{n=1}^{n_\phi} \Phi_n (T_i^4 - T_n^4) \right\}. \quad (1)$$

В уравнении (1) учитывается характер движения газовой среды и частиц твёрдого топлива, при этом допускается, что скорость движения частиц равна скорости газового потока;

2. Уравнение изменения температуры газа, учитывающее выделение тепла от сгорающих в объёме летучих частиц, конвективный теплообмен между несущим газом и частицами распылённого топлива, диффузионную теплопроводность от потоков углекислого газа CO_2 и летучих, излучение, изменение температуры на основном участке (рис. 1) струи и турбулентную поперечную теплоотдачу в струе горелки:

$$\begin{aligned} \frac{dT_r}{d\xi} = & \frac{T_{пв} X e^\xi}{T_r U_B F' C_r} \left(\frac{Q_L (1 - W^p - A^p)}{\alpha_B V^0 + V_{H_2O}} \nu \left(\sum_{n=1}^{n_\phi} V_{в,п} - V_c \right) K'_{oc} e^{-E_c/RT} \right. \\ & + \sum_{n=1}^{n_\phi} \left[\frac{6}{\rho_k} Nu \lambda K^p \Phi \frac{\delta_n}{\delta_{n0}^3} + \frac{6 \cdot 273 K^p \Phi C_r}{T_r \rho_k \rho_r} (1 + \beta) C K_{\text{эф}п} \frac{\delta_n^2}{\delta_{n0}^3} \right. \\ & \left. \left. + \frac{C_r}{\rho_r} (1 - W^p - A^p) (V^T \Phi - V_{вп}) K_{об} e^{-E_b/RT_n} \right] \frac{\nu}{(\alpha_B V^0 + V_{H_2O})} \right. \\ & \left. \times (T_n - T_r) \frac{T_r}{273} \sigma_0 \alpha_\phi (S/V)_\phi (T_r^4 - T_{об}^4) \right\} + b_r (\xi - \xi_{оч}) + \Omega_r. \quad (2) \end{aligned}$$

3. Уравнение изменения диаметра частиц фракции i :

$$\frac{d\delta_i}{d\xi} = \frac{T_{z.6} X e^\xi}{T_z^2 U_6 F' \rho_k} \cdot 273 \cdot 2\beta C. \quad (3)$$

Уравнение кинетики выхода летучих:

$$\frac{dV_{bi}}{d\xi} = \frac{T_{r.в} X e^\xi}{T_r U_B F'} (V^T \Phi - V_{bi}) K'_{обв} e^{-E_b/RT}. \quad (4)$$

4. Уравнение кинетики сгорания летучих в объёме

$$\frac{dV_c}{d\xi} = \frac{T_{r.в} X e^\xi}{T_r \alpha_B F'} (\sum_{n=1}^{n_\phi} V_{в.п} - V_c) K_{ос} e^{-E_c/RT}. \quad (5)$$

Уравнение изменения концентрации кислорода, учитывающее расход кислорода на горение кокса и летучих, изменение концентрации на основном участке струи и турбулентную диффузию:

$$\frac{dC}{d\xi} = \frac{T_{r.в} X e^\xi c_B^0}{T_r U_B F'} \left\{ \sum_{n=1}^{n_\phi} \frac{6 \cdot 273}{\rho_k T_r} \beta v_k^0 \Phi C K_{эфп} \frac{\delta_n^2}{\delta_{n0}^3} + v_l^0 \frac{\sum_{n=1}^{n_\phi} V_{в.п} - V_c}{V^T} K_{ос} e^{-E_c/RT_r} \right\} \times \frac{v}{\alpha_B} + b_c (\xi - \xi_{оч}) - \frac{c_B^0 v \Omega_T}{\alpha_B (T_r^{top} - T_{го})}. \quad (6)$$

В уравнениях (1) - (6) приняты следующие обозначения: $T_r, T_i, T_{r.в}$ – текущая температура газа, частиц фракции i и температура газа на внутренней границе струи; $\xi = \ln(x/X)$ – безразмерная координата; x – расстояние от сопла, при $X = 10, x = X \cdot e^\xi$; δ_i, ρ_i, C_i – текущий диаметр, плотность и теплоёмкость частиц; U_B – скорость потока на выходе из сопла; $F = (\rho u / \rho_0 u_0)$ – функция скоростного поля, определяемая в соответствии с теорией турбулентных струй; Q_k, Q_l – теплота сгорания кокса и летучих; $V^T, V_{в}, V_c$ – выход летучих топлив, количество летучих, вышедшее из частицы и сгоревшее в объёме, v_k^0, v_l^0 – доля воздуха, идущего на сгорание кокса и летучих; α_B – коэффициент избытка воздуха на внутренней границе; C_r, ρ_r, λ_r – теплоёмкость, плотность и теплопроводность газа; C – текущая концентрация кислорода; β – стехиометрический коэффициент; $K_{эфп}$ – эффективная константа скорости реакции; σ и a – соответственно коэффициент излучения абсолютно чёрного тела и степень черноты частиц топлива; φ – коэффициент облучённости частиц; v – безразмерная концентрация топлива в струе; Ω – турбулентный теплообмен в струе; $n_\phi = 1/\phi$ – число фракций.

Приведенная система дифференциальных уравнений учитывает реагирование в кинетической и диффузионной областях горения при различающихся температурах частиц расплывленного твёрдого топлива и газа. Если рассматривать топливовоздушную смесь, при составлении систем уравнений, как единое целое (температура частиц топлива и газа одинако-

ва), а также при условии реагирования в кинетической области горения задача существенно упрощается.

На рис. 1 дана приближённая схема развития пылегазового потока при горении в топке, а на рис. 2 – результаты одного варианта решения приведённой системы уравнений факельного горения полидисперсного подмосковного угля [1].

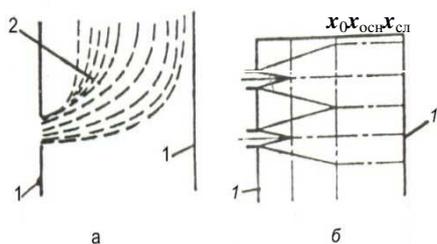


Рис. 1. Схема развития пылегазового потока при горении в топке теплогенератора: а – общая компоновка; б – упрощенная схема к математической модели: $x_0, x_{осн}, x_{сл}$ – соответственно координаты выходного поперечного сечения сопла горелки, формирования и развития струи факела горения; 1 – стены (ограждения) топочного объема; 2 – факел пламени

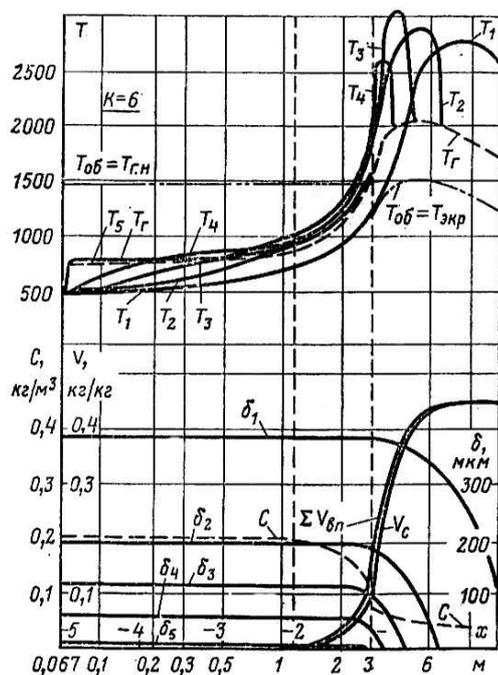


Рис. 2. Результаты решения на цифровой ЭВМ задачи о факельном горении пылеугольной смеси (луч $K = 6$)

Полидисперсный состав представлен пятью фракциями ($n_{\phi} = 5$). Как видно из рис. 2, для одного из лучей по длине факела получено изменение температуры частиц и газа, диаметра частиц, выхода летучих и их сгорания, концентрации кислорода.

Краткий дидактический анализ уравнений (1) – (6) и рис. 1 и 2, приведённых в [1], показывает: учитывая, что [1] носит гриф «учебника» и предназначен, прежде всего, для студентов, время обучения которых жёстко ограничено, некорректно отражены аспекты:

- нет ссылки на первоисточник, - откуда взята (заимствована) эта система уравнений, а названы лишь фамилии и инициалы авторов;

- не в полной мере приведена расшифровка обозначений параметров в уравнениях, в частности, не расшифрованы, что означают в приведённых уравнениях: $K, K_s, \Phi, E, K_p, Nu, F', e, W^p, A^p$, а на рис. 1 и 2 также не расшифрованы ни в тексте, ни в подрисовочных подписях обозначения: $K, T_{об}, T_{г.л.}$, индексы при $T_1-T_5, T_{эк}, \Sigma V_{вп.}$ (V , кг/кг), индексы при $x_0, x_{осн}, x_{сл}$; не приведены чётко условия однозначности и физические допущения (предпосылки) принятые при составлении указанных уравнений.

Всё это затрудняет, по затратам времени, оперативно приступить студентами к изучению и осмысливанию физической сущности описываемого процесса сгорания топлива при освоении ими соответствующей части профессиональных компетенций в области теплоэнерготехнологий.

Отмеченные неувязки дополнительно раскрываются преподавателем при подготовке этой темы в раздаточном материале, обсуждении его на лекционных занятиях, в режиме реального короткого времени, с акцентом на возможности с помощью решения системы уравнений на ЭВМ, получении выходных данных, используемых для проектирования оптимальных конструкций топочных устройств, что способствует, в первом приближении, полноте освоения контента обсуждаемых здесь компетенций и демонстрирует значение математики как инструмента познания основных законов современных технологических процессов в инженерно-техническом образовании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сидельковский, Л.Н. Парогенераторы промышленных предприятий / Л.Н. Сидельковский, В.Н. Юренев. – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергия, 1978. 336 с.
2. Попов, А.И. Реинжиниринг мат. подготовки будущих руководителей инновационных проектов / А.И. Попов, В.С. Любимов // Математика и мат. образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 8. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2012. 280 с.

УДК 339.1

А. Н. Жаров, И. Г. Жарова

Ярославский государственный технический университет,
Россия, г. Ярославль, e-mail: zharovan@ystu.ru

**ОБ ИЗЛОЖЕНИИ ТЕМЫ:
ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СЕЗОННЫХ ИЗМЕНЕНИЙ**

Рассмотрены особенности изложения темы “Прогнозирование сезонных изменений”. Основное внимание уделено аддитивным, мультипликативным моделям сезонных изменений и моделям с фиктивными переменными.

Ключевые слова: прогнозирование, сезонные изменения, аддитивная модель сезонных изменений, мультипликативная модель сезонных изменений, фиктивные переменные.

A. N. Zharov, I. G. Zharova

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: zharovan@ystu.ru

**ABOUT THE PRESENTATION OF THE THEME:
FORECASTING OF SEASONAL OF CHANGES**

It is examined the features of studying of the topic “Forecasting of seasonal changes”. The main attention is paid to the model of additive of seasonal changes, model of multiplicative of seasonal changes and model of dummy variables.

Keywords: forecasting, seasonal to changes, model of additive seasonal changes, model of multiplicative of seasonal changes, model of dummy variables.

С задачами прогнозирования сезонных изменений приходится сталкиваться в различных сферах деятельности, таких как экономика, демография, экологии, теория финансов, теория финансовых рынков и прочих [1, 2]. Однако изучение темы: «Прогнозирование сезонных изменений» весьма мало освещено в литературе. В связи с чем, предложим свой взгляд на изучение данной темы.

Стандартная постановка задачи прогнозирования сезонных изменений состоит в том, чтобы зная динамику изучаемого признака в ретроспективном периоде

Время	$t = t_1$	$t = t_2$	$t = t_n$
Значение признака	y_1	y_2		y_n

построить прогноз на последующие моменты времени $t = t_{n+1}$, $t = t_{n+2}$, и т.д., то есть на некоторый период упреждения.

Изучение темы следует начинать с введения или повторения понятия m -периодной скользящей средней, которая для четного числа точек усреднения m определяется выражением

$$\bar{y}_k = \frac{0,5 \cdot y_{k-\frac{m}{2}} + y_{k-\frac{m}{2}+1} + \dots + y_k + \dots + y_{k+\frac{m}{2}-1} + 0,5 \cdot y_{k+\frac{m}{2}}}{m}, \quad (1)$$

а для нечетного числа точек усреднения m определяется выражением

$$\bar{y}_k = \frac{y_{k-\frac{m-1}{2}} + y_{k-\frac{m-1}{2}+1} + \dots + y_k + \dots + y_{k+\frac{m-1}{2}-1} + y_{k+\frac{m-1}{2}}}{m}. \quad (2)$$

Для усреднения квартальных и месячных данных следует использовать выражения простых скользящих средних соответственно:

$$\bar{y}_k = \frac{0,5 \cdot y_{k-2} + y_{k-1} + y_k + y_{k+1} + 0,5 \cdot y_{k+2}}{4},$$

$$\bar{y}_k = \frac{0,5 \cdot y_{k-6} + y_{k-5} + \dots + y_k + \dots + y_{k+5} + 0,5 \cdot y_{k+6}}{12},$$

где k – номер квартала или номер месяца.

Для усреднения же недельных данных следует применять формулу

$$\bar{y}_k = \frac{y_{k-3} + y_{k-2} + y_{k-1} + y_k + y_{k+1} + y_{k+2} + y_{k+3}}{7},$$

где k - номер дня недели.

Таблица 1. Данные для примера

Год	Квартал	Объем продаж y_k
2010	I	206
	II	307
	III	409
	IV	156
2011	I	204
	II	346
	III	440
	IV	167
2012	I	247
	II	359
	III	490
	IV	200
2013	I	270
	II	360
	III	505
	IV	230

Так же следует помнить, что для нескольких начальных и конечных точек нельзя определить скользящее среднее по формулам (1), (2).

При построении прогнозов сезонных изменений обычно используются три основных модели: аддитивная модель; мультипликативная модель; модель, использующая фиктивные переменные. Рассмотрим особенности построения данных моделей.

В аддитивной модели сезонных изменений значение изучаемого признака определяется выражением

$$y_k = y_k^{\text{тренда}} + S_k + \varepsilon_k, \quad (3)$$

где $y_k^{\text{тренда}}$ – трендовая составляющая; S_k – аддитивная сезонная компонента; ε_k – случайная компонента. При использовании формулы (3) следует помнить, что сумма сезонных компонент должна быть равна нулю. Методику вычисления всех составляющих на основе данной модели продемонстрируем на конкретном примере.

Пример 1. В таблице 1 приведены условные квартальные данные об объеме продаж мороженого. Сделать прогноз на следующий год на основе аддитивной модели сезонных изменений.

Для построения прогноза выполним следующие действия:

- выровняем данные 4-периодной скользящей средней по формуле (1) при $m = 4$;

- найдем предварительную сезонную компоненту как разность $y_k - \bar{y}_k$;

- усредним сезонную компоненту по кварталам;

- найдем сумму сезонных компонент и распределим полученную сумму равномерно между кварталами так, чтобы сумма сезонных компонент была равна нулю;

- найдем разность между объемами продаж и сезонной компонентой $y_k - S_k$;

- по разности $y_k - S_k$ методом наименьших квадратов найдём уравнение прямой тренда $y_k^{\text{тренда}} = 6,2199 \cdot k + 253,13$;

- построим прогноз на основании выражения $\hat{y}_k = y_k^{\text{тренда}} + S_k$.

- найдем случайную компоненту $\varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k$.

Действия, описанные выше, иллюстрированы таблицей 2.

Таблица 2. Прогноз продаж мороженого на 2014 год по методу аддитивной сезонной компоненты

Год	Квартал	k	y_k	\bar{y}_k	S_k	\hat{y}_k	ε_k
2010	I	1	206		-66,22	193,13	12,87
	II	2	307		41,36	306,93	0,07
	III	3	409	269,25	150,86	422,65	-13,65
	IV	4	156	273,875	-126,01	152,00	4,00
2011	I	5	204	282,625	-66,22	218,01	-14,01
	II	6	346	287,875	41,36	331,81	14,19
	III	7	440	294,625	150,86	447,53	-7,53
	IV	8	167	301,625	-126,01	176,88	-9,88
2012	I	9	247	309,5	-66,22	242,89	4,11
	II	10	359	319,875	41,36	356,69	2,31
	III	11	490	326,875	150,86	472,41	17,59
	IV	12	200	329,875	-126,01	201,76	-1,76
2013	I	13	270	331,875	-66,22	267,77	2,23
	II	14	360	337,5	41,36	381,57	-21,57
	III	15	505		150,86	497,29	7,71
	IV	16	230		-126,01	226,64	3,36
2014	I	17			-66,22	292,65	
	II	18			41,36	406,45	
	III	19			150,86	522,17	
	IV	20			-126,01	251,52	

Рассмотрим особенности мультипликативной модели прогнозирования сезонных изменений. В данной модели динамика значения признака описывается уравнением

$$y_k = I_k \cdot y_k^{\text{тренда}} + \varepsilon_k, \quad (4)$$

где I_k – индекс сезонности. При использовании формулы (4) следует помнить, что сумма индексов сезонности равна числу сезонов. Следовательно, для квартальных данных сумма индексов сезонности равна 4, для месячных – 12, недельных – 7. Рассмотрим особенности построения мультипликативной модели сезонных изменений на примере.

Пример 2. По данным таблицы 1 сделать прогноз продаж мороженого на 2014 год на основе мультипликативной модели сезонных изменений.

Для построения прогноза выполним следующие действия:

- выровняем данные скользящей средней при $m = 4$;
- найдем предварительный индекс сезонности y_k/\bar{y}_k ;
- найдем среднее значение индекса сезонности в каждом квартале;
- найдем сумму индексов сезонности и равномерно распределим недостаток или избыток этой суммы так, чтобы сумма скорректированных индексов сезонности была равна 4;
- разделим объем проданного мороженого на индекс сезонности y_k/I_k ;
- полученную линию y_k/I_k по методу наименьших квадратов выровняем прямой $y_k^{\text{тренда}} = 7,0862 \cdot k + 247,37$;
- построим прогноз на 2014 год на основе выражения $\hat{y}_k = I_k \cdot y_k^{\text{тренда}}$;
- найдем случайную компоненту $\varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k$.

Основные величины расчета внесём в таблицу 3 для наглядности.

Рассмотрим модель прогнозирования, основанную на введении фиктивных переменных. Под фиктивной переменной будем понимать переменную, которая равна 1 на протяжении какого-то одного сезона и равна нулю во всех других сезонах. Зависимость между исследуемым признаком и фиктивными переменными для простоты можно принять линейной, хотя это не обязательное условие

$$y_k = a_0 + a_1 \cdot d_1 + a_2 \cdot d_2 + \dots + a_L \cdot d_L + a_{L+1} \cdot k + \varepsilon_k. \quad (5)$$

В формуле (5) L – число промежутков сезонности, а d_0, d_1, \dots, d_L – фиктивные переменные. Для квартальных данных $L = 4$, для месячных $L = 12$, для недельных $L = 7$. Коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_L, a_{L+1}$ – могут быть определены по методу наименьших квадратов. Применим метод фиктивных переменных к данным таблицы 1.

Таблица 3. Прогноз продаж мороженого на 2014 год по методу мультипликативной сезонной модели

Год	Квартал	k	y_k	\bar{y}_k	I_k	\widehat{y}_k	ε_k
2010	I	1	206		0,7807	198,65	7,35
	II	2	307		1,1332	296,38	10,62
	III	3	409	269,25	1,5067	404,75	4,25
	IV	4	156	273,875	0,5794	159,75	-3,75
2011	I	5	204	282,625	0,7807	220,78	-16,78
	II	6	346	287,875	1,1332	328,49	17,51
	III	7	440	294,625	1,5067	447,46	-7,46
	IV	8	167	301,625	0,5794	176,17	-9,17
2012	I	9	247	309,5	0,7807	242,91	4,09
	II	10	359	319,875	1,1332	360,61	-1,61
	III	11	490	326,875	1,5067	490,16	-0,16
	IV	12	200	329,875	0,5794	192,60	7,40
2013	I	13	270	331,875	0,7807	265,04	4,96
	II	14	360	337,5	1,1332	392,73	-32,73
	III	15	505		1,5067	532,87	-27,87
	IV	16	230		0,5794	209,02	20,98
2014	I	17			0,7807	287,17	
	II	18			1,1332	424,85	
	III	19			1,5067	575,58	
	IV	20			0,5794	225,44	

Пример 3. По данным таблицы 1 построить прогноз на 2014 год на основе метода фиктивных переменных.

Для реализации метода фиктивных переменных на основе метода наименьших квадратов найдем зависимость

$$\widehat{y}_k = 188 + 0 \cdot d_1 + 105 \cdot d_2 + 216,75 \cdot d_3 - 62,25 \cdot d_4 + 6,25 \cdot k,$$

которая и представляет собой прогнозное значение величины объема продаж мороженого. Затем найдем случайную компоненту $\varepsilon_k = y_k - \widehat{y}_k$. Основные расчетные величины занесем в таблицу 4.

При изложении данной темы особое внимание следует уделить проверке адекватности построенных моделей. Поскольку далеко не каждый выполненный прогноз будет адекватно отражать реальность и сбудется по прошествии периода упреждения. С математической точки зрения из большого числа возможных интерполяций функции y_k , выполненных по какой-то из моделей (аддитивной, мультипликативной, фиктивных переменных и прочих не рассмотренных в данной работе) в будущее, нужно отобрать «лучшую» или несколько «наиболее подходящих».

Таблица 4. Прогноз продаж мороженого на 2014 год по методу фиктивных переменных

Год	Квартал	y_k	d_1	d_2	d_3	d_4	k	\widehat{y}_k	ε_k
2010	I	206	1	0	0	0	1	194,25	11,75
	II	307	0	1	0	0	2	305,5	1,5
	III	409	0	0	1	0	3	423,5	-14,5
	IV	156	0	0	0	1	4	150,75	5,25
2011	I	204	1	0	0	0	5	219,25	-15,25
	II	346	0	1	0	0	6	330,5	15,5
	III	440	0	0	1	0	7	448,5	-8,5
	IV	167	0	0	0	1	8	175,75	-8,75
2012	I	247	1	0	0	0	9	244,25	2,75
	II	359	0	1	0	0	10	355,5	3,5
	III	490	0	0	1	0	11	473,5	16,5
	IV	200	0	0	0	1	12	200,75	-0,75
2013	I	270	1	0	0	0	13	269,25	0,75
	II	360	0	1	0	0	14	380,5	-20,5
	III	505	0	0	1	0	15	498,5	6,5
	IV	230	0	0	0	1	16	225,75	4,25
2014	I		1	0	0	0	17	294,25	
	II		0	1	0	0	18	405,5	
	III		0	0	1	0	19	523,5	
	IV		0	0	0	1	20	250,75	

Проверка адекватности прогнозных моделей, как правило, связана с изучением закона распределения и свойств случайной ошибки аппроксимации ε_k . Данная ошибка должна представлять собой случайную функцию. В связи с чем, при проверке адекватности модели следует проверить: случайность колебаний ε_k ; нормальность закона распределения ε_k ; равенство нулю математического ожидания $M(\varepsilon_k) = 0$; независимость уровней ε_k .

Остановимся более подробно на каждом пункте проверки адекватности прогнозной модели.

Случайность колебаний ε_k можно проверить по критерию серий или по критерию пиков. Критерий пиков рассматривать не будем. По критерию серий нужно найти медиану $Me(\varepsilon_k)$. У каждого числа ряда $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ поставить знак плюс или минус. Знак плюс ставится, если $\varepsilon_k > Me(\varepsilon_k)$, знак минус ставится, если $\varepsilon_k < Me(\varepsilon_k)$. При $\varepsilon_k = Me(\varepsilon_k)$ знак не ставится. Последовательность последовательно идущих знаков + или - называется серией. Ошибка аппроксимации считается случайной для 5 % уровня значимости, если выполняются неравенства

$$K_{\max} < [3,3 \cdot (\lg(n) + 1)]; \mu > [0,5 \cdot (n + 1 - 1,96 \cdot \sqrt{n - 1})], \quad (6)$$

где K_{\max} – протяженность самой длинной серии, μ – общее число серий, $[]$ – взятие целой части. Если хотя бы одно из неравенств (6) не выполняется, модель считается не пригодной для прогноза.

Нормальность закона распределения ε_k проще всего проверить критерием RS. Однако существует довольно большое число других методов проверки нормальности закона распределения: метод Вестергарда; исследование асимметрии и эксцесса; Хи-квадрат и другие. По методу RS, нужно найти величину

$$RS = (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min})/S,$$

где S – исправленное среднее квадратичное отклонение. Критерий RS должен лежать между верхним и нижним табличными значениями.

Равенство нулю математического ожидания $M(\varepsilon_k) = 0$ можно проверить на основе критерия Стьюдента. Вычисляется

$$t_{\text{расч}} = \frac{|\bar{\varepsilon}_k|}{S} \cdot \sqrt{n}$$

и сравнивается с табличным значением критерия Стьюдента $t_{\gamma, n-1}$, найденным для данной доверительной вероятности γ . Если справедливо неравенство $t_{\text{расч}} < t_{\gamma, n-1}$, то модель считается адекватной.

Независимость уровней ε_k проверяется на основе d -критерия Дарбина-Уотсона или с помощью коэффициента автокорреляции первого порядка. Коэффициент автокорреляции первого порядка вычисляется по формуле

$$r_{\text{расч}}(1) = \frac{\sum_{i=2}^n \varepsilon_i \varepsilon_{i-1}}{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i)^2}.$$

Если расчетное значение взятое по модулю меньше табличного $|r_{\text{расч}}(1)| < r_{\text{табл}}$, то уровни остаточной компоненты считаются независимыми, а модель адекватной. В противном случае модель не адекватна.

Результаты проверки адекватности построенных моделей сведем в таблицу 5, построенную для 5%-ного уровня значимости критериев.

Таблица 5. Результаты проверки адекватности построенных моделей

Критерий	Аддитивная модель	Мультипликативная модель	Модель фиктивных переменных
Критерий серий	$K_{\max} = 3 < 7$ $\mu = 9 > 4$	$K_{\max} = 3 < 7$ $\mu = 9 > 4$	$K_{\max} = 3 < 7$ $\mu = 9 > 4$
RS-критерий	$RS = 3,58$	$RS = 3,61$	$RS = 3,40$
	Нижнее значение $RS = 3,00$ Верхнее значение $RS = 4,21$		
Критерий Стьюдента	$t_p = 0,0003$	$t_p = 0,3764$	$t_p = 0$
	$t_{0,95;15} = 2,1315$		
Кэф. автокор.	$r_p = -0,310$	$r_p = -0,131$	$r_p = -0,307$
	$r_{\text{табл}} = 0,322$		

Анализируя таблицу 5, видим, что все прогнозы адекватны и годятся для использования. Для оценки точности прогноза используются величины: среднее абсолютное отклонение

$$\Delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i|;$$

средняя процентная ошибка

$$\delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\varepsilon_i|}{\hat{y}_i} \cdot 100.$$

Данные критерии позволяют среди адекватных моделей выбрать наиболее подходящую. Сравнение 3-х вышеописанных моделей можно видеть в таблице 6. Видно, что модель сезонных изменений, использующая фиктивные переменные, является наиболее точной.

Таблица 6. Сравнение точности сезонных моделей

Оценка точности	Аддитивная модель	Мультипликативная модель	Модель фиктивных переменных
Среднее абсолютное отклонение	8,55	11,71	8,53
Средняя процентная ошибка	2,94	4,10	2,92

Обобщая все вышеизложенное, отметим, что изучение темы «прогнозирование сезонных изменений» требует очень хорошей подготовки слушателей в области теории вероятностей и математической статистики. Так студенты должны: хорошо знать основные законы распределения случайных величин; уметь проверять статистические гипотезы, как относительно отдельных значений случайных величин, так и законов распределения; уметь подбирать критерии проверки статистических гипотез; знать и хорошо владеть методами регрессионного и корреляционного анализов; иметь представление о случайных функциях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутакова, М.М. Экономическое прогнозирование: методы и приёмы практических расчётов: учеб. пособие. М.: Кнорус, 2008. 68 с.
2. Дуброва, Т.А. Прогнозирование социально-экономических процессов. Статистические методы и модели: учеб. пособие. М.: Маркет ДС, 2007. 192 с.

УДК 51

Н. И. Иванова

Ярославский филиал Московского государственного университета
экономики, статистики и информатики
Россия, г. Ярославль, e-mail: natalii-i@list.ru

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕРАВЕНСТВ

Рассматриваются основные способы доказательства неравенств при подготовке студентов к математическим олимпиадам различных уровней.

Ключевые слова: *неравенство, метод, дифференцирование, интегрирование.*

N. I. Ivanova

*Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics
(Yaroslavl filial) Russia, Yaroslavl, e-mail: natalii-i@list.ru*

ON SOME METHODS OF PROOF OF INEQUALITIES

The main methods of proof of inequalities in preparing students for the mathematical Olympiads of different levels are considered.

Keywords: *inequality, method, differentiation, integration.*

Никогда не угадаешь, что ждет тебя на той или иной олимпиаде, какие будут задания, поэтому при подготовке к очередному мероприятию никогда не ставится цель, перерешать как можно больше задач, времени на это, как правило, не бывает. Цель другая – освоить наибольшее количество методов, которыми решается та или иная задача, и тогда при виде незнакомой задачи студент применит весь арсенал средств, которыми он овладел за время подготовки к олимпиаде, и результат обязательно будет. Подготовка к олимпиаде предполагает решение задач из различных разделов математики. Конечно, разбиение на темы весьма условное и некоторые темы могут пересекаться. Но решение задач на доказательство неравенств при подготовке к олимпиаде бывают всегда. Одно и то же неравенство можно доказывать различными методами. Задача перечислить все имеющиеся методы не стоит, остановимся лишь на некоторых. Разберем наиболее часто встречающиеся приемы, продемонстрировав соответствующие идеи на конкретных примерах.

Иногда доказательство алгебраического неравенства существенно облегчается, если умножить обе его части на некоторую функцию – мно-

гочлен от неизвестной так, чтобы получить, к примеру, равносильное неравенство.

Пример 1. Доказать неравенство

$$x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1 > 0. \quad (1)$$

Доказательство. Умножив обе части неравенства (1) на множитель $x^2 + 1 > 0$, получим равносильное неравенство

$$(x^2 + 1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) > 0,$$

которое можно переписать в виде

$$x^{10} + 1 > 0.$$

Ясно, что это неравенство выполняется при всех действительных значениях переменной x и, тем самым, исходное неравенство доказано.

Иногда помогает метод ведения новых переменных.

Пример 2. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} > a + b + c.$$

Доказательство. По формуле Коши имеем $A + B > 2\sqrt{AB}$, $A + C > 2\sqrt{AC}$, $B + C > 2\sqrt{BC}$, где A, B и C – любые действительные неотрицательные числа. Отсюда следует неравенство $A + B + C > \sqrt{AB} + \sqrt{AC} + \sqrt{BC}$. Положим $A = \frac{bc}{a}$; $B = \frac{ac}{b}$ и $C = \frac{ab}{c}$, где a, b, c – произвольные положительные действительные числа, откуда и следует требуемое неравенство.

При доказательстве некоторых неравенств целесообразно использовать свойства симметрии выражений.

Пример 3. Доказать неравенство

$$x(x - z)^2 + y(y - z)^2 \geq (x - z)(y - z)(x + y - z).$$

Доказательство. Преобразовав неравенство к виду

$$x^3 + y^3 + z^3 - x^2y - x^2z - y^2x - y^2z - z^2x - z^2y + 3xyz \geq 0,$$

получим для переменных x, y, z симметричное неравенство. Поэтому, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x \geq y \geq z$. В этом случае

$$x(x - z)^2 + y(y - z)^2 \geq 0 \geq (x - z)(y - z)(x + y - z).$$

Часто помогают знания отдельных свойств функций, например, таких как наибольшего и наименьшего значений, факта возрастания или убывания на промежутке, ограниченности и некоторых других.

Пример 4. Доказать неравенство

$$x^6 - 2x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 0,4 > 0.$$

Доказательство. Имеем $x^6 - 2x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 - x + 0,4 = x^4(x^2 - 2x + 2) - x^3 + x^2 - x + 0,4 \geq x^4 - x^3 + x^2 - x + 0,4 = x^2(x^2 - x + 1) - x + 0,4 \geq \frac{3}{4}x^2 - x + 0,4 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{15} > 0$.

Единственный факт, возможно, требующий пояснения, что наименьшее значение функции $y = x^2 - x + 1$ на всей числовой прямой равно $\frac{3}{4}$.

При доказательстве неравенств свойство ограниченности снизу или сверху функции на некотором множестве часто играет важную роль.

Например, если для всех x из некоторого множества справедливы неравенства $f(x) > A$ и $g(x) < A$, где A – некоторое число, то на этом множестве неравенство $f(x) > g(x)$ можно считать доказанным. Заметим, что часто $A = 0$, в этом случае говорят о сохранении знака функций $f(x)$ и $g(x)$ на множестве.

Пример 5. Доказать неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1, \quad 0 \leq a, b, c \leq 1.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(a) = a^2(1 - b) - c^2a + b^2 + c^2 - bc^2 - 1, \quad 0 \leq a \leq 1.$$

Если $b = 1$, то неравенство очевидно. Если $b \neq 1$, то $f(a)$ является квадратным трехчленом от a , ветви графика которого направлены вверх. Значит наибольшее значение функция $f(x)$ достигает на одном из концов отрезка $[0; 1]$. Поскольку

$$f(0) = b^2 + c^2 - bc^2 - 1 = (1 - c)(b^2 - (1 - c)) \leq 0,$$

$$f(1) = 1 - b - c^2 + b^2 + c^2 - bc^2 - 1 = b(b - 1) - b^2c \leq 0,$$

то на отрезке $[0; 1] f(x) \leq 0$, что и требовалось доказать.

Часто вопрос доказательства неравенства существенно упрощается при применении производной или интегрирования. Так нахождение производной оказывается весьма эффективным, если свойства функции на первый взгляд не очевидны.

Пример 6. Доказать неравенство

$$20x^7 + 28x^5 + 210x - 35 \sin 2x > 0, \quad x > 0. \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = 20x^7 + 28x^5 + 210x - 35 \sin 2x.$$

Поскольку эта функция имеет производную

$$f'(x) = 140x^6 + 140x^4 + 210 - 70 \cos 2x,$$

которая положительна на всей числовой оси, то функция $f(x)$ возрастает на всей оси и потому принимает каждое свое значение ровно в одной точке. Следовательно, уравнение $f(x) = 0$ может иметь не более одного корня. Легко видеть, что таким корнем уравнения $f(x) = 0$ является $x = 0$. Поскольку функция $f(x)$ определена на всей прямой и непрерывна на ней,

то для $x < 0$ имеем $f(x) < 0$, а при $x > 0$ имеем $f(x) > 0$. Поэтому решениями неравенства (2) являются все x из промежутка $(0; +\infty)$, и неравенство (2) доказано. Δ

А вот ещё интересный пример.

Пример 7. Доказать неравенство: $\sin \sqrt{x} < \sqrt{\sin x}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Доказательство. Сначала предположим, что $1 \leq x < \frac{\pi}{2}$. В этом случае, т.к. $\sin x < 1$, то $\sqrt{\sin x} > \sin x$. С другой стороны, $\sqrt{x} \leq x$ и функция синус возрастающая, следовательно, $\sin \sqrt{x} \leq \sin x$. Объединяя эти два неравенства, получим доказываемое неравенство в области $1 \leq x < \frac{\pi}{2}$. Предположим теперь, что $0 < x < 1$. Перепишем неравенство в эквивалентном виде (функции все положительные) $\sin^2 \sqrt{x} \leq \sin x$. Произведем замену $\sqrt{x} = t$ и перепишем неравенство в эквивалентном виде: $\sin t^2 - \sin^2 t > 0$. Заметим, что функция $f(t) = \sin t^2 - \sin^2 t$ в нуле обращается в нуль. Возьмем ее производную $f'(t) = 2t \cos t^2 - 2 \sin t \cos t$. В рассматриваемой области изменения параметра t выполняется неравенство $t > \sin t$. Также выполняется неравенство $t^2 < t$, при этом функция косинус является убывающей, следовательно, $\cos t^2 > \cos t$. Итак, мы получили, что у производной $f'(t)$ каждый сомножитель t и $\cos t^2$ больше соответствующего сомножителя $\sin t \cdot \cos t$. Это означает, что производная положительная на рассматриваемой области изменения t . Так как $f(0) = 0$, то при $t > 0$ выполняется $f(t) = \sin t^2 - \sin^2 t > 0$.

Иногда важна проверка на четность, нечетность, периодичность. Часто она может существенно облегчить доказательство неравенства.

Пример 8. Доказать неравенство

$$x^4 - 2x \sin x + 1 > 0.$$

Доказательство. Так как функция в левой части четная, то достаточно доказать неравенство при $x \geq 0$. Это наблюдение существенно упрощает доказательство неравенства. Разобьем этот промежуток на три области.

- 1) Пусть $0 < x \leq 1$. Тогда $0 < \sin x < x$ и $f(x) > x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 \geq 0$.
- 2) Пусть $x = 0$. Тогда $f(x) = 1 > 0$.
- 3) Пусть $x > 1$. Тогда $2x \sin x \leq 2x$, $x^4 > x^2$ и, значит, $f(x) \geq x^4 - 2x + 1 > x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 > 0$.

Метод оценок можно комбинировать с методом уменьшения числа переменных.

Пример 9. Доказать неравенство

$$x + y + \cos(xy) \geq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Доказательство. Так как $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, то $f(x; y) = x + y + \cos(xy) \geq 2\sqrt{xy} + \cos(xy) = 2t + \cos t^2$, где $t = \sqrt{xy}$. Если $g(t) = 2t + \cos t^2$, то $g'(t) = 2 + 2t \sin t^2 \geq 0$ при $0 \leq t \leq 1$, т.е. $g(t)$ возрастает на $[0; 1]$.

А значит, с учетом того, что $g(0) = 1$, получаем $g(t) \geq 1$ на $[0; 1]$.

При $t > 1$ очевидно, что $2t + \cos t^2 > 1$, что и требовалось доказать.

Иногда получается применить метод интегрирования. Рассмотрим этот метод подробнее.

Пример 10. Доказать неравенство

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, \quad x \geq 0.$$

Доказательство. Воспользуемся очевидным неравенством

$$\sin x \leq x, \quad x \geq 0.$$

Интегрируя обе части, получим соответствующее неравенство для площадей криволинейных трапеций

$$\int_0^x \sin x \, dx \leq \int_0^x x \, dx$$

или

$$-\cos x + 1 \leq \frac{x^2}{2},$$

откуда и следует требуемое неравенство для всех неотрицательных x .

Отметим, что некоторые неравенства возможно доказать несколькими методами. Так последнее неравенство легко доказываются с помощью формулы Тейлора второго порядка с остаточным членом в форме Лагранжа.

Пример 11. Доказать неравенство

$$\ln(2 \sin x) > \frac{1}{2}x(\pi - x) - \frac{5}{72}\pi^2, \quad x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим неравенство $\operatorname{ctg} x > \frac{\pi}{2} - x$, которое получается из очевидного неравенства $\operatorname{tg} \alpha > \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, заменой α на $\frac{\pi}{2} - x$. Интегрируя это неравенство, получим аналогичное неравенство для площадей криволинейных трапеций

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^x \operatorname{ctg} x > \int_{\frac{\pi}{6}}^x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx.$$

Откуда, выполнив необходимые преобразования, и получим требуемое неравенство.

Иногда бывает полезно вспомнить теоремы Ферма, Лагранжа, Коши и следствия из них.

Пример 12. Доказать неравенство

$$|\operatorname{arctg}x - \operatorname{arctg}y| \leq |x - y|.$$

Доказательство. По теореме Лагранжа:

$$\operatorname{arctg}x - \operatorname{arctg}y = \frac{1}{1+c^2}(x - y).$$

Так как дробь в правой части равенства не превосходит единицы, то неравенство доказано.

По аналогии можно доказать, что

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|,$$

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \quad 0 < b < a$$

и серию других неравенств.

Пример 13. Доказать неравенство

$$e^x - 1 > \ln(1 + x), \quad x > 0.$$

Доказательство. Применим теорему Коши к функциям $f(x) = \ln(1 + x)$ и $g(x) = e^x - 1$ на промежутке $[0; x]$. Тогда имеем $\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{e^x - 1} = \frac{1}{(1+c)e^c} < 1$, так как $c > 0$, что и требовалось доказать.

Заметим, что это неравенство, как и некоторые предыдущие, тоже можно доказать методом интегрирования.

Иногда помогает метод логарифмирования. Вот только один пример.

Пример 14. Доказать неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < 2.$$

Доказательство. Прологарифмируем обе части этого неравенства:

$$\ln \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{8}\right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \ln 2.$$

Используя неравенство $\ln(1 + x) < x$, $x > -1$, при желании его можно доказать одним из описанных выше методов, получим

$$\ln \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{8}\right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2^n})}{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln e < \frac{1}{2} \ln 4 = \ln 2.$$

Это далеко не все методы доказательства неравенств, которые можно предложить студентам для подготовки к олимпиадам различных уровней. Можно подробнее разобрать доказательство методом от противного, графический метод, метод математической индукции и некоторые другие. Конечно, для полного усвоения материала все эти методы нужно отрабатывать. Чтобы метод запомнился и остался в арсенале студента надолго, он должен быть применен им самостоятельно не один раз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бронштейн, Е. М.* Задачи студенческих олимпиад по математике / Е.М. Бронштейн, В.В. Водопьянов, Р.Д. Муртазина, В.И. Чебанов. Уфа: УГАТУ, 2011.
2. *Иванова, Н. И.* О некоторых методах решения и доказательства неравенств. Актуальные вопросы преподавания математики в образовательной организации высшего профессионального образования: сб. докл. очно-заоч. науч.-метод. семинара. Кострома: Изд-во Военной акад. защиты им. Маршала Советского Союза С.К. Тимошенко, 2014. С. 244 –258.
3. *Олехник, С. Н.* Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения / С.Н. Олехник, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко. М.: Факториал, 1997. 219 с.
4. *Ройтенберг, В. Ш.* Задачи студенческих математических олимпиад ЯГТУ / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова, Л.А. Сидорова Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2012. 127 с.

УДК 519.67

А. Б. Капранова, А. И. Зайцев

Ярославский государственный технический университет,
Россия, г. Ярославль, e-mail: kap@yars.free.net

**ПРОБЛЕМА ПОСТРОЕНИЯ ГРАНИЦЫ
ВЫПУКЛОГО МНОГОУГОЛЬНИКА**

На основе анализа литературных источников предлагается сравнение наиболее известных методов построения выпуклого многоугольника для конечного числа точек множества по различным признакам.

Ключевые слова: выпуклая оболочка, замыкание области, «натягивание», выпуклый многоугольник.

A. B. Kapranova, A. I. Zaitsev

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: kap@yars.free.net

**PROBLEM OF THE CONSTRUCTION
OF THE BOUNDARY FOR THE CONVEX POLYGON**

On the base of analysis of the literary sources the comparison of the most known methods for the construction of the convex polygon for the finite number according to different features.

Keywords: convex hull, closing of the region, «stringing», convex polygon.

Решение некоторых технических задач нередко связано с замыканием $\{y_\gamma^*\} = Y_p$, $\gamma = 1, N$ - реальной области работы технологического про-

цесса (например, с ограниченными входами), когда требуется построить границу Y_r для указанной области Y_p . Обратимся к предварительному анализу существующих методов построений искомой оболочки из множества Y_r для Y_p . Поиск выпуклой оболочки на плоскости можно наглядно интерпретировать как операцию стягивания петли веревки (лассо) вокруг вбитых в доску гвоздей. При этом основными трудностями являются:

- определение положения *крайних* точек (вершин) конечного множества;
- установление однозначного *порядка* их «соединения».

Приведем сравнение наиболее известных методов построения («настягивания») выпуклого многоугольника с числом вершин D для конечного числа точек N множества, которые условно классифицируем по следующим признакам [1-8]:

(1) *неоткрытые методы* – для фиксированного числа точек конечного множества:

- с логарифмической трудоемкостью $O(N \log N)$ (алгоритмы обхода – «сканирования» *Грэхема* [9] и его модификации, например, *Эндрю* [10], *Экла* и *Туссена* [11]; «быстрой оболочки» *Эдди* [12] и *Биката* [13]; «разделяй и властвуй» *Препарата* и *Хонга* [14] и его модификации;

- с «чувствительной к результату» трудоемкостью – линейной $O(DN)$ или квадратичной $O(D^2)$ (алгоритм «заворачивания подарка» *Джарвиса* [15]);

- комбинированные (алгоритмы – *Киркпатрика* и *Сайделя* [16]; *Чана* [17] при $O(N \log D)$ и его модификации;

(2) *открытые методы* – предполагают пополнение конечного множества точек новыми точками, например, динамические (алгоритм *Препарата* [4] логарифмической трудоемкостью $O(N \log N)$) и т.д.

Кратко остановимся на основных особенностях некоторых перечисленных методов. *Алгоритм Грэхема (Graham Scan)* заключается (1) в формировании первоначального списка крайних точек из всех возможных точек-кандидатов при их общем числе $k \geq 3$ (например, даже для трех, но неколлинеарных) – рис. 1, а. При этом начальная точка $y_{\gamma^0}^* \in \{y_{\gamma}^*\} = Y_p$, $\gamma = \overline{1, N}$: имеет минимум по ординате $y_{2,\gamma^0}^* = \min(y_{2,\gamma}^*) \forall y_{\gamma}^* = (y_{1,\gamma}^*, y_{2,\gamma}^*)$ или стоит левее других (минимум по абсциссе $y_{1,\gamma^0}^* = \min(y_{1,\gamma}^*)$) при условии соответствия минимальному уровню ординаты y нескольких точек-кандидатов, $y_{\gamma^0}^* \in Y_r$. Затем (2) каждая точка списка проверяется на условие ее «крайности» и при неудовлетворительном результате исключается из числа кандидатов (рис. 1, б - з).

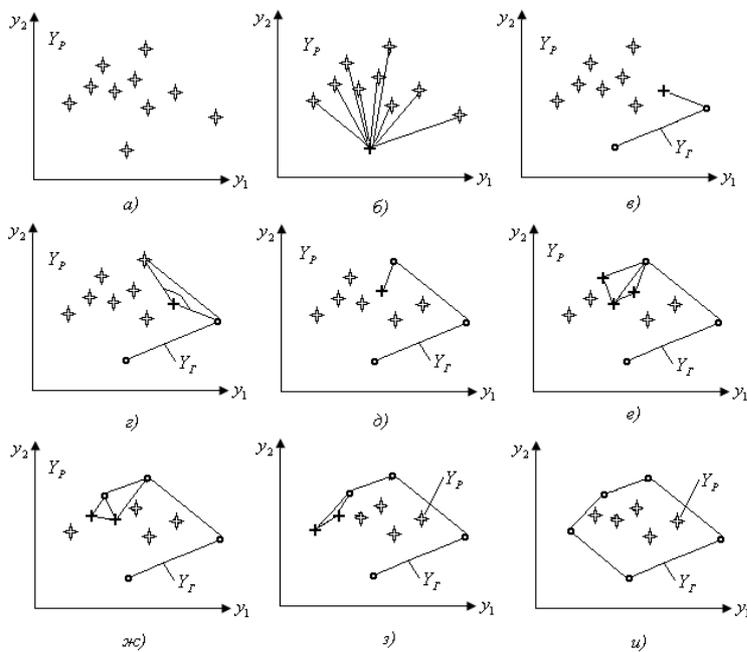


Рис. 1. Описание принципа работы алгоритма Грэхема

Сортировка происходит в порядке возрастания полярного угла (рис. 1, а; 1, б-г; 1, е-з), однако при равенстве нескольких углов критерием отбора служит расстояние до начальной точки $y_{y^0} \in \{y_y^*\} = Y_p$. Если при проверке указанного полярного угла, образованного выбранными точками, наблюдается не левый поворот, то производится движение по ломаной кривой между выбранными точками в прямом направлении или вправо. Критерий наличия левого поворота для трех точек (пусть при значениях $\gamma = m, n, v$ из списка $\gamma = \overline{1, N}$: $y_m^* = (y_{1,m}^*, y_{2,m}^*)$; $y_n^* = (y_{1,n}^*, y_{2,n}^*)$; $y_v^* = (y_{1,v}^*, y_{2,v}^*)$) – обобщение векторного произведения на плоскость в форме псевдоскалярного произведения векторов $(w_1 q_2 - w_2 q_1) > 0$, где $w = \{y_{1,m}^* - y_{1,n}^*, y_{2,n}^* - y_{2,m}^*\}$, $q = \{y_{1,v}^* - y_{1,m}^*, y_{2,v}^* - y_{2,m}^*\}$.

По окончании перебора (3) устанавливается порядок «соединения» крайних точек при их обходе против часовой стрелки (рис. 1, и). Оценочное выражение для времени работы «сканирования» Грэхема имеет следующий вид $O(N \log N)$.

Алгоритм Джарвиса (*Jarvis march*) последовательно стягивает крайние точки в выпуклую оболочку при фактическом повторе этапа (1) из алгоритма Грэхема с выбором начальной точки $y_{\gamma_0}^* \in \{y_\gamma^*\} = Y_P$, $\gamma = \overline{1, N}$ (рис. 2, а): $y_{2,\gamma_0}^* = \min(y_{2,\gamma}^*) \forall y_\gamma^* = (y_{1,\gamma}^*, y_{2,\gamma}^*)$ или стоит левее других $y_{1,\gamma_0}^* = \min(y_{1,\gamma}^*)$, $y_{\gamma_0}^* \in Y_G$ (рис. 2, б).

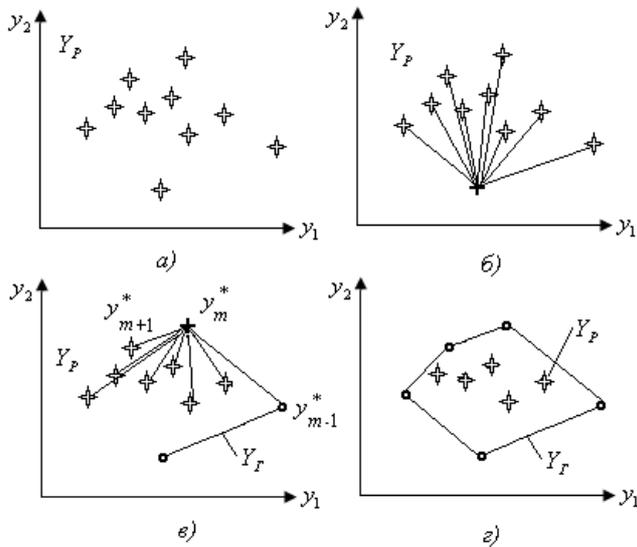


Рис. 2. Описание принципа работы алгоритма Джарвиса

На следующем этапе (2) выбирается любая точка при условии принадлежности к исходному множеству точек ($\gamma = t$ из списка $\gamma = \overline{1, N}$: $y_m^* = (y_{1,m}^*, y_{2,m}^*) \in Y_P$); но не на границе ($y_m^* \notin Y_G$). Для указанной точки y_m^* производится поиск точки против часовой стрелки с минимальным полярным углом между точками $y_{m-1}^*, y_m^*, y_{m+1}^*$, где при первом расчете в качестве y_{m+1}^* выбирается практически любая точка (рис. 2, в).

Критерий минимальности полярного угла соответствует обобщению векторного произведения на плоскость в виде псевдоскалярного произведения W между лучами $y_m^*, (y_{m+1}^*)'$ и $y_m^*, (y_{m+1}^*)''$, где $(y_{m+1}^*)' \in Y_G$ - уже найденная точка выпуклой оболочки, т.е. с минимальным полярным углом, а $(y_{m+1}^*)''$ - точка-кандидат (при первом расчете - любая). Если $W < 0$, то

$(y_{m+1}^*)' \in Y_\gamma$, т.е. это новая точка с минимальным полярным углом. Если $W = 0$, то точки $(y_{m+1}^*)' \in Y_\gamma$ и $(y_{m+1}^*)''$ - лежат на одной прямой и минимальной является та, которая находится дальше от точки y_m^* . Условие обрыва расчета – достижение равенства $y_{m+1}^* = y_{\gamma 0}^*$, т.к. $y_{\gamma 0}^* \in Y_\gamma$ (рис. 2, з). Оценочное выражение для времени работы «заворачивания подарка» Джарвиса - $O(DN)$, где D - число точек при $\gamma = \overline{1, N}$.

Алгоритм Чана представляет собой комбинацию двух ранее описанных алгоритмов – Грэхема и Джарвиса. Отметим, что применение «сканирования» Грэхема сдерживается значительным временем расчетов $O(N \log N)$, а «заворачивание подарка» Джарвиса соответствует наихудшему временному расходу, если все точки множества принадлежат выпуклой оболочке, т.е. $O(N^2)$ при полном переборе всех исходных точек. Алгоритм Чана предполагает (1) первоначальное разбиение множества $y_\gamma^* \in Y_\gamma$, $\gamma = \overline{1, N}$ (рис. 3, а) на h групп с общим числом в каждой – по S точек, т.е. $h = N/s$; $Y_p = \{Y_{p1}, Y_{p2}, \dots, Y_{ph}\}$, $y_{\beta, \mu}^* \in Y_{p\beta}$, $\beta = \overline{1, h}$, $\mu = \overline{1, s}$ (рис. 3, б).

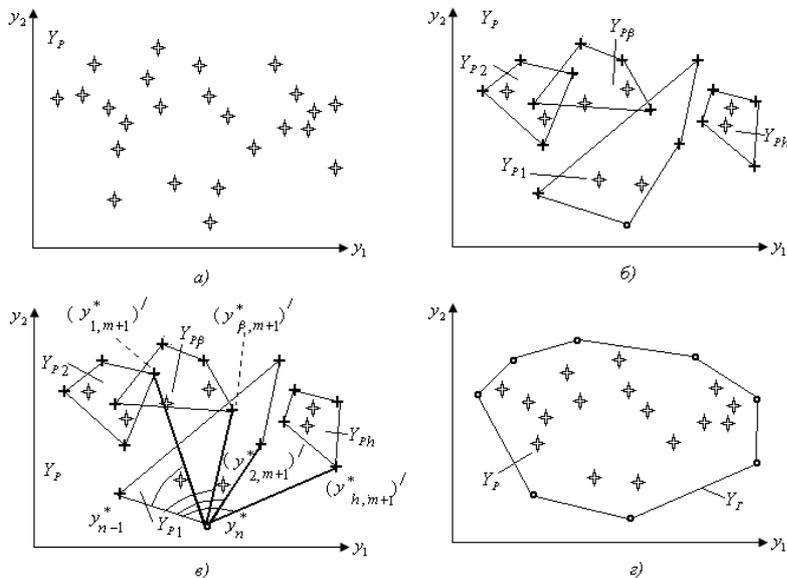


Рис. 3. Описание принципа работы алгоритма Чана

При этом следующим этапом (2) для каждой β -группы проводится «сканирование» Грэхема с рабочим временем $O(s \log s)$ или $O(hs \log s)$ для всех групп при $\beta = \overline{1, h}$. Этап (3) включает поиск самой нижней левой точки из уже найденных на выпуклых оболочках для каждой β -группы по алгоритму Грэхема (рис. 3, б), т.е. минимум по ординате $y_{2,\gamma_0}^* = \min(y_{2,\beta,\mu}^*) \forall y_{\beta,\mu}^* = (y_{1,\beta,\mu}^*, y_{2,\beta,\mu}^*)$ или минимум по абсциссе $y_{1,\gamma_0}^* = \min(y_{1,\beta,\mu}^*)$. Затем (4) – применяется алгоритм Джарвиса по поиску в каждой β -группе точки с максимальным углом $y_{\beta,m-1}^*, y_{\beta,m}^*, y_{\beta,m+1}^*$ при $\mu = t$ из списка $\mu = \overline{1, s} : y_{\beta,m}^* = (y_{1,\beta,m}^*, y_{2,\beta,m}^*) \in Y_{\beta\beta}$. Пусть $(y_{\beta,n+1}^*)'$ – искомые точки в каждой β -группе (рис. 3, в). Следующая точка общей выпуклой оболочки $(y_{n+1}^*)'$ для исходного множества $y_\gamma^* \in Y_p$, $\gamma = \overline{1, N}$ выбирается из полученного множества $\{(y_{1,m+1}^*)', (y_{2,m+1}^*)', \dots, (y_{h,m+1}^*)'\}$ с максимальным углом $y_{n-1}^*, y_n^*, y_{n+1}^*$ ($\gamma = n$ из списка $\gamma = \overline{1, N} : y_n^* = (y_{1,n}^*, y_{2,n}^*) \in Y_p$). Данная реализация схемы Джарвиса работает достаточно корректно при условии $s \geq D$, где D – число точек, определяющих выпуклую оболочку при $\gamma = \overline{1, N}$. Однако заранее неизвестно, сколько вершин будет иметь выпуклая оболочка (рис. 3, г). При этом бинарный поиск по N не ускоряет процесс расчета, т.к. будет соответствовать $O((N \log D) \log N) = O(N \log N)$, что равно времени работы алгоритма Грэхема. Итак, на обход точек необходимо время согласно соотношению $O(Dh \log s) = O((DN/s) \log s)$. Следовательно, для алгоритма Чана справедливо $O(Dh \log s) = O((N + DN/s) \log s)$ или при $s = D$ имеем временной показатель, равный $O(N \log D)$. Заметим, что ускорение можно получить, например, при выборе $s = 2^{2\sigma}$, где σ – номер итерации расчета.

Алгоритм «быстрой оболочки» (QuickHull) предлагает исследователю первоначальное деление всего исходного множества $\{y_\gamma^*\} = Y_p$, $\gamma = \overline{1, N}$ (рис. 4, а) на два подмножества $Y_p = Y_{p1} \cup Y_{p2} : \{y_{\gamma_1}^*\} = Y_{p1}$, $\{y_{\gamma_2}^*\} = Y_{p2}$ при условии, что каждому из них должна принадлежать одна из двух ломаных, чтобы объединение последних строило искомую границу. В частности, (1) выбираются две точки из Y_p (рис. 4, б): самая левая точка $y_{\gamma_0}^* = y_k^* \in Y_p$ при $\gamma = k$ (т.е. минимум по абсциссе $y_{1,\gamma_0}^* = y_{1,k}^* = \min(y_{1,\gamma}^*) \forall y_\gamma^* = (y_{1,\gamma}^*, y_{2,\gamma}^*)$) и

самая левая из оставшихся $y_{k+1}^* \in Y_P$ при $\gamma = k + 1$ (т.е. минимум по абсциссе $y_{1,k+1}^* = \min\{y_{1,1}^*, y_{1,2}^*, \dots, y_{1,k-1}^*, y_{1,k+1}^*, \dots, y_{1,N}^*\} \forall y_\gamma^* = (y_{1,\gamma}^*, y_{2,\gamma}^*)$). Затем (2) производится поиск точки y_{k+2}^* , которая расположена на максимальном расстоянии от прямой $y_k^* y_{k+1}^*$ (рис. 4, в). Точки, расположенные внутри треугольника $y_k^* y_{k+1}^* y_{k+2}^*$, исключаются из списка кандидатов в вершины выпуклой оболочки. Тогда первое подмножество $\{y_{\gamma_1}^*\} = Y_{P_1}$ включает все точки, расположенные левее прямых $y_k^* y_{k+2}^*$ и $y_{k+1}^* y_{k+2}^*$, а второе подмножество $\{y_{\gamma_2}^*\} = Y_{P_2}$ - правее этих линий $y_k^* y_{k+2}^*$ и $y_{k+1}^* y_{k+2}^*$.

Итак, получается, что каждое из подмножеств (Y_{P_1} и Y_{P_2}) будет содержать такие кусочно-линейные отрезки – ломаные, которые вместе с вершинами y_k^* , y_{k+1}^* , y_{k+2}^* образуют искомую границу. Далее рассуждения повторяются для каждого подмножества (Y_{P_1} и Y_{P_2}). Таким образом, поиск новых точек, максимально удаленных от выбранной прямой прекращается, когда эта линия – часть выпуклой оболочки, т.е. левее нее точки отсутствуют (рис. 4, д). Время работы алгоритма соответствует формуле $O(N \log N)$ или при наихудшем варианте равно $O(N^2)$.

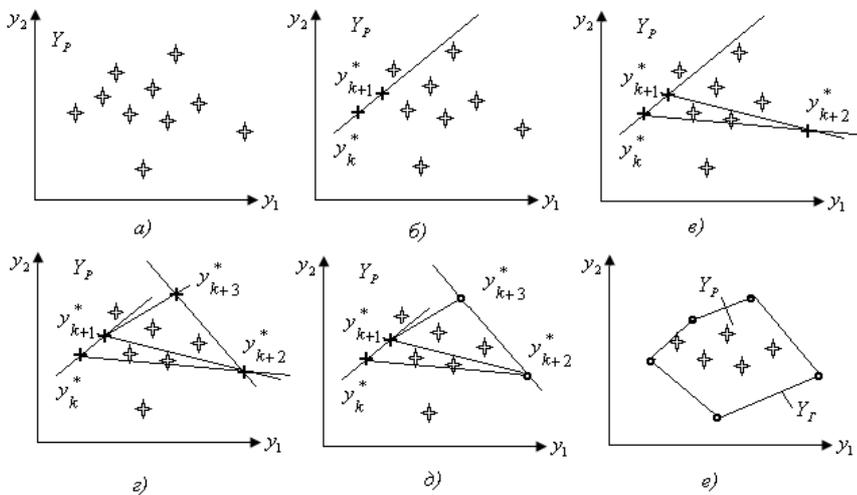


Рис. 4. Описание принципа работы «быстрой оболочки»

Алгоритм «разделяй и властвуй» (*Divide and conquer*) соответствует делению исходного множества точек $\{y_\gamma^*\} = Y_p$, $\gamma = \overline{1, N}$ (рис. 5, а) на два подмножества $Y_p = Y_{p1} \cup Y_{p2}$: $\{y_{\gamma 1}^*\} = Y_{p1}$, $\{y_{\gamma 2}^*\} = Y_{p2}$, в каждом из которых аналогично «быстрой сортировке» выполняется построение выпуклых оболочек (рис. 5, б), впоследствии объединяющихся в одну. Стыковка полученных двух оболочек представляет собой серьезную проблему, которая решается следующим образом. Если найдется такая точка, которая лежит внутри каждого из построенных двух выпуклых многоугольников (рис. 5, в), то дальнейшее упорядочивание точек может быть выполнено согласно алгоритму Грэхема при сортировке в порядке возрастания полярного угла (аналогично операциям на рис. 1, з; 1, e-з). Если имеется точка, которая принадлежит только одному подмножеству и является внутренней по отношению к соответствующему выпуклому многоугольнику (рис. 5, г), то необходимо построить из этой точки y_k^* две опорные прямые - левую $y_k^* y_{g2}^*$ и правую $y_k^* y_{v2}^*$. Каждая из этих прямых проходит через такие вершины данного выпуклого многоугольника, чтобы все точки этого подмножества находились только по одну сторону от искомой прямой линии.

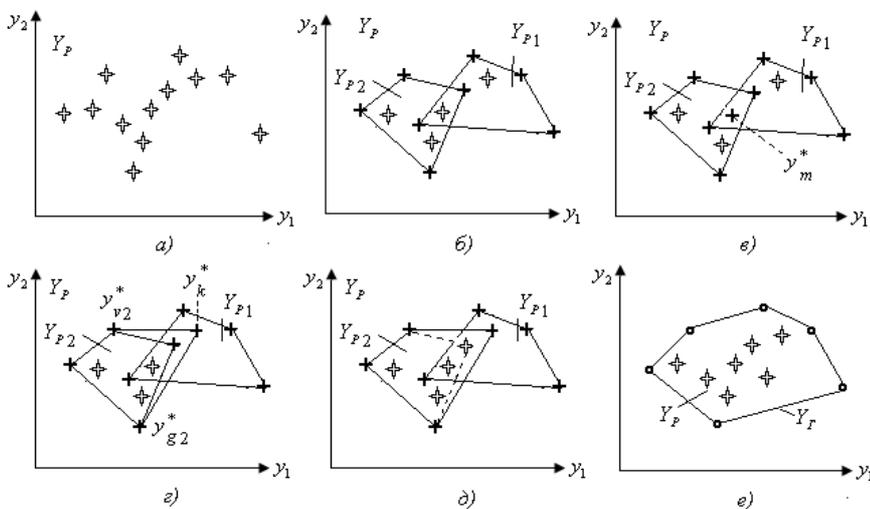


Рис. 5. Описание принципа работы алгоритма «разделяй и властвуй»

Тогда при движении от $y_k^* y_{g_2}^*$ к $y_k^* y_{v_2}^*$ против часовой стрелки выбрасываются все вершины подмножества Y_{p_2} , расположенные между точками $y_{g_2}^*$ к $y_{v_2}^*$ (рис. 5, *д*). Далее можно повторить операции, которые выполнялись, когда точка принадлежала обоим выделенным подмножествам. Время расчета для построения искомой выпуклой оболочки (рис. 5, *е*) определяется по формуле $O(N \log N)$.

Алгоритм *Препарата* [1] является динамическим, он позволяет с появлением новой точки y_N^* , $\gamma = N$ для исходного множества $\{y_\gamma^*\} = Y_p$, $\gamma = \overline{1, (N-1)}$ (рис. 6, *а*) изменять положение выпуклой оболочки при построении *опорных прямых* из новой точки-кандидата y_N^* к исходному выпуклому многоугольнику. Понятие опорной прямой соответствует введенному определению в алгоритме «разделяй и властвуй». Добавим, что различают опорные прямые: *левую (правую)* – если исходный выпуклый многоугольник расположен справа (слева) от этой прямой. Каждой вершине исходной выпуклой оболочки можно дать свое определение в зависимости от ее положения по отношению к новой точке-кандидату: *опорная вершина* – точка, при соединении которой с новой точкой множества, задается опорная прямая; *вогнутая вершина* – если отрезок между этой точкой и новой пересекает внутреннюю область оболочки; *выпуклая вершина* – не является опорной или вогнутой. Для исследователя возникают две основные задачи: (1) поиск опорных вершин исходного выпуклого многогранника; (2) замена нескольких вершин исходного многоугольника на новую точку-кандидата. Пусть вершина $y_m^* \in Y_\gamma$, $\gamma = t$ разбивает исходный выпуклый многоугольник на две части (рис. 6, *б*), затем определяется вершина $y_s^* \in Y_\gamma$, $\gamma = s$, расположенная левее других (минимум по абсциссе $y_{1,s}^* = \min(y_{1,\gamma}^*) \forall y_\gamma^* = (y_{1,\gamma}^*, y_{2,\gamma}^*)$, рис. 6, *в*).

Выбирается следующее правило обхода каждой полуцепи многоугольника: левая полуцепь – от начальной вершины по часовой стрелке, а правая – против часовой. Например, опорная вершина является левой в двух случаях: (1) при левом угле $y_s^* y_N^* y_m^*$ и вогнутой вершине y_s^* (рис. 6, *в*); (2) при правом угле $y_s^* y_N^* y_m^*$ и выпуклой вершине y_m^* . Тогда для правой опорной вершины – рис. 6, *г*, опорные прямые показаны на рис. 6, *д*, а новая выпуклая оболочка – на рис. 6, *е*. Заметим, что оценочное выражение для времени работы алгоритма *Препарата* имеет следующий вид: $O(N \log N)$.

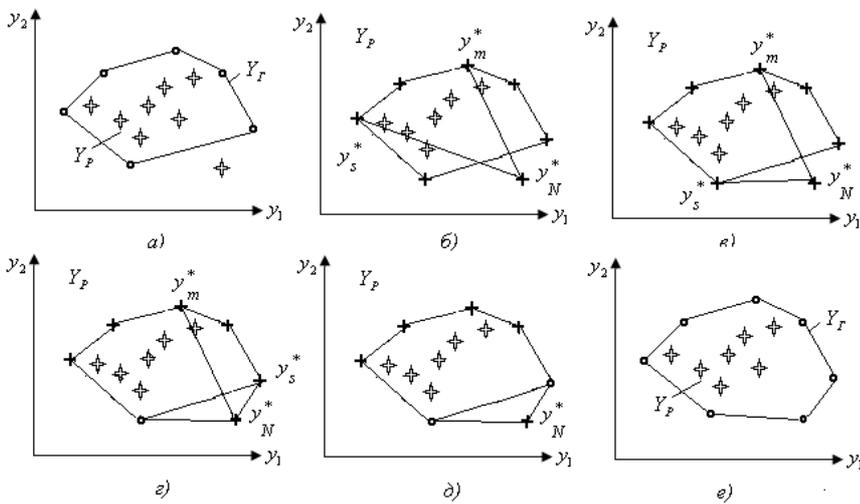


Рис. 6. Описание принципа работы алгоритма *Препарата*

Таким образом, подводя некоторые итоги построения выпуклого многоугольника с числом вершин D для конечного множества точек N на плоскости, сделаем ряд замечаний, основываясь на анализе литературных источников [1-8, 18-20], посвященных данному вопросу. При этом постараемся ответить на следующие возможные вопросы. Чем объяснить такое разнообразие методов с практически одинаковой скоростью расчета? Какой алгоритм работает быстрее? Какой метод выбрать для конкретной задачи? Если все указанные методы достаточно сложны в непосредственной реализации, то какие программные продукты могут помочь решить задачи построения выпуклого многоугольника на плоскости?

1. Работа методов с логарифмической трудоемкостью $O(N \log N)$, имеющих достаточное разнообразие, существенно зависит от характера «разбрасывания» точек конечного множества на плоскости. Например, при равномерном их распределении с условием $D \neq N$ – все эти алгоритмы (*Грэхема*, «быстрой оболочки», «разделяй и властвуй», *Препарата*) стремятся к линейной оценке временного показателя с явным преимуществом метода «быстрой оболочки» *Эдди и Биката*. Однако при $D = N$, в частности, когда вершины расположены на одной окружности, выигрывает алгоритм *Грэхема*. Алгоритм *Эдди и Биката* крайне неудачен в случае, когда наблюдается существенная неравномерность расположения точек множества на плоскости, в том числе, когда присутствуют одиночные «вкрапле-

ния» точек-кандидатов на значительном расстоянии от области «скопления» других точек. Следовательно, может реализоваться случай, когда даже при значительном числе итераций не удастся попытка исключить ни одной точки из списка кандидатов в вершины оболочки вследствие пустого их множества между выбранными прямыми для расчета методом «быстрой оболочки». Тогда на помощь приходит алгоритм *Препарата* и *Хонга*, способный «разделять» такие множества на удобные области и «властвовать» над ними, сокращая скорость выбора кандидатов в искомые вершины.

2. В некоторых случаях указанные ранее алгоритмы с логарифмической трудоемкостью $O(N \log N)$ могут быть даже предпочтительнее, чем алгоритм *Джарвиса* с его «чувствительным к результату» временем расчета. С одной стороны, при заранее известной информации о структуре выпуклого многоугольника, в частности, при возможном постоянстве числа его вершин ($D \approx \text{const}$) или при выполнении условия $D \ll N$, «заворачивание подарка» *Джарвиса* характеризуется линейной трудоемкостью $O(DN)$ и работает быстрее. Однако при выполнении $D \gg \log N$ алгоритм *Джарвиса* теряет свое первенство, причем равенство $D = N$ приводит даже к квадратичной оценочной зависимости $O(D^2)$, что не в пользу алгоритма, «чувствительного к результату».

3. Как уже отмечалось ранее, алгоритм *Чана* является удачной комбинацией своих предшественников - методов «сканирования» *Грэхема* и «заворачивания подарка» *Джарвиса*, и считается вместе со своими модификациями оптимальным в сравнении с классом «чувствительных к результату» алгоритмов при трудоемкости $O(N \log D)$. Алгоритм *Чана* и его модификации успешно выдерживают тесты с различными распределениями точек на плоскости: равномерным и неравномерным - нормальным, лапласовским, кластерным (положения центров кластеров - окружностей произвольного радиуса, с внутренней областью из равномерно «разбросанных» точек - результат случайной выборки).

4. Применение алгоритма *Препарата* считается оправданным только при постоянном пополнении списка точек-кандидатов в вершины выпуклого многоугольника из исходного множества новыми точками, т.е. для открытых в этом смысле задач. Динамический метод трудно отнести к облегченным или к скоростным алгоритмам.

5. Система MATLAB имеет комплекс пакетов *ToolBox*, предназначенных для работы с «разбросанными» данными [21]. Построение выпуклой оболочки выполняется как на плоскости (функция *convhull*), так в

n -мерном пространстве (функция *convhulln*). Для функции *convhull* входные аргументы – координаты точек-кандидатов в вершины; выходные аргументы – координаты точек-вершин выпуклой оболочки; результат работы – графическое представление с исходным множеством точек. И выпуклой оболочкой с вершинами в виде круглых маркеров. Дополнительно выводятся: массив *kvert* с указанием номеров искоемых вершин, а также площадь выпуклой оболочки. Кроме того, существуют и другие вспомогательные программные продукты, например, [22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Препарата, Ф.* Вычислительная геометрия: Введение: пер. с англ. / Ф. Препарата, М. Шеймос. М.: Мир, 1989. 478 с.
2. *Ласло, М.* Вычислительная геометрия и компьютерная графика на C++. М.: БИНОМ, 1997. 304 с.
3. *David, M.* Mount Computational Geometry // University of Maryland, 2002. 122 с.
4. *Тиморин, В.А.* Комбинаторика выпуклых многогранников. М.: МЦНМО, 2002. 16 с.
5. *Новиков, С.П.* Современные геометрические структуры и поля / С. П. Новиков, И. А. Тайманов. М.: МЦНМО, 2005. 580 с.
6. *Скворцов, А.В.* Эффективные алгоритмы построения триангуляции Делоне / А.В. Скворцов, Ю.А. Костюк // Геоинформатика. Теория и практика. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1998. Вып.1. С. 22-47.
7. *Скворцов, А. В.* Алгоритмы построения триангуляции с ограничениями // Вычислит. методы и программирование. 2002. Т.3, разд. 1. С. 82-92.
8. *Костюк, Ю.Л.* Основы разработки алгоритмов / Ю. Л. Костюк, И. Л. Фукс. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 286 с.
9. *Graham, R. L.* An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set // Information Processing Letters. 1972. Vol. 1. P. 132–133.
10. *Andrew, A.M.* Another efficient algorithm for convex hulls in two dimensions // Information Processing Letters. 1979. Vol. 9. P. 216–219.
11. *Akl, S.G.* A fast convex hull algorithm / S. G.Akl, G. T. Toussaint // Information processing letters. 1978. Vol. 7. P 219-222.
12. *Eddy, W.* A new convex hull algorithm for planar sets // ACM Transactions on Mathematical Software. 1977. Vol. 3(4). P. 398–403.
13. *Bykat, A.* Convex Hull of a Finite Set of Points in Two Dimensions // Information Processing Letters. 1978. Vol. 7. P. 296–298.
14. *Preparata, F. P.* Convex hulls of finite point sets in two and three dimensions / F. P. Preparata, S. J. Hong // Communications of the ACM. 1977. Vol. 2(20). P. 87–93.
15. *Jarvis, A.* On the identification of the convex hull of a finite set of points in the plane // Information Processing Letters. 1973. Vol. 2. P.18–21.
16. *Kirkpatrick, D. G.* The ultimate planar convex hull algorithm / D. G. Kirkpatrick, R. Seidel // SIAM Journal on Computing. 1986. Vol. 15. P. 287–299.

17. Chan, T.M. Output-Sensitive Construction of Convex Hulls: Ph.D. thesis // Department of Computer Science, University of British Columbia. 1995. P. 104.
18. Чаднов, Р.В. Модифицированный алгоритм Чена построения выпуклой оболочки на плоскости / Р. В. Чаднов, А. В. Скворцов, Н. С. Мирза // Теорет. и приклад. информатика / под ред. проф. А. Ф. Терпугова. Томск: Изд-во Томск. унта, 2004. Вып.1. С. 127-138.
19. <http://www.inf.tsu.ru/library/Publications/2004/82.pdf>
20. <http://www.inf.tsu.ru/library/Publications/2005/17.pdf>
21. <http://matlab.exponenta.ru/spline/book1/9.php>
22. <http://www.100byte.ru/100btwrks/cnvxhll/cnvxhll.html>

УДК 519.614

А. А. Коломоец, Е. В. Тупикова

Саратовский государственный технический университет
им. Ю.А. Гагарина,
Россия, г. Саратов, e-mail: kolomoetsaa@bk.ru,
e_tupikova_v@mail.ru

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Рассматриваются различные методы решения задач на собственные значения для симметричных и несимметричных матриц. Приводится сравнение этих методов.

***Ключевые слова:** полная проблема собственных значений, итерационные методы решения алгебраической проблемы собственных значений.*

A. A. Kolomoets, E. V. Tupikova

*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,
Russia, Saratov, e-mail: kolomoetsaa@bk.ru
e_tupikova_v@mail.ru*

METHODS FOR SOLVING PROBLEMS EIGENVALUE

Various methods of solving the eigenvalue problem for symmetric and asymmetric matrices are considered. The comparison of these methods is given.

***Keywords:** full eigenvalue problem, iterative methods for solving the algebraic eigenvalue problem.*

Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы является одной из наиболее сложных задач линейной алгебры. Многие задачи практики приводят к необходимости решения задач на собственные значения.

Полную проблему собственных значений для матриц невысокого порядка можно решить методом непосредственного разворачивания. В этом случае

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots & a_{nn} - \lambda & \dots \end{vmatrix} = P_n(\lambda).$$

Решая уравнение

$$P_n(\lambda) = 0,$$

находим собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Для разворачивания детерминанта $|A - E\lambda|$ можно использовать различные методы, например, метод Крылова, метод Данилевского, Леверье и другие.

При нахождении собственных значения для матрицы большого порядка метод непосредственного разворачивания становится весьма затруднительным. В таких случаях для решения используют итерационные методы решения алгебраической проблемы собственных значений:

1. Метод Якоби.
2. QR-алгоритм.
3. Степенной метод (метод итераций).
4. Метод скалярных произведений.
5. Метод исчерпывания.

Из этих методов наиболее часто используются метод Якоби (см., например, [3]) и QR – алгоритм (см., например, [1, 2, 4]).

Приведем сравнения различных методов нахождения собственных значений для симметричной и несимметричной матриц. Собственные значения были найдены при помощи программ, написанных нами на языках программирования C++ (метод Якоби) и C# (QR – алгоритм), а также при помощи пакета MatLab (см., например, [5]) и при помощи библиотеки ALGLIB (см., например, [7]). Расчеты проводились на компьютере с процессором AMDAthlon™ X2 Dual-CoreQL-60 1.90 GHz.

Собственные значения были получены для симметричной матрицы A и несимметричной матрицы B размера $n \times n$, приведенных ниже.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 01 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 10 & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 01 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Точное решение для собственных значений имеет вид

$$\lambda_k = 2\cos \frac{k\pi}{n+1}, k = 1, 2, \dots, n \text{ (см., например, [6]).}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Точное решение для собственных значений имеет вид

$$\lambda_k = 2i\cos \frac{k\pi}{n+1}, k = 1, 2, \dots, n \text{ (см., например, [6]).}$$

В таблицах приведены собственные значения, полученные для симметричной матрицы (табл. 1) и несимметричной матрицы (табл. 2). Как видно из таблиц, все методы дали точные результаты, но время нахождения собственных значений методом Якоби значительно меньше, чем в случае нахождения собственных значений матрицы QR-алгоритмом. Время, полученное при вычислении собственных значений пакетом MatLab и ALGLIB значительно меньше, чем при вычислении собственных значений методом Якоби и QR-алгоритмом.

Таблица 1. Собственные значения для симметричной матрицы

n	Метод Якоби		QR-алгоритм		ALGLIB		Пакет MatLab		точное решение
	Соб. числа	Время,с	Соб. числа	Время,с	Соб. числа	Время,с	Соб. числа	Время,с	
5	-1,732	0,006	-1,732	0,012	-1,732	0,069	-1,732	0,000036	-1,732
	-1		-1		-1		-1		
	0		0		0		0		
	1		1		1		1		
	1,732		1,732		1,732		1,732		
10	-1,919	0,018	-1,919	0,279	-1,919	0,071	-1,919	0,000065	-1,919
	-1,683		-1,683		-1,683		-1,683		
	-1,31		-1,31		-1,31		-1,31		
	-0,831		-0,831		-0,831		-0,831		
	-0,285		-0,285		-0,285		-0,285		
	0,285		0,285		0,285		0,285		
	0,831		0,831		0,831		0,831		
	1,31		1,31		1,31		1,31		
	1,683		1,683		1,683		1,683		
1,919	1,919	1,919	1,919						
15		0,072		2,364		0,073		0,000075	
20		0,231		10,596		0,075		0,000088	
30		1,674		117,777		0,078		0,000155	
50		21,239		610,206		0,108		0,000679	

Таблица 2 . Собственные значения для несимметричной матрицы

n	QR-алгоритм		ALGLIB		Пакет MatLab		точное решение
	Соб. числа	Время,с	Соб. числа	Время,с	Соб. числа	Время,с	
5	-1,732i	0,014	-1,732i	0,071	-1,732i	0,000055	-1,732i
	-i		-i		-i		-i
	0		0		0		0
	i		i		i		i
	1,732i		1,732i		1,732i		1,732i
10	-1,919i	0,283	-1,919i	0,073	-1,919i	0,00016	-1,919i
	-1,683i		-1,683i		-1,683i		-1,683i
	-1,31i		-1,31i		-1,31i		-1,31i
	-0,831i		-0,831i		-0,831i		-0,831i
	-0,285i		-0,285i		-0,285i		-0,285i
	0,285i		0,285i		0,285i		0,285i
	0,831i		0,831i		0,831i		0,831i
	1,31i		1,31i		1,31i		1,31i
	1,683i		1,683i		1,683i		1,683i
	1,919i		1,919i		1,919i		1,919i
15		2,364		0,074		0,000203	
20		10,634		0,076		0,000462	
30		117,873		0,092		0,000918	
50		611,21		0,157		0,002998	

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шевцов, Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. М.: Магистр: ИНФРА-М, 2011. 528 с.
2. Шевцов, Г.С. Численные методы линейной алгебры: Учеб. пособие / Г.С. Шевцов, О.Г. Крюкова, Б.И. Мизникова. М.: Финансы и статистика: ИНФА–М, 2008. 480 с.
3. Парлетт, Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы: пер. с англ. М.: Мир, 1983. 384 с.
4. Икрамов, Х.Д. Несимметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Наука, 1991. 240 с.
5. MathWorks [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.mathworks.com> (дата обращения: 12.02.2014).
6. Фаддеев, Д.К. Сборник задач по высшей алгебре / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. М., 1977. 288 с.
7. ALGLIB [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://alglib.sources.ru/> (дата обращения: 12.03.2014).

УДК 51:001.4

В. О. Кузнецов

Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова,
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: kvo_kuz@mail.ru

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ И НЕЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЯХ

Вводится класс кусочно-элементарных функций. Получены достаточные условия, при которых кусочно-элементарная функция является элементарной.

Ключевые слова: элементарная функция, неэлементарная функция, непрерывность, точка разрыва.

V. O. Kuznetsov

*Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Russia, Saint Petersburg, e-mail: kvo_kuz@mail.ru*

ON THE ELEMENTARY AND NONELEMENTARY FUNCTIONS

A class of piecewise-elementary functions is introduced. Sufficient conditions, under which a piecewise-elementary function is the elementary one, are obtained.

Keywords: elementary function, nonelementary function, continuity, point of discontinuity.

В курсе высшей математики чрезвычайно удобным является термин *элементарная функция*, который позволяет описать (часто без доказательства) ряд свойств функций, с которыми, как правило, приходится иметь дело в курсе высшей математики. Достаточно привести список основных элементарных функций и дать определение элементарной функции. Большинство учебных пособий этот раздел завершают примеры неэлементарных функций. В [1] этот раздел заканчивается так:

Элементарными функциями называются функции, получающиеся из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций (т. е. формирования сложных функций), примененных конечное число раз.

Примером неэлементарной функции может служить абсолютная величина (модуль) действительного числа x :

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Поскольку $y = \sqrt{z}$ и $z = x^2$ – основные элементарные функции, а $y = |x| = \sqrt{x^2}$ – суперпозиция этих двух функций, то логику составителей этого пособия понять трудно. Во всех остальных известных автору этой статьи пособиях (см, например, [2, 3]), где встречается функция $y = |x|$, она считается элементарной.

Цель настоящей статьи показать, что класс элементарных функций значительно шире, чем принято считать, а способ, при котором функция задается различными выражениями на различных промежутках, часто приводит к элементарным функциям.

Определение 1. Функцию $f(x)$ будем называть *кусочно-элементарной*, если заданы промежутки (возможно вырожденные) I_1, \dots, I_n и элементарные функции f_1, \dots, f_n такие, что

1. $I_k \cap I_m = \emptyset, 1 \leq k < m \leq n$;
2. $D(f) \subset \bigcup_{k=1}^n I_k$;
3. $f|_{E_k} = f_k|_{E_k}$, где $E_k = I_k \cap D(f_k), k = 1, \dots, n$.

В курсе высшей математики кусочно-элементарные функции часто используются в качестве примеров неэлементарных функций, а также для иллюстрации характера возможного поведения функции в точках разрыва. Отметим, что всякая элементарная функция в соответствии с определением 1 является кусочно-элементарной.

Введем обозначение для концов промежутков I_1, \dots, I_n : $a_k := \inf\{I_k\}, b_k := \sup\{I_k\}, k = 1, \dots, n$. Будем предполагать, что нумерация промежутков устроена так, что $b_k \leq a_{k+1}, k = 1, \dots, n-1$.

Определение 2. Кусочно-элементарную функцию $f(x)$ будем называть *правильной*, если

$$b_k = a_{k+1} \in D(f) \Rightarrow \begin{cases} b_k \in D(f_k) \cap D(f_{k+1}), \\ f_k(b_k) = f_{k+1}(b_k), \end{cases} \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (*)$$

Условие (*) гарантирует, что в тех точках, где элементарные функции f_1, \dots, f_n склеиваются без «зазора», функция $f(x)$ будет непрерывной. Поскольку элементарные функции непрерывны в своей области определения, то и любая правильная кусочно-элементарная функция тоже непрерывна в своей области определения.

Пример 1. Функции

$$h(x) = \begin{cases} x, & x < -\pi, \\ \cos x, & x \in (-\pi, 0), \\ e^x, & x \geq 0, \end{cases} \quad g_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ \cos x, & x \geq 0, \end{cases} \quad g_2(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ 1 & x = 0, \\ \cos x, & x > 0, \end{cases}$$

являются кусочно-элементарными. При этом функция $h(x)$ является правильной, а функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – нет.

Имеет место

Теорема. *Всякая правильная кусочно-элементарная функция $f(x)$ является элементарной.*

Докажем предварительно несколько вспомогательных утверждений и введем обозначения для некоторых элементарных функций:

$$\varphi(x) = \frac{x+|x|}{2}, \quad \theta(x) = \frac{x+|x|}{2x}, \quad \theta(x-a) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x > a, \end{cases}$$

$$\eta(x) = \eta(x, a, c) = \theta(x-a) \cdot (x-c) + c = \begin{cases} c, & x < a, \\ x, & x > a, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \psi(x, a) = a + \varphi(x-a) = \begin{cases} a, & x \leq a, \\ x, & x > a. \end{cases}$$

Лемма 1. *Если функция $f(x)$ элементарна и $a \in D(f)$, то функция*

$$\Phi(x) = \Phi(x, f, a) = \begin{cases} f(a), & x \leq a, \\ f(x), & x \in (a, +\infty) \cap D(f), \end{cases}$$

также элементарна.

Доказательство. $\Phi(x) = f(\psi(x, a))$. ■

Лемма 2. *Если функция $f(x)$ элементарна, то функция*

$$\tilde{\Phi}(x) = \tilde{\Phi}(x, f, a) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ f(x), & x \in (a, +\infty) \cap D(f), \end{cases}$$

также элементарна.

Доказательство. Пусть $b \in D(f)$, $c = f(b)$. Тогда

$$\tilde{\Phi}(x) = \theta(x-a) \cdot f(\eta(x, a, c)). \quad \blacksquare$$

Лемма 3. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ элементарны и $f(a) = g(a)$, то функция*

$$\Psi(x) = \Psi(x, f, g, a) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\infty, a] \cap D(f), \\ g(x), & x \in (a, +\infty) \cap D(g), \end{cases}$$

также элементарна.

Доказательство. $\Psi(x) = \Phi(2a - x, u, a) + \Phi(x, g, a) - f(a)$, где $u(x) = f(2a - x)$. ■

Лемма 4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ элементарны, то функция

$$\tilde{\Psi}(x) = \tilde{\Psi}(x, f, g, a) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\infty, a) \cap D(f), \\ g(x), & x \in (a, +\infty) \cap D(g), \end{cases}$$

также элементарна.

Доказательство. $\tilde{\Psi}(x) = \tilde{\Phi}(2a - x, u, a) + \tilde{\Phi}(x, g, a)$, где $u(x) = f(2a - x)$. ■

Лемма 5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ элементарны и $a < b$, то функция

$$\hat{\Psi}(x) = \hat{\Psi}(x, f, g, a, b) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\infty, a] \cap D(f), \\ g(x), & x \in [b, +\infty) \cap D(g), \end{cases}$$

также элементарна.

Доказательство. $\hat{\Psi}(x) = \tilde{\Psi}(x, f, g, d) + 0 \cdot \sqrt{(a-x)(b-x)}$, где $d = (a+b)/2$. ■

Доказательство теоремы. Заметим, что область определения любой элементарной функции легко сузить с помощью добавления фиктивных слагаемых

$$0 \cdot (x-a)^{-1}, 0 \cdot \sqrt{a-x}, 0 \cdot \sqrt{x-a}, 0 \cdot \sqrt{(x-a)^2 - b^2}, \dots$$

так, чтобы удалить из нее любое конечное число наперед заданных (возможно вырожденных) промежутков.

Пусть $f(x)$ – правильная кусочно-элементарная функция, f_1, \dots, f_n и I_1, \dots, I_n – соответственно элементарные функции и промежутки из определения 1.

Если $I_k \subset \overline{I_{k+1}}$ (в этом случае, конечно, $a_k = b_k = a_{k+1} < b_{k+1}$), то объединение промежутков I_k и I_{k+1} , т.е. замена (I_k, f_k) , (I_{k+1}, f_{k+1}) на $(I_k \cup I_{k+1}, f_{k+1})$, не скажется в силу условия (*) на значениях функции $f(x)$. Сказанное справедливо и в случае $I_k \subset \overline{I_{k-1}}$. Поэтому можем предполагать, что вырожденные промежутки используются только для задания значений функции $f(x)$ в изолированных точках ее области определения.

Применим к функциям f_1 и f_2 :

лемму 3, если $b_1 = a_2 \in D(f)$;

лемму 4, если $b_1 = a_2 \notin D(f)$;

лемму 5, если $b_1 < a_2$.

Сузив, если необходимо, область определения полученной функции, получим элементарную функцию \tilde{f}_2 такую, что $f|_{\tilde{I}_2} = \tilde{f}_2|_{\tilde{I}_2}$, где $\tilde{I}_2 = (I_1 \cup I_2) \cap D(f)$. К полученной функции с помощью лемм 3–5 «подклеим» функцию f_3 и т.д. В результате получим элементарную функцию \tilde{f}_n такую, что $D(\tilde{f}_n) = D(f) = \tilde{I}_n$ и $f|_{\tilde{I}_n} = \tilde{f}_n|_{\tilde{I}_n}$, т.е. $f(x) \equiv \tilde{f}_n(x)$. ■

Применяя указанную процедуру к функции $h(x)$ из примера 1, после упрощения получим

$$h(x) = e^{(|x+x|)/2} - 1 + \frac{1}{4(x+\pi)} \times \\ \times \left(2(|x+\pi| + x + \pi) \cos\left(\frac{(|x+\pi| - |x| - \pi)}{2}\right) + (|x+\pi| - x)^2 - \pi^2 \right).$$

Геометрическое подтверждение справедливости полученной формулы можно получить, если используя полученное выражение, построить в Maple график этой функции.

Отметим, что все рассмотренные в этом разделе функции непрерывны в своей области определения. Любая функция, которая этому условию не удовлетворяет, в соответствии с теоремой о непрерывности элементарных функций, является неэлементарной. Поэтому неэлементарными являются, например, функции $y = \operatorname{sign} x$, $y = |\operatorname{sign} x|$, $y = [x]$, $y = \{x\} = x - [x]$.

Замечание. Кусочно-элементарная функция $g_1(x)$ из примера 1 непрерывна, но правильной не является. Интересно было бы доказать (или опровергнуть), что эта функция элементарной не является.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 1: Учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. 4-е изд. М.: Высшая школа, 1986. 304 с.
2. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа: в 3 т. Т.1. М.: Дрофа, 2003. 704 с.
3. Шипачев, В.С. Высшая математика. Базовый курс: Учеб. пособие для бакалавров / под ред. А.Н. Тихонова. 8-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во Юрайт, 2012. 447 с.

УДК 51:378

Ю. К. Оленикова

Ярославский государственный технический университет,
Россия, г. Ярославль, e-mail: olenikovajk@ystu.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ И ОБРАЗОВАНИЕ

О значении и проблемах олимпиад как составной части учебного процесса на примере математических олимпиад для студентов нематематических специальностей.

Ключевые слова: математические олимпиады, Всероссийская студенческая олимпиада, организаторы олимпиад, образование.

J. K. Olenikova

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: olenikovajk@ystu.ru

MATHEMATICAL OLYMPIAD AND EDUCATION

About the importance and challenges of the Olympics as an integral part of the educational process on the example of mathematical Olympiads for students of non-mathematical specialties.

Keywords: mathematical Olympiad, all-Russia student's Olympiad, the organizers of the Olympiad, education.

Введение

В Ярославском государственном техническом университете (ЯГТУ) накоплен большой опыт проведения математических олимпиад. Вузовские олимпиады проводятся с 1974 года (проведено около 100 олимпиад). Областные, региональные, всероссийские и международные олимпиады (всего 20 олимпиад), инициатором и непосредственным организатором которых является автор настоящей статьи, проводятся с 1996 года. Активное участие, кроме того, в качестве руководителя студенческих команд ЯГТУ и члена жюри на олимпиадах, проводимых другими вузами, а также тесные контакты с организаторами всероссийских студенческих математических олимпиад (ВСО) позволяют автору провести анализ их состояния и роли в образовательном процессе.

В настоящее время Всероссийская студенческая олимпиада относится к одному из четырех приоритетных национальных проектов федерального уровня «Образование»: проект в рамках основного «Талантливая

молодежь» [5]. Однако в последние годы появились серьезные проблемы, ставящие под угрозу олимпиадное движение в России, по крайней мере, проведение ВСО по математике. Попытка привлечь к этим проблемам внимание широкой математической общественности на IV Международной конференции, посвященной памяти Л.Д. Кудрявцева в 2013 году, не дала ожидаемых результатов. Тезисы на две страницы [2] и короткий десятиминутный доклад на методической секции для небольшой аудитории, в которой не было ни одного человека хоть как-то связанного с олимпиадами, лишний раз убедили, что результативным может быть общение только с подготовленной и заинтересованной аудиторией. Поэтому автором делается вторая попытка в виде статьи с использованием соответствующих материалов и ссылками на убедительные источники. Публикация в сборнике «Математика и математическое образование. Теория и практика» естественна, так как сборник появился в 1999 году также по инициативе автора статьи вместе с началом проведения Всероссийских олимпиад и благодаря этому (более подробно можно почитать во введении к настоящему выпуску сборника).

К истории математических олимпиад

История всевозможных интеллектуальных конкурсов и олимпиад насчитывает более полутора веков. Некоторые из них давно стали составной частью образовательного процесса. Известно, что в нашей стране первая массовая **школьная математическая олимпиада** была организована в 1934 г. в Ленинградском государственном университете. Ее организаторами были член-корреспондент АН СССР Б. Н. Делоне, профессора В. А. Тарковский и Г. М. Фихтенгольд и др. Возможности Интернета позволяют проследить историю школьных олимпиад в России, участие и отношение к ним ученых и государства, содержание заданий, имена организаторов и участников и т.д. Есть сайт, посвященный Всероссийской олимпиаде школьников с разделами по истории олимпиад и по отдельным предметам [6]. Возникновение, развитие и проблемы школьных и студенческих олимпиад имеют много общего. Появились они постановлениями «сверху» как Всесоюзные во времена СССР, существуют в основном благодаря энтузиастам. И проблемы во многом схожие, а у разных проблем общие корни. Например, образованное в 1967 году Министерство просвещения СССР создало в том же году Центральный оргкомитет всесоюзной олимпиады школьников по математике, физике и химии. Возглавил Центральный оргкомитет академик И. К. Кикоин, где руководителем методической комиссии по математике был академик А.Н. Колмогоров. С тех пор всесоюзные математические олимпиады стали ежегодными и проходили они до 1991 года. В этот период в организации олимпиад начали уча-

ствовать не только инициативные вузы, но и государственные органы: Министерство просвещения СССР, министерства просвещения союзных республик и другие. Это подтверждало значимость олимпиадной формы работы с талантливой молодежью на государственном уровне. При Министерстве просвещения СССР был образован Центральный оргкомитет Всесоюзных олимпиад по математике, физике и химии. Для организации Всесоюзных олимпиад и разработки методических материалов при Центральном оргкомитете были созданы Методические комиссии по предметам, руководимые крупными учеными, профессорами вузов.

Студенческие математические олимпиады для студентов нематематических специальностей вузов федерального уровня официально стали проводиться лишь в 1981 году. Это были всесоюзные олимпиады, которые проводились по совместному постановлению Минвуза СССР и ЦК ВЛКСМ в числе мероприятий проекта «Студент и научно-технический прогресс» [8]. Проводились они в Омском политехническом институте пять лет: в 1981-1985 годах, организацией олимпиад занимался доцент кафедры высшей математики В.Н. Сергеев. К сожалению, автору не удалось восстановить историю и материалы всех студенческих математических олимпиад даже федерального уровня. Это не совсем простая задача, так как их организацией даже в большей степени, чем школьных, занимаются энтузиасты. Они работают «ради идеи» и не ставят задачей увековечивать свои дела. «Проведение одной олимпиады – труд многих людей, которые вкладывают в работу свои знания, фантазию, творчество. Но никто не думает, что когда-то олимпиада текущего года станет историей» [3].

Известно, что проводились и прекратили свое существование олимпиады III тура ВСО (заключительный тур) в Нижегородском и Уральском государственных технических университетах, в Уральском и Самарском государственных экономических университетах, в Тольяттинском государственном университете, Самарском государственном архитектурно-строительном университете. Пока еще проводятся олимпиады в Иркутском и Ярославском государственных технических университетах, в Уфимском государственном авиационном техническом университете и Южно-Российском государственном политехническом университете. Каждая из перечисленных олимпиад имеет свою неповторимую историю и особенности. В кратком изложении, по крайней мере, с историями олимпиад УрГТУ и ЯГТУ можно познакомиться во введениях к сборникам их олимпиадных задач [3, 4]. А где можно найти истории остальных олимпиад? Куда деваются многочисленные отчеты по олимпиадам в электронном и бумажном вариантах, которые после проведения III тура ВСО сдаются посредникам между Минобрнауки и нами, непосредственными организаторами олимпиад? Отчеты порядка 30 страниц машинописного

текста, фотографии, фильмы об олимпиадах и т.д. Но известно точно, что отчеты никто не читает и фильмы никто не смотрит. Для справки: в настоящее время, как следует из официального сайта ВСО [5], посредник - Центральная рабочая группа ВСО (к ее работе мы еще вернемся), созданная Минобрнауки, а фактически ФГБОУ ВПО «РГУТиС» в лице Егоровой Аллы Борисовны, каб. 1302.

Достижения математических олимпиад для нематематических специальностей

На нематематические специальности вузов идут поступать, как правило, выпускники школ не с лучшими математическими способностями и подготовкой, поэтому **возникают естественные вопросы:**

- Нужны ли им вообще олимпиады по математике?
- Каковы роль и место олимпиад в образовательном процессе?

Часть студентов, поступивших в вуз, не имеют никакой мотивации к обучению: они хотят только получить диплом о высшем образовании. Некоторых привлекает участие в танцевальных кружках, КВН, и т.п. Есть студенты, которые не имеют материальных возможностей для обучения, - в свободное от занятий время они вынуждены работать. Не занимаясь анализом и прогнозами относительно будущей успешности и местах работы выпускников разного рода, можно отметить, что, **к счастью, есть (и, скорее всего, всегда будет) молодежь, которая хочет получить хорошее образование.** Мотивация при этом может быть разной: любовь к процессу обучения; вера, что за образованными людьми будущее; надежда на лучшее трудоустройство и т.д. Многие из таких студентов по окончании вуза поступают в магистратуры и аспирантуры, и им требуется хорошая фундаментальная база. Им недостаточно образования, которое они могут получить на занятиях, в частности, по математике, в тех, можно сказать, кризисных условиях, в которых находится образование. Часы по математике снижены до такого минимума, что читаемые курсы неприлично называть курсами математики. Вот здесь и приходят на помощь олимпиады. Благодаря массовости и возможности участвовать в олимпиадах лучшим студентам любого вуза преподаватели организуют кружки для углубленного изучения математики, математические школы, математические лагеря.

Возникает дополнительный вопрос: а кто мешает проводить кружки без олимпиад. Ответ: никто. Только желающих их посещать будет либо меньше, либо вообще не будет. Преподаватели знают, например, что практически невозможно найти на нематематических специальностях студента, желающего заниматься математической научной деятельностью. Оказывается, желание получать знания не является достаточным условием для усиленных занятий. Живое и близкое дело в виде участия в олимпиадах

привлекательнее, чем далекое будущее в виде использования знаний. Поэтому большинство математических кружков порождено олимпиадами и существуют благодаря олимпиадам. «Кружок и олимпиада – близнецы-братья. Победителей олимпиады приглашают в кружок, кружок часто воспринимается как место, где готовят к олимпиаде...» [9].

Не будет большой ошибкой утверждение, что лучшие студенты вузов далеко не всегда из обеспеченных семей. Неоднократно при поездках на олимпиады выяснялось, что студенты впервые едут на поезде или не выезжали за пределы области или региона. Во время поездок на олимпиады они знакомятся с внешним миром воочию, находясь еще под крылом их наставников, а не по Интернету и телевидению, что само по себе, конечно, очень полезно, если этим правильно пользоваться. У студентов ЯГТУ, например, стало традицией не только ходить на экскурсии, предлагаемые организаторами олимпиад, но и дополнительно посещать музеи, выставки, театры. Полезными и интересными становятся даже поездки в поезде со всевозможными интеллектуальными играми на обратном пути, когда в одном купе собираются ставшие друзьями студенты разных вузов. Таким образом, благодаря олимпиадам, кроме сохранения и поддержки научного потенциала страны, происходит повышение культурного и интеллектуального уровня, поддерживается патриотизм и т.д. И здесь уместно вспомнить слова замечательного педагога и мыслителя Л. Д. Кудрявцева: «Будущее России зависит от того, сумеем ли мы сохранить наши духовные ценности, нравственные идеалы... Наше поколение ответственно за это перед потомками» [1].

Массовость проводимых олимпиад дает возможность не только студентам, но и преподавателям разных вузов встречаться и обсуждать проблемы образования и науки в вузах. Олимпиады породили неформальные научно-методические семинары и конференции, проведение которых происходит в то время, когда студенты выполняют олимпиадные задания. Поэтому математические олимпиады привлекают все большее количество участников. Так, в VI Международной олимпиаде, проводимой ЯГТУ в 2012 г., участвовали 167 студентов и в научно-методической конференции «Математическое образование и наука в технических и экономических вузах» более 80 преподавателей.

В последние годы в олимпиадах для нематематических специальностей с удовольствием стали принимать участие и студенты-математики. Они, как правило, участвуют вне конкурса в отдельной номинации.

Некоторые олимпиады проводятся с международным участием, а олимпиада ЯГТУ уже в седьмой раз проводится как международная, в которой традиционно принимают участие студенты из Казахстана, Белоруссии, Украины и Киргизии. Важность этого всем понятна. И сейчас, как ни-

когда. В 2012 году из-за событий в Киргизии не приехала команда из Бишкека, но мы были постоянно с ними на связи, как могли, поддерживали их. В этом году не приедут студенты из Украины. Физически мы по разные стороны баррикад, но духовно мы вместе, и коллеги шлют нам пожелания успешного проведения предстоящей олимпиады.

В настоящее время в ряде вузов России благодаря олимпиадному движению стали организовывать Открытые областные и Региональные олимпиады, например, в Иванове (ИГЭУ), Рыбинске (РГАТА), в Костроме (ВАРХБЗ), Рязани (РГРТУ). В ЯГТУ в 2013 году по просьбе коллег из вузов других областей были проведены Открытые вузовская и областная олимпиады. Но подавать заявки на проведение III этапа, кроме ЯГТУ, никто не собирается.

В заключение этого раздела можно привести слова председателя предметной комиссии по математике Всероссийской олимпиады школьников. Н.Х. Агаханов полагает, что участие в олимпиадах только способствует успехам в науке. Он говорит, что все бывшие участники олимпиад «блестяще учатся. Начиная с 3 курса, ведут серьезную научную работу и делают серьезные открытия. ...Среди всех российских математиков, которые удостоивались крупных международных премий в математике, практически все до этого были успешными олимпиадниками» [7]. Опыт проводимых ЯГТУ олимпиад также показывает успешность участников и победителей олимпиад как при дальнейшем обучении в вузе, так и после его окончания.

Проблемы, затрудняющие и мешающие проведению ВСО

На проблемы для всех математических олимпиад неоднократно обращали внимание организаторы российских школьных олимпиад [7]. Проведению студенческих олимпиад мешает и политика в системе высшего образования.

Можно отметить основные трудности в олимпиадном движении:

- Вузам невыгодны олимпиады: их проведение не финансируется, не входит ни в аккредитационные показатели, ни в критерии эффективности вузов.

- Число профессиональных математиков-энтузиастов, желающих посвящать себя олимпиадному движению, мало. И вряд ли они появятся при такой политике государства, когда вузы сами должны зарабатывать деньги.

- Проводится попытка унификации сверху системы олимпиад в стране, в то время как математические олимпиады, тем более для нематематических специальностей, принципиально отличаются от олимпиад по другим предметам [7].

• В 2013 году ужесточилось положение об организации и проведении олимпиад, критериев отбора базовых вузов, увеличилось количество документации, требуемое для заявки на проведение III этапа ВСО, для отчета, и т.д.

Самые большие препятствия развитию олимпиадного движения ставят государственные органы, породившие его, деятельность которых в этом направлении называется «поддержкой ВСО». А вместо поддержки получается вред. И все дело в том, что в нашей стране принято теперь заниматься управлением любой сферой деятельности неспециалистами в этой сфере. Получается, как в басне Крылова: «Беда, коль пироги начнет печи сапожник, а сапоги тачать пирожник: и дело не пойдет на лад, да и примечено стократ». Для доказательства достаточно рассмотреть официальные документы ВСО [5].

Анализ сайта и документов ВСО

Олимпиадами и сайтом, как и любым творческим делом, по-видимому, должны заниматься специалисты или люди, для которых это дело является их хобби. Инициативный сайт, созданный в 2002 году призером Областных и Всероссийских олимпиад, студентом ЯВВФУ (Ярославское высшее военное финансовое училище) Александром Оликевичем, существовал более 10 лет. Это был живой сайт с объявлениями, заданиями прошедших олимпиад, форумом участников олимпиадного движения. Назывался он newolymp.narod.ru. Стало известно, что, к большому сожалению, сайта этого не стало. Удастся ли восстановить материалы, пока неизвестно. Но по указанной ссылке можно в Google прочитать информацию о сайте, найти его организатора и задать интересующие вопросы.

Теперь посмотрим на **официальный сайт ВСО** [5]. Абсолютно мертвый сайт, очень редко обновляемый. За время существования (с 2012 года) обновление, пожалуй, было три раза: при выставлении списка олимпиад, прошедших конкурсный отбор и плана проведения олимпиад в мае 2013 года, когда почти все олимпиады уже прошли, и списка награжденных премией Президента.

Откроем страницы сайта, на которых размещены все официальные документы по организации и проведению ВСО, выложенные с ошибками и беспрецедентные по своей некомпетентности и неуважительному отношению к пользователям. Олимпиадами занимаются все-таки образованные люди!

На главной странице три блока. В названиях блоков сразу бросается в глаза новое слово «этап» олимпиады в отличие от предыдущего «тур». Почему заменили, непонятно, ведь это синонимы. Или у авторов

документов (а ведь опять неизвестно, кто их сочинял) есть личное мнение, не позволяющие считать их синонимами. Например, у автора этой статьи слово «тур» ассоциируется с «турнир», а «этап» вызывает в памяти поэму Некрасова о русских женщинах, которых «...по этапу поведут с конвоем...». Но это, конечно, не главное. Привыкнем.

Первый блок о проекте «Талантливая молодежь», куратор И.М. Реморенко в июне 2012 года назначенный на должность заместителя министра образования и науки РФ. Как и полагается, основной текст - задачи проекта. Так вот, из 60 строчек страницы формата А4 «Задач проекта» 14 строчек – дважды написанное мнение Фурсенко: «Национальный проект – не разовая акция, возникшая только потому, что появились деньги и надо их потратить. Это логический шаг в развитии реформы образования...», причем одна запись в середине текста жирным шрифтом, вторая – в конце обычным.

Несмотря на то, что этот ляп на первый взгляд ничего не решает (а так ли это, ведь «рыба тухнет с головы», и дальнейшие примеры это доказывают), возникает вопрос: кто сделал и как квалифицировать?

Второй блок содержит основные документы ВСО. За время существования сайта не исправлены даже ошибки или опечатки в заголовках страниц блока: «Регламент организации и проведению...», «Требование к отчету о проведение...». А сами документы представляют образцы некомпетентности и безграмотности не только в вопросах организации ВСО. Рассмотрим некоторые из них.

Первая страница «Информационное письмо о проведении ВСО» от **10.01.2013**, №05-08 адресуется ректорам вузов. Письмо подписано директором Департамента государственной политики в сфере высшего образования Минобрнауки А.Б. Соболевым. И с этого письма начинается полная неразбериха, потому что из него следует, что

- ВСО **2013** года проводится с **01.09.2012 по 30.05.13**;
- Минобрнауки утверждены Регламент организации и проведения ВСО и Центральная рабочая группа (из этих документов следует, что **12.12.2012**);
- Сдать заявки на проведение олимпиад надо до **31. 01.13**.

Что же получается? Олимпиады без приказов идут с 1 сентября, заявки надо сдать до 31 января. При этом дата опубликования письма на сайте и рассылки ректорам не указана, но есть дата подписания его Минюстом **21.01.13**. Во-первых, в несколько дней, если они и остались, провинциальным вузам, которые в основном и проводят ВСО, просто не уложиться в эти сроки со сбором большого количества бумаг и подписей. Во-вторых, когда будет опубликован приказ о проведении олимпиад? Когда в вузах увидят план ВСО? Как в таких условиях решать организационные и

финансовые вопросы вузам-организаторам и вузам-участникам? Ведь в ПФУ вуза надо представить план мероприятий и смету на следующий год уже в ноябре текущего года. В-третьих, почему олимпиады называются олимпиадами 2013 года, если проводятся в 2012-2013 учебном году. И какой датой подписывать грамоты и дипломы, как быть с официальными финансовыми документами и отчетами?

Кстати, план был подписан 12 марта 2013 года, на сайте появился еще позже, когда большинство олимпиад благодаря инициативе организаторов уже состоялись.

Рассмотрим **Регламент организации и проведения ВСО**, тоже подписанный заместителем Минобрнауки РФ А.А. Климовым и являющийся следствием рассмотренного выше документа.

Пункт 1.1. «...ВСО проводится ... во исполнении Указа Президента РФ... «О мерах государственной поддержки талантливой молодежи» и ... «...премиях»». Во-первых, очередная ошибка. Так и написано «во исполнении» вместо «во исполнение». В информационном письме, между прочим, написано правильно. Во-вторых, в отличие от письма, сразу понятно, что для Минобрнауки является главным в проведении ВСО. После этого нет смысла читать о каких-то еще целях и задачах. Поэтому все, что написано про них в пунктах 1.2-2.2, пропускаем.

Пункт 3.1. «ВСО проводится ежегодно в период с 1 сентября по 30 мая». Комментарии излишни, такого периода в календарном году нет. Некорректность в Информационном письме относительно года олимпиады переросла в ошибку!

Далее, «II этап – региональный – проводится советами ректоров ..., которые назначают» вузы «на базе которых проводится второй этап ВСО». Ведь надо было подумать, прежде, чем это писать. Из кого совет ректоров будет выбирать и назначать? Очереди из желающих нет, назначать бессмысленно. Желающих и способных заниматься этой деятельностью, причем бесплатно, не так легко найти. До сих пор олимпиадами, по крайней мере, математическими, занимались, как отмечалось выше, в основном энтузиасты. А надо только заменить «назначают» на «утверждают», если уж так нужна пирамида в организации олимпиад.

Пункт 3.2. Он о финансовом обеспечении ВСО и не оставляет никаких надежд на финансовую помощь Минобрнауки. Тогда непонятно, зачем критерии отбора и конкурс среди организаторов олимпиад?

Пункт 3.3. «Для организационной поддержки и методического обеспечения ВСО» Минобрнауки РФ «создается Центральная рабочая группа ВСО в составе представителей Министерства образования и науки Российской Федерации, руководящих работников образовательных учреждений высшего профессионального образования, предприятий, организа-

ций, ассоциаций работодателей». Смотрим приказ о составе Центральной рабочей группы (в дальнейшем будем называть ЦРГ ВСО). Группа состоит из 13 человек. В ее состав входят директор, заместитель директора и советник Департамента государственной политики в сфере высшего образования РФ, три ректора и шесть проректоров вузов, член Правления Общероссийской общественной организации «Российский союз промышленников и предпринимателей». Что это за **рабочая группа**? Кто в ней будет работать? Что конкретно будет делать каждый член этой группы? Был ли кто-нибудь из них хоть раз организатором какой-нибудь олимпиады? Какую организационную и методическую поддержку они могут оказать? Выставить с большим опозданием план олимпиад? Группа создана 12.12.2012 года. Вспомним, что олимпиады 2013 года проходят с 01.09. 2012 по 30.05.2013, план подписан 12.03.2013. Ну ладно, один раз в период становления всякое может быть. А сейчас? Поскольку на сайте стоит ВСО 2012-2014 года, а в документах стоит «ежегодно», то по аналогии с предыдущим с 01.09.2013 по 30.05.2014 прошли олимпиады 2014 года. Сегодня 12.07.2014 года. На сайте до сих пор нет плана проведения олимпиад, проведение которых закончилось 2 месяца назад.

ЯГТУ планирует проведение III этапа ВСО по математике в октябре 2014 года (смешно, план 2015 года!). Документы собраны более чем полгода назад. Заявки пока не принимаются. Звонки Егоровой А.Б. бесполезны, она ведь посредник. Говорит, что будут перемены в организации: и заявка будет не такая, и критерии не такие, и все неправильно, потому что не может быть несколько олимпиад третьего этапа по одной дисциплине. Так и в самом деле, не может быть. А зачем вообще этапы нужны? И мы должны отслеживать, куда деваются получившие премии Президента и т.д., и т.п. Вот такая у нас ЦРГ ВСО (аббревиатура авторская по аналогии с прежней ЦГУ ВСО - Центральной группой управления, что, впрочем, более соответствует действительности). Кстати, ЦГУ ВСО состояла не более чем из 10 человек, а именно: три начальника, два – рабочая группа и не более пяти человек – методическая комиссия (приложение №1 к приказу Рособразования от 13.03.2009, №254).

Это же отмечают и организаторы школьных олимпиад [7]:

- Министерство образования и науки пытается навести «порядок» в проведении олимпиад, и это может нанести серьезный вред олимпиадному движению у нас в стране.

- Самое страшное бывает тогда, когда Министерство выходит с очередным «Положением об олимпиадах», которое они же, разработав, не соблюдают. Когда Министерство разрабатывает положение и внедряет его с августа месяца – это полбеда, а если они его внедряют с января, когда половина олимпиад уже прошла – это беда.

Пункт 3.4. «В состав жюри входят представители органов исполнительной власти субъектов Российской Федерации, осуществляющих

управление в сфере образования, руководящих и педагогических работников вузов, представителей УМО по соответствующим направлениям подготовки (специальностям), предприятий, организаций, ассоциаций работодателей».

Неужели органам исполнительной власти и УМО нечем больше заниматься? Есть ли среди них специалисты по тематике каждой олимпиады? Работать в жюри, например, по математике, это ведь не на банкете сидеть.

Пункт 3.5. Практически тот же самый состав, что и жюри, кроме органов исполнительной власти, представляет экспертную группу, разрабатывает задания к олимпиадам.

Догадываются ли составители документов, что составлением оригинальных олимпиадных задач, например, по математике, могут заниматься единицы. В ЯГТУ, например, с 1996 года этим занимается доцент кафедры высшей математики В. Ш. Ройтенберг [4]. Что, по словам Алексея Гарбера [7], оригинальность задачи, сохранение её в тайне до начала соревнований – одно из главных условий принятия задачи на олимпиаду: «Каждый человек, который предлагает свою задачу на Олимпиаду, несет личную ответственность, чтобы она была никому не известной».

В последние годы составление задач на математические олимпиады для нематематических специальностей по ряду причин, обсуждение которых выходит за рамки этой статьи, вуз-организатор (а если точнее, кафедра-организатор), как правило, берет на себя. А значит, и ответственность за составленные задачи, и конфиденциальность. И в этой связи совсем удивительным является требование согласования задач с УМО: «Задания и Заявка на проведение всероссийского (третьего) этапа ВСО одновременно согласовываются с УМО по соответствующим направлениям подготовки (специальностям)». И кто в УМО, например, по специальности 080000 может и будет заниматься оценкой заданий по математике? А если математическая олимпиада для групп специальностей? Во всех УМО подписывать? Так теперь еще задания до олимпиады вместе с заявкой надо отправить посредникам! Удивительно, но на сайте [5] пропал образец бланка титульного листа для заданий, на котором ставится подпись ректора и УМО! Как же теперь согласовывать с УМО? Или теперь не надо? Несыковка и загадка! Согласовывать надо ([5], пункт 3.5), а бланк согласования пропал!

Остановимся коротко еще на некоторых моментах, бросающихся в глаза при поверхностном рассмотрении:

- В третьем блоке в списке награжденных хотелось бы видеть название олимпиады, в которой награжденный стал победителем или призером. В приведенном списке за 2013 год награжденных 188 студентов, и у всех в последней графе одно и то же «Победитель (или призер) ВСО».

- Страница «Участники» вызывает, мягко выражаясь, удивление. Может быть, это такой прикольный образец? Среди участников олимпиад находим: PaNaN, Win5ton, КОТ, Рыжая бестия, Валера или же Няма, Наглая собственница.

- Удивляют ведомости для подведения итогов. Во-первых, просто непонятно, как предлагается проверять работы. Как в ЕГЭ? Может быть, и критерии проверки написать? А все будут решать по-своему, это же олимпиада! Даже при проверке ЕГЭ встречаются совсем непохожие на авторские решения задач. Во-вторых, на математических олимпиадах принята только позадачная проверка.

- Интересен документ о поездке победителя второго этапа на третий: для бедного победителя в самом деле этап, если посмотреть на подписи, которые он должен собрать! И полное противоречие с приложением, в соответствии с которым едет какая-то делегация.

- По критериям оценки и отбора заявок вузов на проведение ВСО в баллах от 0 до 10 (приложение 6 Регламента) кто-то, возможно ЦРГ ВСО, будет решать разрешить или нет конкретному вузу проведение олимпиады. Интересно, какой балл в графе «соответствие олимпиады приоритетным направлениям развития экономики РФ» поставят за олимпиаду по математике? Сколько надо представить рекомендаций от органов местной власти и организаций, планирующих принять участие или оказать содействие в олимпиаде, чтобы получить высший балл - десятку? И не поставит ли комиссия ноль баллов в графе культурно-познавательная программа, если в старинном русском городе Ярославле, центре Золотого Кольца России, будут спланированы экскурсии и мероприятия, не соответствующие наименованию олимпиады?

- Очень интересно требование проводить теоретический и практический конкурс. Долго нам, организаторам, пришлось ломать голову, чтобы подстроиться к требованию предложением: «теоретическая часть конкурса заключается в доказательстве утверждений, сформулированных в виде теоремы». А еще надо прописать минуты, которые отводятся на эти конкурсы. Может, к каким-нибудь олимпиадам это подходит, но только не к математическим.

Выводы и предложения

Остановимся отдельно на премии Президента, раз она является теперь главным при организации и проведении ВСО. Хорошее, в общем-то, дело породило ряд серьезных негативных последствий, как мы видели при разборе документов ВСО. А все затормозилось, как в телефонных разговорах утверждает А. Б. Егорова, потому что хотя и навести порядок с ВСО. Очередная попытка наведения порядка заключается прежде всего во вве-

дении ограничения количества олимпиад. По-видимому, не хватает денег. Это, естественно, приводит к выводу, что заключительный, III этап ВСО по одному виду, например, по математике, должен быть один. Может быть, оставить одну Интернет-олимпиаду (Йошкар-Ола)? Но, во-первых, ВСО там проходит только по математике. Во-вторых, там нарушается регламентированная структура проведения ВСО. В самом деле, победители I этапа участвуют в региональном II этапе. Однако победители II этапа далеко не всегда попадают на заключительный III этап, так как там действуют свои навороченные правила и каждый год свое пороговое значение. А победитель регионального тура не получает даже соответствующего документа. Поэтому не исключено, что очень скоро из олимпиад по математике для нематематических специальностей вузов III этапа ВСО останется только Открытая Международная Интернет-олимпиада. Хорошая олимпиада, но традиционные она заменить не может [2]. Поэтому напрашиваются следующие выводы и предложения.

Как отмечалось выше, математические олимпиады для нематематических специальностей вузов в последние годы стали составной частью учебного процесса. Цели, задачи и формы проведения таких олимпиад сформировались снизу в результате олимпиадного движения и подчинены одной общей идее – бережному отношению к нашему поколению и сохранению научного потенциала России. То же самое отмечают и организаторы школьных олимпиад (Виталий Арнольд [7]): главная цель олимпиад – привлечь талантливых ребят, заинтересовывать занятием математикой, а вовсе не выигрыш, который, пожалуй, стал приоритетом на высших этапах школьных олимпиад.

- Олимпиад должно быть столько, сколько находится желающих их проводить. Мотивировка: большая страна; возможность вузам выбрать удобное время для участия; передача опыта и здоровая конкуренция организаторов; сохранение и рост кадров, способных организовывать и проводить олимпиады.

Олимпиады могут быть личными, командными, очными, заочными, в виде бланчного или компьютерного тестирования и т.д., в соответствии с желанием и фантазией организаторов.

Туры или этапы лучше убрать. Просто сохранить: вузовские, региональные, всероссийские. Пусть проводят все желающие и способные это делать, поскольку есть еще руководители вузов, как в ЯГТУ, которые свято верят в пользу олимпиад и других конкурсов и соревнований для воспитания и обучения молодого поколения и поддерживают организаторов-энтузиастов. Пусть происходит здоровая конкуренция и естественный отбор. Пусть талантливая молодежь видит, что государству она не безразлична. И не только премия Президента должна это решать. Премия для единиц, а талантливых людей в России много.

Почему нельзя ограничиться региональными олимпиадами и проводить одну заключительную Всероссийскую, как это предполагается сделать. Региональные олимпиады – некие междусобойчики, как правило, проводящиеся в один день, не требующие расселения участников и больших материальных затрат. Их уровень ниже и они не решают задач, которые сформировались в результате проведения олимпиад. Оставив одну Всероссийскую по математике, Минобрнауки нанесет немалый вред математическому образованию в России и подготовке высококвалифицированных специалистов.

Что касается математических олимпиад для нематематических специальностей, то сложившиеся здоровые традиции просто нельзя ломать! К тому же, выявление трех математических лидеров из нематематических вузов России по большому счету никому нужно.

- Проводить олимпиаду на премию Президента надо отдельно и название у нее должно быть либо отдельное, например «Всероссийский конкурс талантливой молодежи» по дисциплине, скажем, математика. Желательно разделить на «специалистов» и «неспециалистов» в данной дисциплине по кодам групп или укрупненных групп. Все просто и понятно. Можно только из победителей ВСО. А лучше разрешить вузам добавить по одному участнику. Возможны разные вполне мотивируемые варианты. Проведение конкурса на премию Президента поручать по очереди вузам, зарекомендовавшим себя как умелые организаторы олимпиад. При этом студент данного вуза может участвовать в олимпиаде только вне конкурса (исключать нельзя, для студентов участие в такой олимпиаде – это праздник, так, по крайней мере, мы пытаемся сделать).

- В Центральную рабочую группу должны обязательно входить опытные организаторы олимпиад. Ни одно решение не должно приниматься некомпетентным органом. С целью обмена опытом и дальнейшего творческого сотрудничества привлечь и организаторов Всероссийской школьной олимпиады.

- Срочно собрать компетентных, смелых и креативных организаторов олимпиад для обсуждения проблем в олимпиадном движении, выхода из создавшейся тупиковой ситуации и создания настоящей рабочей группы.

- Решить раз и навсегда, что называется годом проведения ВСО. В соответствии с этим установить твердый ежегодный срок подачи заявлений на проведение ВСО (к ним отнести и международные олимпиады).

- Подпись председателя совета УМО оставить только для специальных дисциплин. Для общеобразовательных заменить, например, на подпись председателя совета ректоров соответствующего региона. Откорректировать и упростить форму отчета.

- Назначить конкретные вузы для проведения конкурсов на премию Президента по дисциплинам, согласовать время проведения с организаторами. Подготовить необходимые формы для отчетов (отредактировать имеющиеся).

- Вменить в обязанность членам ЦРГ ВСО посещение проводимых олимпиад и конкурсов и установить график посещения, что полезно будет и членам ЦРГ ВСО, и организаторам, особенно начинающим. В прежнее время, когда главным вузом был ГУУ, член рабочей группы Козлова Галина Леонидовна находила время ездить на олимпиады и вникать в проблемы олимпиадного движения изнутри, потому что болела за дело, поддерживала организаторов и помогала им.

Вместо заключения

С момента появления официального сайта ВСО [5] и документов, лишь в части которых мы пытались разобраться, автора не покидали ставшие классическими вопросы: кто виноват и что делать? Пришлось вернуться к документам прошлых олимпиад. И выяснилось, что изменения начались в 2011 году. В 2009 и 2010 годах приказ об организации и проведении ВСО подписан руководителем Федерального агентства по образованию Н.И. Булановым. Нес ответственность за олимпиады тот же вуз, что и сейчас, ФГБОУ ВПО «РГУТиС», но назывался он главным. И была Центральная группа управления из девяти человек: три начальника во главе с ректором этого вуза, два человека – рабочая группа и четыре – методический совет из профессорско-преподавательского состава вузов-организаторов различных олимпиад. Указ о поддержке талантливой молодежи уже давно был, была и премия Президента, но никакой ссылки на ее первостепенность в проведении олимпиад не было! Только в конце в приложениях были формы документов для претендентов.

В 2011 году Федеральное агентство по образованию уже вошло в состав Минобрнауки и появился новый Проект приказа об организации и проведении ВСО, подписанный А. А. Фурсенко [11], который так и остался проектом, а олимпиады шли по старым правилам. Даты у проекта нет, но из документов следует, что после 15 мая 2011 года. Отметим существенные изменения:

- Кому-то не понравилось ЦГУ ВСО и заменили на Центральный комитет ВСО (в дальнейшем ЦК ВСО), состоящий из 17 ректоров и проректоров, в обязанности которого входило осуществлять руководство.

- И вдобавок к этому была еще «рабочая группа, которую возглавляет ректор вуза, выигравшего открытый конкурс «Организационно-методическое обеспечение III тура ВСО»». Количество членов группы не указано. Факт тот, что она все делает и отчет сдает Минобрнауки. А причем тогда ЦК ВСО?

• «II тур ВСО ... организуется несколькими (не менее двух) вузами совместно на территории региона. Базовый вуз назначает УМО». No comment!

Справедливости ради следует отметить, что в этом проекте ВСО еще не была «во исполнение» известного Указа Президента.

Теперь, по крайней мере, ясно, что «наведение порядка» пытались начать в 2011 году, в 2012 году никакого приказа не было, а значит, готовился тот шедевр в 2013 году, с которым мы пытались разобраться на страницах статьи. Авторы этих документов, как всегда неизвестны. А подписывать документы, не читая, нехорошо.

Прошло 1,5 года, ждем новых перемен и готовимся к проведению новых олимпиад без разрешения сверху. Пока еще «... олимпиадное движение у нас, в первую очередь, сохраняется за счет работы небольшой группы энтузиастов в ряде регионов, инерционности системы образования, особенно в глубинке, а также благодаря тому, что лидерам олимпиадного движения пока еще удается выдержать натиск Минобрнауки и отстоять от реформирования организационную структуру системы математических олимпиад» [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кудрявцев, Л.Д.* Мысли о современной математике и ее преподавании. М.: Физматлит, 2008. 434 с.
2. *Оленикова, Ю.К.* Об олимпиадах по математике для студентов нематематических специальностей: опыт и перспективы // *Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: тез. докл. Четвертой Междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской акад. наук Л.Д. Кудрявцева.* Москва, РУДН, 25-29 марта 2013 г. М.: РУДН, 2013. С.572-574.
3. Студенческие олимпиады по математике УГТУ-УПИ: Учеб. пособие. 2-е изд., доп. и испр. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 256 с.
4. *Ройтенберг, В.Ш.* Задачи студенческих математических олимпиад ЯГТУ: учебное пособие / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова, Л.А. Сидорова. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2012. 127 с.
5. Всероссийская студенческая олимпиада [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.vso-mon.ru>.
6. Всероссийская олимпиада школьников [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.rosolymp.ru/>
7. Наталия Демина. Большой спорт для математиков [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.polit.ru/article/2007/10/05/olimp>

8. Всесоюзная олимпиада "Студент и научно-технический прогресс" [Электронный ресурс]. Режим доступа:
<http://www.ic.omskreg.ru/olympiads/UnionOlimp/Index.htm>
9. Жуков, И.Б. Ленинградские математические кружки [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://altruism.ru/sengine.cgi/5/7/8/12/14>
10. Приказ Федерального агентства по образованию от 13 марта 2009 г. N 254 "Об организации и проведении Всероссийской студенческой олимпиады в 2009 году".
11. Об организации и проведении Всероссийской студенческой олимпиады в 2011 году" (проект приказа) [Электронный ресурс]. Режим доступа:
<http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/6298542/#1000>

УДК 378

А. И. Попов, Н. П. Пучков

Тамбовский государственный технический университет»
Россия, г. Тамбов, e-mail: olimp_popov@mail.ru

ИЗУЧЕНИЕ КРЕАТИВНОСТИ СТУДЕНТА В ОЛИМПИАДНОМ ДВИЖЕНИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Рассмотрена креативность личности как основа творческой культуры конкурентоспособного специалиста, исследованы подходы к изучению креативности обучающихся, предложен метод изучения креативности в процессе участия студента в олимпиадном движении по математике, показана необходимость создания олимпиадной креативной среды.

Ключевые слова: олимпиадное движение студентов, креативность, математическое образование.

A. I. Popov, N. P. Puchkov

Tambov State Technical University
Russia, Tambov, e-mail olimp_popov@mail.ru

EXPLORING CREATIVITY OF STUDENTS IN MATHEMATICS OLYMPIAD MOVEMENT

We consider a individual creativity as basis a creative culture for competitive specialist, investigate approaches to the study of creativity of students, propose a me-

thod for the study of creativity in the process of student participation in mathematics Olympiad movement, shows the need to organization a creative Olympiad environment.

Keywords: *Olympiad movement of students, creativity, a mathematical education.*

Эффективность профессионального становления и формирования конкурентоспособной личности в вузе во многом определяется уровнем творческой культуры его выпускника, в основе которой лежит высокий уровень креативности личности, определяющей его готовность выявлять и анализировать актуальные проблемы в научной и производственной сферах, находить способы и средства для творческого их решения в современных экстремальных условиях как индивидуально, так и совместно с трудовым коллективом. При формировании у обучающегося надпредметных общекультурных компетенций необходимо особое внимание уделять процессу развития креативности, проводить мониторинг уровня её сформированности.

Из существующих направлений экспериментального изучения креативности личности нам хотелось бы выделить два: измерение количества и качества продукта творческой деятельности (а на начальном этапе профессионального становления студента это, в основном, решение творческих задач, имеющих профессиональный и социальный контекст его будущей профессиональной деятельности) и изучение самого процесса творческой деятельности (процесса решения задач и организации, как своей деятельности, так и деятельности руководимого коллектива сокурсников).

В контексте первого направления креативность студента изучается по таким характеристикам решения творческих задач, как их количество, качество (оригинальность, уникальность), значимость, производительность (время решения). Вместе с тем большинство исследователей подчеркивают, что продукт творческой деятельности в виде решенной студентом творческой задачи не может рассматриваться в качестве единственного показателя уровня креативности, так как оценка продукта проводится на основе экспертной оценки и зависит от многих субъективных факторов.

Второе направление исследований предполагает изучение креативности как процесса. В качестве показателей творческого процесса решения оригинальных (нестандартных, имеющих не привычную для студента конструкцию) задач можно выделить способности: к анализу проблемной ситуации и вычленению фрагментов задачи, доступных студенту на данном этапе обучения; к синтезу нового решения на основе нескольких стандартных подходов; к воссозданию недостающих данных и оценке достоверности источников их получения; к выбору из большого количества информации только той, которая необходима для данной задачи; дивергентного мышления.

Вопросами исследования психологии творческих способностей занималась Д.Б. Богоявленская, в частности ею выявлены основные принципы метода изучения креативности: 1) отсутствие внешней и внутренней оценочной стимуляции; 2) отсутствие потолка в исследовании объекта (в целом в деятельности); 3) длительность эксперимента: отсутствие ограничений во времени и многократность [1].

На основе анализа работ Д.Б. Богоявленской, других литературных источников и личного опыта работы в системе высшего образования, мы пришли к выводу, что существенным условием актуализации креативности являются самообладание и уверенность в себе, определяющие психологическую готовность специалиста к профессиональной деятельности.

Наивысшей напряженностью мотивации в творческой деятельности в процессе профессионального становления обладают предметные олимпиады студентов, когда соревнование, увеличение количества наблюдателей, ответственность перед собой, учебным заведением приводят к полному или частичному торможению творческих процессов. Деятельность обучающихся в условиях олимпиад по степени напряжения социальных процессов наиболее приближена к профессиональной деятельности, поэтому проявление креативности именно в этих условиях (условиях перемотивации и возможного торможения творческого мышления) наиболее адекватно отражает творческий потенциал студента. По нашему мнению, с достаточной степенью достоверности инструментом измерения креативности могут выступать решаемые человеком творческие олимпиадные задачи с учетом мотивации деятельности, а критериями креативности выступают продуктивность (отношение качества выполнения действий ко времени выполнения) и латентность (время от момента предъявления сигнала до выбора ответа).

Проводимые во время олимпиад по математике экспериментальные исследования творческих характеристик личности во время решения творческих задач не полностью отвечают принципам, сформулированным Д.Б. Богоявленской. При этом особую проблему представляет выполнение первого принципа – человек явление социальное, неизбежно ориентируется на реакцию общества, на его деятельность, проводит постоянную оценку того, насколько его деятельность соответствует внутренним установкам личности. Поэтому при оценке креативности невозможно избежать мотивации внутренней и внешней оценки, т.е. проявляется противоречие: с одной стороны, олимпиады действительно позволяют обучающемуся проявить свои творческие способности, с другой - необходимо отказаться от жестких лимитов времени, атмосферы соревновательности и единственного критерия правильности ответа, то есть отвергнуть такой критерий креативности, как точность.

Чтобы тесты на креативность (творческие задачи) затрагивали собственно творчество, по мнению Д.Б. Богоявленской, условия их выполнения должны приближаться к реальным, «внетестовым» ситуациям. Исследователи показали, что мотивации (достижений, соревновательности, социального одобрения) блокируют самоактуализацию личности, затрудняют проявление ее креативности. Для проявления творчества нужна неприужденная обстановка, где есть свободный доступ к дополнительной информации по предмету задания.

Исследование проблемы определения уровня креативности [2] позволило предположить, что разнообразного вида тесты и творческие задания на олимпиадах по математике могут объективно оценивать креативность только в том случае, если они являются составной частью процесса развития креативности и творческих способностей в рамках специально организованной образовательной среды, позволяющей сделать влияние факторов соревновательности и социального одобрения на процесс самоактуализации минимальным, что особенно важно для студентов младших курсов, когда стрессоустойчивость еще не сформирована.

Но наш взгляд создание креативной олимпиадной среды [2], в которой происходила и происходит деятельность обучающегося в олимпиадном движении по математике, позволяет преодолеть противоречия, свойственные методу изучения креативности в «тестовых» ситуациях. В методе исследования креативности в условиях олимпиадного движения процесс формирования творческих качеств и процесс контроля достигнутого результата – уровня креативности неразрывны; только в этом случае стимулирование деятельности созданной проблемной ситуацией не является конечной целью, а лишь усиливающим фактором к творческой деятельности вообще. Поведенческая реакция участника олимпиадного движения рассматривается и как деятельность по творческому разрешению поставленных конкретных ситуаций, и как изменение характеристик самой личности, и как деятельность по воспроизводству подобной ситуации, позволяющей участнику выразить свой внутренний мир и обогатить его. При этом высокий уровень внутренней мотивации, выход участника на креативный уровень интеллектуальной активности способствует усилению воздействия ситуационного фактора на остальных обучающихся к креативной олимпиадной среде и на самого участника.

В условиях олимпиадного движения по математике можно с достаточной степенью точности говорить об отсутствии потолка в исследовании проблемной ситуации, которое хотя и формально начиналось и завершилось в условиях проведения олимпиады, но за счет внутренней мотивации является продолжением предшествующей творческой деятельности в ус-

ловиях олимпиадной среды и исходным элементом предстоящей самостоятельной работы, как по изучению данной дисциплины [3, 4], так и при изучении профессиональных дисциплин. Изучение креативности в условиях олимпиадного движения по математике позволяет получить достаточно достоверные результаты, так как в этом случае воссоздается и профессиональный, и социальный контексты будущей деятельности человека, что способствует формированию, в первую очередь надпредметных общекультурных компетенций.

Рассмотренный метод изучения креативности в процессе профессионального становления в условиях олимпиадного движения по математике использовался нами при проектировании образовательного процесса [5] и позволил повысить качество подготовки специалистов, выразившееся в выходе большего числа обучающихся на креативный уровень интеллектуальной активности и освоении ими области профессиональной деятельности в дальнейшем на более высоком уровне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богоявленская, Д.Б.* Психология творческих способностей: учеб. пособие. М.: Изд. центр «Академия», 2002. 320 с.
2. *Попов, А.И.* Методологические основы и практические аспекты организации олимпиадного движения по учебным дисциплинам в вузе: монография / А.И. Попов, Н.П. Пучков. Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. 212 с.
3. Применение математических знаний в профессиональной деятельности. Пособие для саморазвития бакалавра. Ч.1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / Н.П. Пучков, Т.В. Жуковская, Е.А. Молоканова, И.А. Парфенова, А.И. Попов. Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. 96 с.
4. Применение математических знаний в профессиональной деятельности. Пособие для саморазвития бакалавра. Ч.2. Теория вероятностей и математическая статистика / Н.П. Пучков, Т.В. Жуковская, Е.А. Молоканова, И.А. Парфенова, А.И. Попов. Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013. 64 с.
5. *Попов, А.И.* Олимпиадное движение по математике как способ совершенствования самостоятельной работы студентов младших курсов // А.И. Попов, Е.А. Левченко // Вестник Томск. гос. педагог. ун-та. 2013. Вып. 1 (129). С. 132-135.

УДК 517.2

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ
В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ**

Предлагается вариант изложения темы « неявная функция » курса математики.

Ключевые слова: теорема о неявной функции, методика преподавания.

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**THE IMPLICIT FUNCTION THEOREM
IN A COURSE OF MATHEMATICS FOR ENGINEERS**

We offer a variant of a presentation of a topic "implicit function" of a course of mathematics.

Keywords: implicit function theorem, methods of teaching.

Теорема о неявной функции в различных ее вариантах является одной из основных теорем математического анализа. Однако традиционная манера изложения в учебниках и задачниках, предназначенных для технических вузов, в частности, в [1–6], и, как следствие, на лекциях и практических занятиях мало способствует пониманию ее роли. Например, в хорошем задачнике [1] теорема о неявной функции вообще не упоминается; на неявную функцию имеются только задачи следующего типа: найти

$\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ или $\frac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$, если $x^3 - 2xy + y^3 = 0$. Что эти выраже-

ния означают, внятно не объясняется. В учебнике [5] теорема о неявной функции сформулирована и доказана, но никаких примеров нет, а в сопровождающем учебник задачнике [6] на неявную функцию одной переменной имеется единственная задача со следующей формулировкой: найти производные y'_x и y''_{x^2} неявной функции, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Мы предлагаем свой вариант изложения понятия неявной функции и теоремы о неявной функции.

1. Понятие неявной функции. В приложениях математики, если даже зависимость одной величины, скажем y , от другой величины x является функциональной, то есть каждому допустимому значению x соответствует единственное значение $y = y(x)$, то зачастую неизвестна явная формула для вычисления $y(x)$. Зависимость задается неявно уравнением вида $f(x, y) = 0$. Дадим точное определение.

Рассмотрим уравнение

$$f(x, y) = 0 \quad (1)$$

для (x, y) , принадлежащих некоторой области D на числовой плоскости \mathbb{R}^2 . Пусть существует такое множество $J \subset \mathbb{R}$, что для каждого $x \in J$ уравнение (1) имеет относительно y единственное решение, которое обозначим $y(x)$, а при $x \in \mathbb{R} \setminus J$ решений нет. Тем самым, задана функция $y = y(x)$ с областью определения J . Она называется *функцией, заданной неявно уравнением (1) в области D* , или *неявной функцией, заданной уравнением (1) в области D* .

Например, уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ($x^2 + y^2 = 1$) в верхней полуплоскости $y \geq 0$ задает неявную функцию $y_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, а в нижней полуплоскости $y \leq 0$ — неявную функцию $y_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$. На всей плоскости это уравнение не задает неявную функцию, так как при любом $x \neq \pm 1$ оно имеет либо два решения, либо ни одного.

В рассмотренном простом примере мы получили для неявной функции «явное» выражение. В общем случае это сделать нельзя, и возникают следующие вопросы: какие условия на f и D гарантирует существование неявной функции и какие свойства у неявной функции? Например, имеет ли она производные и как их вычислить?

2. Теорема о неявной функции. Пусть $f(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и

1) $f(x_0, y_0) = 0$,

2) $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда существуют прямоугольная окрестность точки (x_0, y_0)

$$\Pi_{\delta, \varepsilon} = \{(x, y) : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$$

и функция $y(x)$, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ такие, что

$$f(x, y) = 0 \text{ при } (x, y) \in \Pi_{\delta, \varepsilon} \Leftrightarrow y = y(x), \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta. \quad (2)$$

При этом

$$y(x_0) = y_0, \quad (3)$$

$y(x)$ – непрерывно дифференцируема, для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$y'(x) = -\frac{f'_x(x, y(x))}{f'_y(x, y(x))}, \quad (4)$$

и, в частности,

$$y'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}. \quad (5)$$

Утверждение (1) теоремы равносильно тому, что при любом $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ уравнение $f(x, y) = 0$, $(x, y) \in \Pi_{\delta, \varepsilon}$ имеет относительно y единственное решение $y = y(x)$, то есть $y(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ – неявная функция заданная уравнением (1) в окрестности $\Pi_{\delta, \varepsilon}$. На геометрическом языке (2) означает, что часть нулевой линии уровня функции $f(x, y)$, лежащая в окрестности $\Pi_{\delta, \varepsilon}$, является графиком функции $y(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (рис. 1).

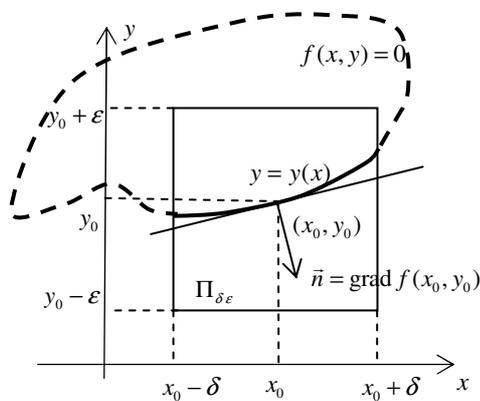


Рис. 1

Хотя доказательство теоремы, несомненно, полезно, но при теперешнем положении вещей для него нет времени на лекциях. Тем не менее, можно дать понятные неформальные «правдоподобные» объяснения.

Условие 1) означает, что линия уровня $f(x, y) = 0$ проходит через точку (x_0, y_0) . Чтобы прояснить смысл условия 2), заменим в уравнении $f(x, y) = 0$ функцию $f(x, y)$ на ее линейную часть

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

В малой окрестности $\Pi_{\delta, \varepsilon}$ имеем «хорошее» приближение функции. Получим линейное уравнение $f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$. Условие 2) гарантирует его решение относительно y :

$$y = y_0 - \frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

Для этой функции $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$, что согласуется

с (4) и (5). Близкие объяснения есть, например, в [7].

Другой подход к пояснению условия 2) связан с тем, что при этом условии градиент $\vec{n} = \text{grad } f(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$ не параллелен оси Ox , а касательная $f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$ к линии $f(x, y) = 0$ в точке (x_0, y_0) не параллельна оси Oy и потому является графиком функции $y = y_0 - \frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}(x - x_0)$. Так как в окрестности точки касания линия уровня «близка» к касательной, то она также «должна» быть графиком функции $y(x) \approx y_0 - \frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}(x - x_0)$. Так как

$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$, то имеем (3) и (4).

Если условие 2) не выполняется, то утверждение теоремы, вообще говоря, не имеет места. Например, для уравнения $f = y^2 - x = 0$ $f(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, $f'_x(0, 0) \neq 0$ и оно не задает в окрестности точки $(0, 0)$ неявную функцию $y = y(x)$, хотя задает неявно функцию $x = y^2$ (рис. 2). Для уравнения $f = y^2 - x^2 = 0$ $f(0, 0) = f'_y(0, 0) = f'_x(0, 0) = 0$ и оно не задает в окрестности точки $(0, 0)$ ни функцию $y = y(x)$, ни функцию $x = x(y)$ (рис. 3).

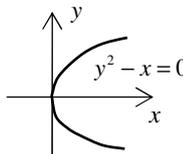


Рис. 2

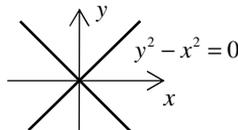


Рис. 3

Заметим, что формула (4) выражает значение производной $y'(x)$ не только через x , но и через значение $y(x)$, нам не известное при $x \neq x_0$.

Важно, что теорема о неявной функции позволяет не только доказать существование неявной функции, но и найти ее приближенно. Из формулы (4) при $x = x_0$, то есть из (5), находим $y'(x_0)$. Дифференцируя последовательно n раз тождество (4) и подставляя $x = x_0$, получим значения производных $y''(x_0), \dots, y^{(n)}(x_0)$ при любом натуральном n . По формуле Тейлора

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

мы получаем приближение неявной функции $y(x)$ многочленом любой степени.

3. Примеры. Следующие и аналогичные примеры можно привести как на лекциях, так и на практических занятиях.

Пример 1. Убедиться, что уравнение $2x^3 + 3xy - y^3 = 0$ задает в окрестности точки $(1, 2)$ неявную функцию $y = y(x)$. Найти $y(1)$ и $y'(1)$.

Решение. Обозначим $f(x, y) = 2x^3 + 3xy - y^3$. Так как 1) $f(1, 2) = 2 + 6 - 8 = 0$, 2) $f'_y(1, 2) = [3x - 3y^2]_{x=1, y=2} = -9 \neq 0$, то в точке $(1, 2)$ выполняются условия теоремы о неявной функции, и потому уравнение задает в некоторой окрестности этой точки неявную функцию $y = y(x)$.

При этом $y(1) = 2$, $y'(1) = -\frac{f'_x(1, 2)}{f'_y(1, 2)} = -\frac{3x^2 + 3y}{3x - 3y^2} \Big|_{x=1, y=2} = 1$.

Пример 2. Убедиться, что уравнение $xe^y + y + x^3 = 0$ задает в окрестности точки $(0, 0)$ неявную функцию $y = y(x)$. Найти $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ и приблизить $y(x)$ многочленом второго порядка.

Решение. Обозначим $f(x, y) = xe^y + y + x^3$. Так как 1) $f(0, 0) = 0$, 2) $f'_y(0, 0) = [xe^y + 1]_{x=y=0} = 1 \neq 0$, то в точке $(0, 0)$ выполняются условия теоремы о неявной функции и потому уравнение задает в некоторой окрестности этой точки неявную функцию $y = y(x)$. Находим $y(0) = 0$,

$$y'(x) = -\frac{f'_x(x, y(x))}{f'_y(x, y(x))} = -\frac{e^{y(x)} + 3x^2}{xe^{y(x)} + 1}.$$

Подставляя сюда $x = 0$ и $y(0) = 0$, получаем $y'(0) = -\frac{e^0 + 0}{0 + 1} = -1$.

Подставляя в выражение

$$y''(x) = (y'(x))' = -\frac{(e^{y(x)}y'(x) + 6x)(xe^{y(x)} + 1) - (e^{y(x)} + 3x^2)(e^{y(x)} + xe^{y(x)}y'(x))}{(xe^{y(x)} + 1)^2}$$

$x = 0$, $y(0) = 0$ и $y'(0) = -1$, находим $y''(0) = -\frac{(e^0(-1)) \cdot 1 - e^0 e^0}{1} = 2$.

По формуле Тейлора $y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$ получаем

$y(x) = -x + x^2 + o(x^2)$ и $y(x) \approx -x + x^2$ при x , достаточно близких к нулю.

Отметим, что теорема о неявной функции является локальной теоремой – она дает существование $y(x)$ на некотором неопределенном интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где δ может оказаться сколь угодно малым. В следующем примере доказывается существование неявной функции наперед заданном интервале. Решение не сводится к теореме о неявной функции, а использует идею ее доказательства.

Пример 3. Убедиться, что уравнение $4x + 2y + \sin x + \cos y = 0$ задает неявную функцию $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Исследовать ее на монотонность.

Решение. Обозначим $f(x, y) = 4x + 2y + \sin x + \cos y$. Так как $f'_y(x, y) = 2 - \sin y > 0$, то для любого $x \in \mathbb{R}$ $f(x, y)$ – возрастающая функция аргумента y . Кроме того, $\lim_{y \rightarrow -\infty} f(x, y) = -\infty$, а $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$.

Поэтому для любого $x \in \mathbb{R}$ уравнение имеет относительно y единственное решение $y = y(x)$, то есть уравнение задает неявную функцию $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Зададим $x_0 \in \mathbb{R}$ и обозначим $y_0 = y(x_0)$. Так как

$f(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то по теореме о неявной функции $y(x)$ - дифференцируемая функция и

$$y'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} = -\frac{4 + \cos x_0}{2 - \sin y_0}.$$

Поскольку и числитель, и знаменатель этой дроби положительны, то при любом $x_0 \in \mathbb{R}$ $y'(x_0) < 0$, то есть $y(x)$ - убывающая функция.

Теорема о неявной функции, собственно, говорит о том, что если при $x = x_0$ уравнение $f(x, y) = 0$ имеет решение $y = y_0$ и выполняется условие 2), то при x , близких к x_0 , оно имеет решение $y = y(x)$. Объяснения, откуда берутся числа x_0 и y_0 , желательны привести в содержательном примере.

Пример 4. Рассмотрим пружинный маятник – горизонтально расположенную цилиндрическую пружину, один конец которой зафиксирован, а к другому концу прикреплен металлический шарик, который может под действием пружины совершать колебания вдоль оси пружины. Выберем ось Ox вдоль оси пружины так, чтобы для недеформированной пружины центр шарика находился в точке O . Поместим в точку с координатой $x = l$ единичный положительный заряд. Найдем положение равновесия шарика, если в нем помещен малый заряд q . Будем при этом считать, что на шарик действует только сила упругости пружины и кулоновская сила.

Решение. На шарик, с центром в точке x по закону Гука действует сила упругости равная $-kx$, по закону Кулона – сила равная

$$-\frac{q}{(l-x)^2}.$$

Суммарная сила равна $f(q, x) = -\frac{q}{(l-x)^2} - kx$. Шарик находится в равновесии при $f(q, x) = 0$. При отсутствии заряда шарика, т.е. при $q = 0$ решение этого уравнения относительно x очевидно: $x = 0$. Так как

$$f'_x(0, 0) = \left[-\frac{2q}{(l-x)^3} - k \right]_{x=q=0} = -k \neq 0,$$

то по теореме о неявной функции при q , достаточно близких к нулю, уравнение $f(q, x) = 0$ имеет относительно x решение $x = x(q)$, где $x(0) = 0$, а

$$x'(0) = -\frac{f'_q(0, 0)}{f'_x(0, 0)} = -\frac{-1/l^2}{-k} = -\frac{1}{kl^2}.$$

Поэтому при малых значениях $|q|$ положение равновесия $x(q) = -\frac{1}{kl^2}q + o(q)$. При необходимости, мы можем получить $x(q)$ с точностью до $o(q^n)$ для любого натурального n .

4. О неявных функциях нескольких переменных. Если есть время, то, конечно, стоит рассмотреть неявные функции n переменных $y = y(x_1, \dots, x_n)$, задаваемых уравнением (1) при $x = (x_1, \dots, x_n)$, или хотя бы неявные функции $z = z(x, y)$, задаваемые уравнением $f(x, y, z) = 0$. Здесь уже можно обойтись без точных формулировок, но надо привести примеры, аналогичные 1 и 2. Заметим, что разложение неявной функции $z(x, y)$ по формуле Тейлора второго порядка – лучшее упражнение на применение этой формулы, чем разложение какой-нибудь элементарной функции, например, $z = \sqrt{1+2x+3y}$, где естественней использовать стандартные тейлоровские разложения, а не вычислять частные производные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит-ры. 1981. 464 с.
2. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит-ры, 1969. 440 с.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. М.: Высш. школа, 1999. 320 с.
4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. I. М.: Интеграл-Пресс, 2001.
5. Бугров, Я.С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисления / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит-ры. 1980. 342 с.
6. Бугров, Я.С. Высшая математика. Задачник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит-ры. 1982. 192 с.
7. Зорич, В.А. Математический анализ. Ч. I. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит-ры. 1981. 544 с.

УДК 372.851

Е.Н. Трофимец¹, В.Я. Трофимец²

¹Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: ezemifort@inbox.ru

²Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Россия, г. Ярославль, e-mail: zemifort@inbox.ru

ФОРМИРОВАНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ ЭКОНОМИСТА СРЕДСТВАМИ ИКТ НА ЗАНЯТИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ

Рассматриваются профессиональные компетенции экономистов, которые формируются в процессе решения профессионально-ориентированных экономических задач с использованием математических методов и информационных технологий.

Ключевые слова: компетентность, компетенции, информационные и коммуникационные технологии, профессионально-ориентированные экономические задачи.

E. N. Trophimets¹, V. Y. Trophimets²

¹Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: ezemifort@inbox.ru

²P. G. Demidov Yaroslavl State University
Russia, Yaroslavl, e-mail: zemifort@inbox.ru

THE FORMATION OF PROFESSIONAL COMPETENCE OF AN ECONOMIST WITH ICT AT MATHEMATICS COURSES

The article deals with the competence and expertise of economists which are formed in the process of teaching mathematics with the use of ICTs by the example of POET.

Key words: competence, competences, information and communication technology, professionally-oriented economic tasks.

В соответствии с ФГОС ВПО по направлению 080100 «Экономика» математические дисциплины, такие как «Линейная алгебра», «Математический анализ», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Методы оптимальных решений», участвуют в формировании следующих профессиональных компетенций студентов-экономистов:

– способен выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ПК-5);

– способен на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты (ПК-6) [1].

Для формирования указанных компетенций наряду с традиционными технологиями обучения целесообразно использовать инновационные технологии, поддерживающие процесс освоения неартикулируемой части знаний и способствующие развитию у обучаемых как системного, так и творческого мышления. Одной из таких технологий является технология компьютерного моделирования, которая позволяет органично синтезировать знания по экономике, математике, информационным технологиям и обладает значительным дидактическим потенциалом в формировании профессиональных компетенций у студентов-экономистов.

Деятельность студента-экономиста, связанная с использованием информационных и коммуникационных технологий (ИКТ) в процессе изучения математики, направлена на решение образовательных и развивающих задач, среди которых можно выделить следующие:

- организация и проведение учебных занятий по математике в условиях использования средств ИКТ в образовательном процессе;
- создание и совершенствование методических систем обучения (по математике) на базе ИКТ;
- обучение студентов-экономистов необходимым навыкам использования средств ИКТ в будущей профессиональной деятельности;
- обеспечение педагогически целесообразного использования потенциала распределенного информационного ресурса, предоставляемого Интернетом;
- развитие собственного творческого потенциала и потенциала обучающегося, необходимого для дальнейшего самообучения, саморазвития и самореализации в условиях развития и совершенствования средств ИКТ.

Фокус внимания сместим на формирование у студентов-экономистов профессиональных компетенций ПК-5 и ПК-6 средствами ИКТ в процессе обучения математике при решении профессионально-ориентированных экономических задач (ПОЭЗ). В качестве примера рассмотрим задачу анализа чувствительности критериев эффективности инвестиционного проекта, профессиональное решение которой базируется на совместном применении знаний из области экономики, математики и информатики.

Суть метода анализа чувствительности критериев эффективности проекта (в дальнейшем просто метод анализа чувствительности) состоит в численном измерении влияния исходных параметров проекта на его эффективность (как правило, на показатель чистой современной стоимости *NPV* – net present value). Другими словами, этот метод позволяет ответить на вопрос: как изменится критерий эффективности проекта, если изменит-

ся на определенную величину какой-либо из параметров проекта? Отсюда его второе название – анализ «что будет, если» («what if» analysis) [2].

Риск рассматривается как степень чувствительности чистого дисконтированного дохода к изменению условий функционирования (изменению налоговых платежей, ценовым изменениям, изменениям средних переменных издержек и т. п.), т. е. чем сильнее реагирует показатель экономической эффективности проекта на изменения входных величин, тем сильнее проект подвержен соответствующему риску.

Типовая процедура анализа чувствительности предполагает изменение одного исходного параметра, в то время как значения остальных считаются постоянными величинами. Как правило, проведение подобного анализа предполагает выполнение следующих этапов:

1. В виде математического уравнения задается взаимосвязь между исходными параметрами проекта и его критерием эффективности.
2. Определяются наиболее вероятные значения для исходных параметров проекта и возможные диапазоны их изменений.
3. Путем изменения значений исходных параметров проекта исследуется их влияние на критерий эффективности.

Рассмотрим один из возможных подходов практической реализации перечисленных выше этапов метода анализа чувствительности критериев эффективности проекта.

Как было отмечено выше, наиболее распространённым в практике инвестиционного проектирования является показатель NPV . Этот показатель рассчитывается по известным экономическим соотношениям и основан на оценке денежных потоков от операционной, инвестиционной и финансовой деятельности предприятия.

Базовая формула для расчета показателя NPV имеет следующий вид:

$$NPV = \sum_{t=1}^n \frac{[Q \times (P - VC_1) - FC - A] \times (1 - T) + A}{(1 + r)^t} - I_0 ,$$

Данная формула является математической моделью исследуемой экономической системы, в роли которой выступает инвестиционный проект.

Вторым этапом моделирования является разделение параметров проекта на детерминированные и стохастические (или случайные). Принимая во внимание экономическую суть параметров и степень присутствия в них случайной составляющей, к группе *детерминированных параметров* были отнесены: I_0 – сумма инвестиций; r – норма дисконта, %; T – налог на прибыль, %; n – число периодов реализации проекта; A – амортизационные отчисления; к группе *стохастических параметров* были отнесены: Q – объем выпуска, шт.; P – цена за штуку; FC – постоянные издержки; VC_1 – переменные издержки на единицу продукции.

В качестве показателя чувствительности, предлагается использовать коэффициент эластичности, показывающий на сколько процентов в среднем изменится значение критерия эффективности при изменении соответствующего исходного параметра проекта на 1%. В качестве информационной базы для расчета коэффициента эластичности будем использовать таблицу подстановки.

Таблица подстановки позволяет проанализировать, как будет изменяться значение критерия NPV при изменении значений выбранного стохастического параметра. На основе рядов данных таблицы подстановки (графы «Варьируемые значения стохастических параметров проекта X » и «Значения NPV ») может быть найден коэффициент эластичности по формуле

$$\varepsilon = a \frac{\bar{X}}{NPV},$$

где \bar{X} – среднее значение соответствующего стохастического параметра проекта; \overline{NPV} – среднее значение критерия NPV ; a – коэффициент в уравнении парной линейной регрессии $NPV = aX + b$.

Нахождение параметров уравнения парной линейной регрессии $NPV = aX + b$ может быть осуществлено с использованием метода наименьших квадратов.

После нахождения коэффициентов эластичности для каждого из стохастических параметров проекта они заносятся в таблицу чувствительности. Знак « $-$ » при коэффициенте эластичности говорит об обратном изменении NPV при изменении стохастического параметра.

В таблице чувствительности значения чувствительности представляются качественными оценками из следующего множества: {«очень низкая»; «низкая»; «средняя»; «высокая»; «очень высокая»}. Чётких границ чувствительности для определённых значений коэффициента эластичности не существует, однако на основе анализа различных источников могут быть предложены следующие опорные границы, представленные в табл. 1.

Таблица 1

Абсолютное значение коэффициента эластичности	Чувствительность
$\varepsilon < 0,5$	Очень низкая
$0,5 \leq \varepsilon < 2$	Низкая
$2 \leq \varepsilon < 5$	Средняя
$5 \leq \varepsilon < 10$	Высокая
$\varepsilon \geq 10$	Очень высокая

Высокое значение коэффициента эластичности говорит о том, что параметр следует подвергнуть дальнейшему исследованию на рискovanность (произвести оценку риска по годам, так как денежные потоки проекта в первые годы можно оценить с большей точностью, чем в последующие) и внимательно наблюдать за ним в ходе реализации проекта.

Анализ чувствительности критерия NPV к изменению стохастических параметров проекта удобно проводить в MSExcel с использованием инструмента Таблица подстановки (рис. 1).

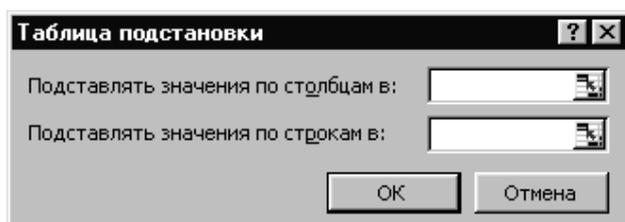


Рис. 1. Диалоговое окно «Таблица подстановки»

Завершая рассмотрение метода анализа чувствительности, отметим, что он является хорошей иллюстрацией влияния отдельных исходных параметров на результат и показывает направление дальнейшего исследования. Вместе с тем данный метод обладает и рядом недостатков, наиболее существенными из которых являются:

- предполагает изменение одного исходного параметра, в то время как остальные считаются постоянными величинами. Однако на практике между параметрами существуют взаимосвязи, и изменение одного из параметров часто автоматически приводит к изменению остальных;
- не позволяет получить вероятностные оценки возможных отклонений анализируемых критериев.

Первый недостаток может быть преодолен путем построения уравнений взаимосвязей параметров или, если первое не возможно, путем одновременного изменения нескольких исходных параметров. Инструмент MSExcel Таблица подстановки позволяет проводить анализ чувствительности при одновременном изменении двух исходных параметров.

Второго недостатка лишены методы анализа рисков инвестиционных проектов, базирующиеся не только на концепции временной стоимости денег, но и на вероятностных подходах.

Таким образом, совместное применение математических методов и информационных технологий в образовательном процессе способствует не только формированию профессиональных компетенций, но и развивает у студентов-экономистов как системное, так и творческое мышление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 080100 Экономика (квалификация (степень) «бакалавр») (утв. приказом Министерства образования и науки РФ от 21 декабря 2009 г. № 747).
2. *Оленикова, Ю.К.* Математические модели экономических систем / Ю.К. Оленикова, Е.Н. Трофимец, В.Я. Трофимец. Ярославль: ЯГТУ, 2008. 172 с.

УДК 62.501.25

М. П. Цыганков, А. В. Игнатъев

Ярославский государственный технический университет,
Россия, г. Ярославль, e-mail: cigg@rambler.ru, brusiks@rambler.ru

ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ ЗАДАЧ В УНИВЕРСАЛЬНЫХ И СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ СРЕДАХ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Сопоставлены возможности, достоинства и недостатки выполнения расчетов в специализированных пакетах компьютерной математики и программных приложениях, подготовленных в универсальных языках программирования.

Ключевые слова: компьютерная математика, расчеты, язык программирования, интерфейс пользователя, библиотеки программ.

M. P. Tsygankov, A. V. Ignatyev

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: cigg@rambler.ru, brusiks@rambler.ru

EXECUTION OF COMPUTATIONAL PROBLEMS IN UNIVERSAL AND SPECIALIZED PROGRAMMING ENVIRONMENTS

Advantages and disadvantages of performing calculations in specialized packages of computer mathematics and program applications, designed in universal programming languages are compared.

Keywords: Packages of Computer Mathematics, math calculations, programming language, user interface, software libraries.

Информатизация систем управления различного уровня – одно из магистральных направлений повышения их эффективности. Поэтому изучению компьютерной техники, компьютерных технологий, программиро-

вания уделяется значительное внимание в образовательных программах, связанных с освоениями профильных компетенций в задачах разработки, наладки и эксплуатации информационно-управляющих систем различного масштаба и функциональности.

Специфика решения указанных задач зачастую связана с необходимостью выполнения расчетов различной степени сложности. Естественным путем автоматизации решения расчетных задач представляется использование специализированных пакетов (или иначе систем) компьютерной математики, соответственно ПКМ или СКМ.

На первый взгляд такой выбор является безальтернативным. Действительно полная или частичная автоматизация поиска решений от сформулированной пользователем исходной постановки проблемы до получения и представления результатов для анализа в удобной, например, графической наглядной форме визуализации, как раз и является целью создания таких пакетов. Оперативность поиска решений при работе с ПКМ: Matlab, MathCAD и др., – достигается за счет использования встроенного инструментария, представленного широким набором математических объектов и методов, освобождающих пользователя от необходимости выявления способов, алгоритмизации последовательности математических преобразований, а также программирования (кодирования алгоритмов) и отладки программ.

Таким образом, во многих случаях выполнения достаточно сложных расчетов пользователю после постановки задачи остается лишь выполнять анализ результатов вариантной корректировки исходных данных, условий и ограничений. Окончательный выбор может осуществляться на основе субъективных предпочтений или по тому или иному формальному критерию рациональности или оптимальности.

Перечисленные достоинства до недавнего времени позволяли полагать, что ПКМ должны вытеснить языки универсального (общего) назначения (далее ЯОН), по крайней мере, в области решения расчетных задач популярных или (и) необходимых в среде студентов, инженеров, научных работников.

Основанием для этих ошибочных предположений является ограничение функционала встроенных вычислительных средств ЯОН возможностями выполнения только элементарных математических и логических операций. Нотация соответствующих выражений и функций хорошо знакома пользователям и представлена достаточно близкой к естественной форме, например, $\sin x$, $\ln(x/(1+z))$ и т.д. Инструментарием же ПКМ не только перекрываются эти возможности без изменения (или без заметного изменения) нотации, но и предоставляются встроенные средства интегрального, дифференциального исчисления, математического анализа и т.д. Особенно удобны для восприятия такие объекты в средах MathCAD и Mathematica. Примеры отображения некоторых выражений в MathCAD

при аналитическом выполнении интегрирования, численном интегрировании, взятии пределов приведены на рис. 1.

Дополнительным аргументом в пользу применения для решения расчетных задач именно ПКМ является дополнение большинства из них языками программирования, позволяющими подобно ЯОН организовывать гибкое управление автоматическим выполнением последовательности преобразования данных.

$$\int_0^b \frac{25x^2}{x+1} dx \rightarrow 25 \cdot \ln(b+1) - 25 \cdot b + \frac{25 \cdot b^2}{2} \quad \int_0^5 \frac{25x^2}{x+1} dx = 232.294 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$$

Рис. 1. Примеры математических выражений в MathCAD

При этом совершенно неправомерно упускаются из вида требования гибкости альтернативного "человеко-машинного" управления вариантными расчетами, особенно важные в условиях их повторяемости. Такое управление в компьютерных приложениях, разработанных, например, для производственно-технологических задач, осуществляется с помощью специализированного интерфейса пользователя. И именно ЯОН обладают мощными и гибкими средствами создания подобных интерфейсов в расчетных приложениях.

Аргументация в пользу применения ПКМ оказывается несостоятельной и в тех случаях, когда для решения расчетных задач оказывается достаточным использования интенсивно продвигаемых в последние годы компактно организованных библиотечных средств, специализированных для выполнения вычислений вне области встроеного инструментария ЯОН.

Примером может служить ALGLIB - кросс-платформенная библиотека численного анализа, поддерживающая несколько языков программирования (C++, C#, Pascal, VBA) и несколько операционных систем (Windows, Linux, Solaris). Возможности ALGLIB включают в себя: линейную алгебру (прямые алгоритмы, декомпозиция EVD, SVD), оптимизацию, FFT (Быстрые преобразования Фурье и др.), численные интегрирование и решение обыкновенных дифференциальных уравнений и др.

Дополненные библиотечными возможностями ЯОН приобретают ряд важнейших достоинств ПКМ, имея по отношению к последним более гибкую и широкую базу разработки интерфейса пользователя. Сравнивая, например, относительно бедный набор компонентов среды разработки пользовательских графических интерфейсов Matlab (GUI design environment) с набором компонентов среды Delphi, приходим к выводу о том, что множество последних намного шире.

Кроме того, существенным достоинством "библиотечного дополнения" ЯОН по отношению к ПКМ является автономность созданного специа-

лизированного расчетного приложения, работающего непосредственно под управлением операционной системы. Не требуется применения громоздкой и избыточной среды разработки (ПКМ), в которой и выполняются расчеты во втором случае. Действительно, ПКМ, как правило, устанавливают лишь на компьютерах, предназначенных для узко специализированных целей выполнения сложных математических расчетов. Переносимость приложения, понимаемая в этом смысле – одно из важных преимуществ разработок в среде ЯОН по отношению к ПКМ.

Подобно ALGLIB многие библиотеки для ЯОН поддерживают широкое разнообразие языков и платформ. Например, в среде Delphi используется так называемая библиотека визуальных компонентов (VCL – Visual Component Library) [2]. Она позволяет работать не только с экранными формами и различными элементами интерфейса, но и предоставляет возможности для взаимодействия с базами данных, операционной системой, программирования сетевых приложений и многое другое. В настоящее время библиотека VCL содержит несколько сотен визуальных и не визуальных компонентов. Разработчик имеет возможность удобно и быстро расширять набор компонентов собственными модификациями, что обеспечивает практически неограниченные возможности по персонализации пользовательского интерфейса.

На рис. 2 представлен подготовленный в среде визуальной разработки ПКМ Matlab пример интерфейса пользователя. Все очень ограниченное разнообразие типов компонентов в палитре элементов управления включено в GUI, но, тем не менее, позволяет реализовать только самые необходимые и общие функции управления расчетами, визуализации и обращения к данным.

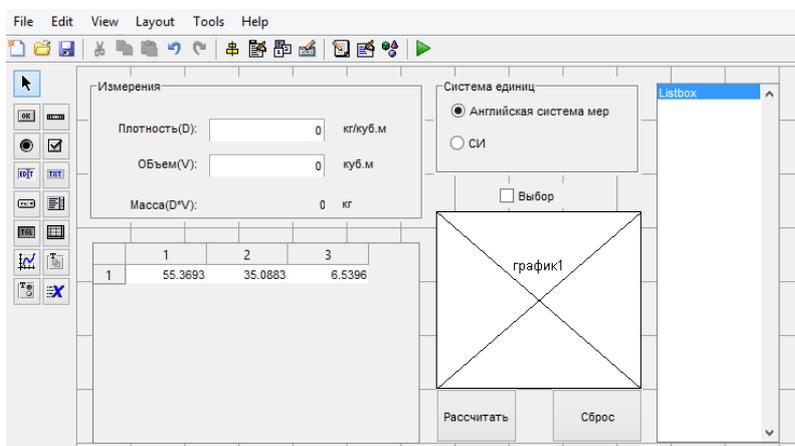


Рис. 2. Среда разработки GUI Matlab

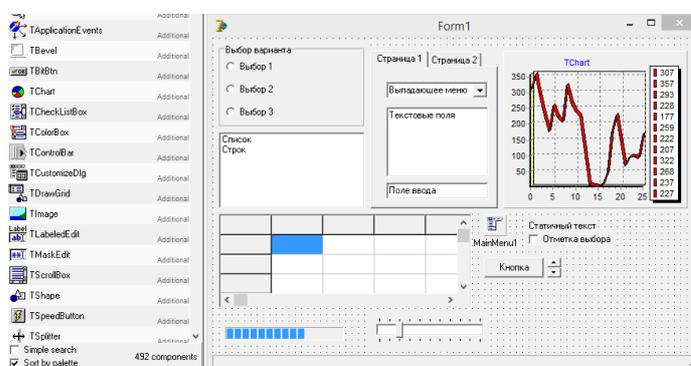


Рис. 3. Среда разработки GUI Delphi

Среда разработки интерфейса в Delphi намного разнообразнее (рис. 3). На основное окно приложения в примере вынесены только некоторые элементы графического интерфейса из их полного набора. Тем не менее, даже они позволяют пользоваться такими удобными средствами и способами доступа к данным и управления расчетами, как различного рода ползунки, полосы заполнения, окна для работы с текстом и древовидными списками, таблицами и графиками. Общее число выбираемых для интерфейса компонентов насчитывает почти 500 позиций.

Однако платой за такое разнообразие возможностей является более высокий уровень требований к разработчику приложений. Поэтому область преимущественного использования ПКМ продолжают определять простые инструментальные средства, доступные для быстрой организации среды решения задачи: групповые (матричные и векторизованные) операции, аналитические преобразования и др.

Таким образом, несмотря на тенденцию сближения возможностей ЯОН и ПКМ в рассматриваемой области (решения научных, инженерных и учебных расчетных задач), следует заключить, что для разработки расчетных приложений целесообразно искать компромисс между простотой доступа к встроенному инструментарию математических преобразований и разнообразия математического аппарата ПКМ, с одной стороны, и удобством и гибкостью "человеко-машинного" управления расчетами при создании такой среды в ЯОН – с другой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ALGLIB [Электронный ресурс]. 1999-2014. URL: <http://alglib.sources.ru>. (Дата обращения: 18.05.2014)
2. VCL Overview - RAD Studio [Электронный ресурс]. URL: http://docwiki.embarcadero.com/RADStudio/XE6/en/VCL_Overview

УДК 54:378

В. В. Донцов

Университет Брока,
Канада, г. Сен-Кэтринс, e-mail: vdontsov@brocku.ca

**ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ
В УНИВЕРСИТЕТАХ И КОЛЛЕДЖАХ КАНАДЫ:
ВЗГЛЯД ИЗНУТРИ**

Сравнение методик преподавания в канадских и российских вузах. Анализ позитивных тенденций канадской системы математического образования и применения данных методик в российской системе образования.

Ключевые слова: цикл Колба; таксономия Блума; обучение, базирующееся на результате; тьюторинг; отзыв о преподавателе.

V. V. DONTSOV

*Brock University,
Canada, St. Catharines, e-mail: vdontsov@brocku.ca*

**TEACHING MATHEMATICS IN CANADIAN COLLEGES
AND UNIVERSITIES: A LOOK FROM WITHIN**

A comparison of the Canadian style of teaching at college or university level with Russian methods of teaching. The analysis of positive tendencies in Canadian mathematical education and methods which can be effectively applied in Russian system of education.

Keywords: Kolb's learning cycle, Bloom's taxonomy, Outcome based learning, diversity, (peer) tutoring, feedback.

В этой статье я хочу поделиться методикой моего преподавания в канадских колледжах и университетах, провести краткий сравнительный анализ североамериканской и российской систем образования, а также выявить позитивные моменты американской модели.

Всякий раз, начиная новый курс, оказывается, что я немного переоцениваю реальные знания студентов. В самом начале моего преподавания в одном из колледжей Торонто, на лекции по теме биномиальное распределение [1], я подготовил такой наглядный пример: "Игральная кость бросается десять раз, вероятность успеха (выпало "6") равна $p = 1/6$, вероятность неудачи - $q = 5/6$ ". Следующая картинка (слайд в PowerPoint) описывает результаты испытаний. Впоследствии, уже преподавая в университете, я осознал, что это картинка слишком сложна даже для студентов университетов, поскольку, во-первых, эта модель больше теоретическая, чем практическая и, во-вторых, она требует умственных усилий для понимания

этой схемы. Сейчас я исключил эту, на мой взгляд, красивую картинку, и свожу всё к формуле биномиального распределения и примерам (рис. 1). Студенты не любят задумываться и держать в голове больше одной логической цепочки, поэтому преподавание математики здесь крайне сложно, особенно если курс требует реальных базовых знаний. Студенты, начиная со школы, обучены выполнять команды, следовать инструкциям и понимать логику алгоритма. Я неоднократно наблюдал, как студент, деля число на 1, берёт калькулятор, и не потому что он не умеет считать, а потому что вычисления проводятся с помощью калькулятора и, не задумываясь над задачей, он следует инструкции.

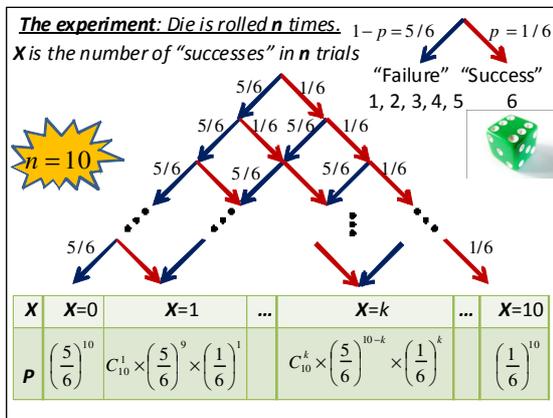


Рис. 1

Различие в образовании начинается со школьной скамьи. В Канаде это бессистемный подход с циклической подачей материала. Бессистемный материал, или "калейдоскоп знаний", это до одиннадцатого года обучения чередование некоторых глав физики, химии и биологии в рамках одного предмета Science (наука). В математике это теоремы, рождённые из небытия и используемые только для решения практических задач.

Математический базис не строится вовсе, а математическая логика, рассуждения и выводы заменяются схемой решения некоторых конкретных задач. Студенты понимают только алгоритм решения, а не само решение. Моим университетским студентам очень нравится лекция по проверке гипотез [1]: шаг 1: утверждение основной и альтернативной гипотезы, шаг 2: нахождение критического значения, шаг 3: нахождение статистики, шаг 4: сравнение статистики с критическим значением и вывод. Для них это прекрасная лекция, поскольку последовательность действий напоминает им инструкцию и требует минимальной умственной нагрузки. Обобщая эту мысль, хочу заметить, что в российской методике преподавания математики мы движемся от теоретической базы к конкретным приложениям, пытаемся над базисом выстроить надстройку. В канадских же образовательных учреждениях - наоборот, теория выстраивается от примера и привязывается к примеру. Зачастую студенты не могут справиться со слегка видоизме-

ненной задачей. Другой характерной чертой школьного образования является цикличность подачи знаний (каждый год старые темы повторяются с добавлением нового материала), что, в принципе, неплохо. Однако при полном отсутствии базисных знаний у школьника не складывается единой картины происходящего, и добросовестные школьники просто пытаются всё запомнить. К окончанию школы выпускник владеет лишь урывочными и бессистемными знаниями, которые огромный штат репетиторов пытается привести в норму. Подавляющее большинство школьников старших классов пользуются услугами репетиторов только для того, чтобы поддержать нормальную успеваемость в школе (в Северной Америке и Европе нет системы вступительных экзаменов). Только альтернативные занятия помогают некоторым студентам быть на достойном уровне и успешно учиться. Таким образом, студенты на следующем этапе обучения в колледже или в университете имеют очень разный уровень подготовки.

Далее я хочу привести одну цитату директора физико-математической школы Торонто, нашего соотечественника Аркадия Цитрина [2]: "... High school – малоэффективная, непоследовательная, поверхностная, механическая процедура перекачивания обрывочной (и часто совершенно ненужной, лишней информации) из откровенно слабых учебников, изобилующих ошибками, в головы студентов. Осуществляется она посредством учителей, которые в полном соответствии со школьной программой, являются в большинстве случаев лишь статистами, слепо исполняющими требования и установки, спущенные сверху, копирующие учебник и не имеющие ни достаточной квалификации, ни собственного мнения, ни творческого подхода; которые из года в год формируют такую же, как и они, сами серую массу малообразованных, безынициативных выпускников, не умеющих и не желающих учиться." Конечно, в этих словах есть элемент саморекламы, но в целом это отражает реальную картину.

Итак, следующая ступень – это университет или колледж. Колледж выполняет здесь роль ПТУ, техникума и университета одновременно. Задача колледжа – привить технические навыки (skills) по конкретной специальности, будь то бизнес, дизайн, медицина, или компьютерные технологии. Здесь не требуется аналитический ум или смекалка, только знание и исполнение набора инструкций, что является логическим продолжением школы. Один из крупнейших колледжей Торонто George Brown College обучает около 25 000 студентов, 80% выпускников по окончании программы находят постоянную работу. Многие студенты берут программу в колледже даже после университета с целью более быстрого трудоустройства.

Специфика колледжа сильно отличается от университета и имеет ряд характерных особенностей. К наиболее значимым можно отнести две: разнообразие состава студентов (diversity) по многим критериям: базовым

знаниям, возрасту, родному языку, способности воспринимать материал, занятости и конечную цель – это подготовку выпускников, владеющих конкретными навыками, применимыми в работе, без доучивания или переучивания, вне зависимости от исходного уровня студента. Исходя из этих принципов, все колледжи применяют модель OBL (outcome based learning), которую постепенно начинают вводить и университеты. В дословном переводе - это обучение, основанное на результате. При построении такой модели сначала рассматривается то, что студент должен знать и чем владеть по окончании курса, и, на основе этого, разрабатывается курс от конца к началу, исключая все второстепенные факторы. Курс, построенный таким образом, целенаправленно бьёт на конечный результат (outcome) и, возможно, не даёт столь глубоких знаний, которые студент мог бы получить при традиционном подходе: сначала база, потом надстройка. В колледже нет теоретических лекций, нет семинаров, а есть урок, на котором преподаватель выполняет сложную многоцелевую задачу: сделать урок интересным, чтобы студент, оплативший круглую сумму, чувствовал себя комфортно, научить новым навыкам студентов всех уровней, объяснить применимость и адекватность полученных знаний и на шаг приблизиться к конечной цели курса. Именно поэтому в описании курса указываются конечные цели курса (course outcomes), а в начале каждого урока – рассказывается о том, чему студент научится в конце (lesson objectives). Модель OBL, для объективной оценки результата, опирается на таксономию Блума¹ [3], и колледж обязуется довести знания студента как минимум до пятого уровня по этой шкале.

Система университетского образования в Канаде в целом соответствует нашему традиционному представлению об университете и об образовании, но некоторые особенности я всё же отмечу (в таблице можно найти некоторые сравнительные характеристики колледжа/университета Канады и университета России).

Одной из главных особенностей образования в Канаде является связка **образование - бизнес**, бизнес по привлечению и удержанию клиента (студента). Среднего уровня университеты приглашают именитых профессоров для поднятия своего рейтинга, что способствует дополнительному государственному финансированию и привлечению дополнительных

¹ В 1956 году профессор Чикагского университета Бенджамин Блум опубликовал книгу «Таксономия образовательных целей» в которой выделил шесть уровней познавательной деятельности. Эта градация успешно использовалась в педагогике как руководство при планировании обучения: 1) знание – механическое запоминание информации, 2) понимание – способность объяснить факты, интерпретировать материал, 3) применение – способность использования знаний в новых ситуациях, 4) анализ – способность разделять целое на части, 5) синтез – умение комбинировать элементы для создания нового целого, 6) оценка – способность оценивать значение или использование информации на основе определенных стандартов.

Математическое образование

средств (студентов). В центре Торонто располагается очень престижный в Канаде университет (Университет Торонто ([UofT](#))) в котором, кстати, работают и наши коллеги из России. Стоимость образования в нем в полтора-два раза выше, чем в соседних университетах при практически одинаковой программе и качестве обучения. Студенты готовы платить за престиж, чтобы это в дальнейшем помогло при поиске работы.

	Канадский колледж	Канадский университет	Российский университет
Способ преподавания	Семинар	Лекция	Семинар и лекция
Способ подачи материала	Традиционный: доска и мел (маркер), компьютер с экраном для презентаций и аудио/видео, Технологии: SmartBoard и Iclicker (http://www.smarttech.ru/) и (http://www1.iclicker.com/)		Традиционный: доска и мел (маркер) и компьютер с экраном для презентаций и аудио/видео,
Метод проверки	Письменные тесты, домашние работы, контрольные работы (60-70%), итоговый экзамен (30-40%)		Тесты, домашние работы, контрольные работы (0-30%), итоговый экзамен (70-100%)
Литература	Крупный официальный издатель (такие как: Pearson , Nelson, McGraw Hill)		Официальные учебники и методическая литература
Сертификаты и дипломы	Бакалавр (B.Sc.),	Бакалавр (B.Sc.), Магистр (M.Sc.), Кандидат наук (Ph.D.)	Бакалавр (B.Sc.), Магистр (M.Sc.), Кандидат наук (Ph.D.), доктор наук
Оплата обучения	http://www.statcan.gc.ca/tables-tableaux/sum-som/101/cst01/educ50a-eng.htm		Образование бесплатно
Внеаудиторная помощь студенту	2-4 часа в неделю профессорские часы работы со студентами, учебные центры помощи студентам (tutoring learning centre) (оплачивает учреждение), помощь самих студентов (peer tutoring) более того студент может написать email преподавателю с вопросом касающимся курса и не только.		-

Образование-бизнес накладывает свой отпечаток и на деятельность преподавателя. Лекция профессора должна быть интересной и понятной, а итоговые оценки отличные, в крайнем случае хорошие, иначе, студенты будут искать альтернативные курсы. Результат такой политики - упрощенная подача материала, отсутствие глубины изложения и преднамеренное завышение оценок.

Второй характерной чертой канадского образования является **отсутствие методической литературы** на кафедрах. Крупные издатель-

ские компании – корпорации (publishers) давно перехватили этот прибыльный бизнес: они издают учебники, договариваются с колледжами и университетами, чтобы быть утверждёнными на программы, выпускают обучающие программы, тесты, предоставляют базы данных с задачами, присылают преподавателю копии учебника (у меня за два года преподавания скопилось шесть разных учебников по статистике) преследуя всё ту же цель – получить как можно большую прибыль с продаж от учебников. Именно поэтому они переиздаются ежегодно, и часто новое издание содержит больше ошибок, чем старые (материал, как правило, практически не меняется). Для преподавателя, у которого своё видение курса, и свой стиль подачи материала и подбора типовых задач, это, несомненно, дополнительная трудность. Студенты, с трудом воспринимающие упрощённый лекционный материал, испытывают ещё большую трудность, обращаясь к учебнику.

В-третьих, способ подачи материала и оценок в университете – это лекция, которая при отсутствии фундаментальной теории, является набором формулировок и схем решения некоторых задач. Если предмет требует хорошего понимания материала, студент дорабатывает его сам. Система оценок здесь накопительная, и для сдачи курса нужно набрать в итоге только 50% от максимума. Даже если студент совсем не разбирается в предмете, у него всегда есть хороший шанс сдать этот курс.

Все вышеперечисленные нюансы делают математическое образование в Канаде не столь конкурентным нашему, российскому образованию. Здесь уже традиционно считается, что в России очень сильные математики и поэтому мы востребованы в этой системе. Здесь есть сильные и толковые профессора, большая часть из которых имеет не местное образование. Совершенствуясь и являясь профессионалами очень узкого профиля, они могут достаточно эффективно развивать выбранную тематику на протяжении всего периода своей научной деятельности.

Мне довелось вести более десяти разных курсов в колледжах и университетах, поэтому я хочу рассказать о некоторых нюансах преподавания, и выделить позитивные моменты в канадской системе. Вот, например, курс статистики, который похож на нашу традиционную теорию вероятностей и мат. статистику для экономических и технических специальностей. Курс можно логически разбить на три составные части:

I. Описательная статистика (descriptive statistics): графическое представление данных, вычисление средних и дисперсии и популярный статистический аналог неравенства Чебышева, который носит название: Chebyshev's Theorem, утверждающей, что доля значений выборки находящихся внутри " k " - среднеквадратичных отклонений от среднего значения не меньше $1 - 1/k^2$.

II. Элементы теории вероятностей (theory of probability and random variables): комбинаторика, классическая и эмпирическая вероятность, условная вероятность, правила сложения и умножения, случайные величины, биномиальное распределение, распределение Пуассона и, конечно, нормальное распределение. Всё это даётся очень поверхностно и кратко, например, в нормальном распределении даже не указывается уравнение функции плотности и вообще какое либо уравнение, только картинка и таблицы. Поэтому третья часть, которая логически вытекает из второй, не составляет целостной картины.

III. Статистика (inferential statistics): интервальные оценки, проверка гипотез, регрессионный и корреляционный анализ, хи-квадрат распределение и дисперсионный анализ.

Это пример типичного курса в университете, который читается в течение 12 недель по три часа в неделю. Цель такого курса - дать базовые знания по статистике и научить наиболее простым техническим приёмам вычисления и анализа. Здесь отсутствуют какие-либо доказательства, и лишь иногда даются краткие пояснения. Каждая глава в учебнике начинается с примера из реальной жизни, который впоследствии разбирается. Многие объяснения звучат очень нелепо и странно. Я, например, узнал, что вероятность состоит из объективной вероятности (objective probability) и субъективной вероятности (subjective probability) и классифицируется как показано на рис. 2 [4].

Студент, едва решающий простейшие задачи, учит эту странную классификацию. Один из выпускников университета, который изучал маркетинг в колледже, к моему удивлению, хорошо помнил отличие формулы перестановок от формулы сочетаний. Однако, как

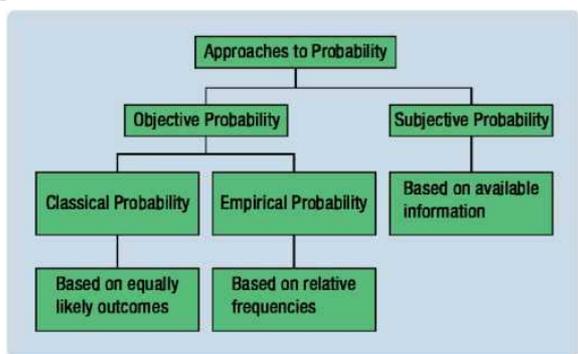


Рис. 2

впоследствии выяснилось, ни формулу перестановок, ни формулу сочетаний он применять не умеет, он помнит только отличие. Поскольку уровень студентов очень разный, порой приходится сталкиваться с очень необычными вопросами. Вот, например: "Профессор, Вы написали на доске формулу, подставили в неё числа, получили ответ, а как мне получить такой же ответ, если я пользуюсь калькулятором?" или: "Профессор, вы путаете

студентов, в ваших слайдах вы приводите формулу $E(X) = n \cdot p$, а на доске пишете $E(X) = p \cdot n$." Учитывая всё это, приходится упрощать лекцию и разбивать сложную тему на более простые составляющие. В колледжах, в связи с diversity и использованием OBL, очень популярен математический вариант модели Дэвида Колба [5] – цикла, состоящего из четырёх этапов (я покажу на примере объяснения формулы перестановок):

1) мотивация (motivation) - интересная информация, вопрос, постановка задачи, которые занимают студентов (3-5 минут). {Вы путешествуете по Европе и хотите посетить 7 городов. Сколько существует различных маршрутов последовательного посещения этих семи городов?}

2) понимание (comprehension) - краткое объяснение нового материала (10-15 минут). {Формула факториала $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ и как она получается.}

3) практика (practice) - использование изложенной теории на конкретном примере (5-10 минут). {На первом ряду сидят 6 студентов, сколько существует вариантов размещения студентов на эти шесть мест?}

4) приложение (application) - решение студентами практических задач с применением этой теории (10-15 минут). {Студенты решают аналогичные примеры, включая исходный.}

Если материал сложный, то он разбивается на несколько циклов с первыми тремя фазами, а потом "практика" по всем темам. Конечно, это работает при упрощённой подаче материала - если объясняется доказательство теоремы, то этот цикл неприменим. Однако, общая тенденция образования, в силу глобализации, идёт на упрощение материала в целом.

На лекциях, для самопроверки (четвёртый цикл), я часто даю лёгкие задачи на понимание (используя Powerpoint), и это немного отвлекает студентов. В первом слайде (рис. 3, а) требуется сопоставить значения нормально распределённой случайной величины и картинки. На втором слайде (рис. 3, б) - выбрать правильный ответ в комбинаторной задаче.

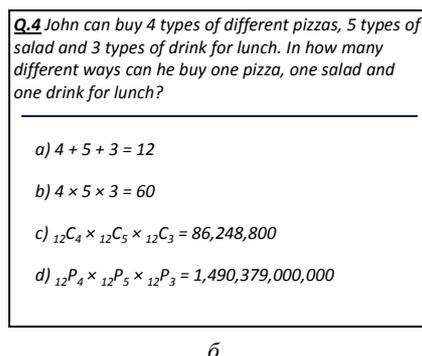
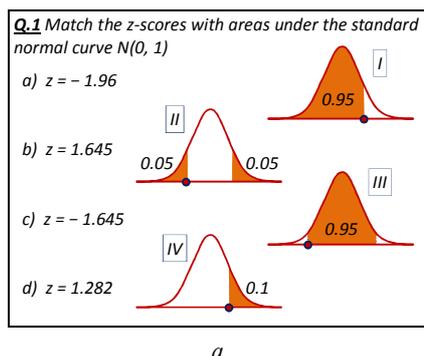


Рис. 3

Сейчас очень популярна новая технология "*Clicker*", которая используется для большой лекционной аудитории (более 500 человек). Преподаватель и студенты имеют лазерные устройства. Во время лекции профессор может задать вопрос(ы) с несколькими вариантами ответа. Студент выбирает ответ нажатием кнопки. Информация и статистика правильных ответов записывается в файл, и преподаватель может проверить уровень понимания материала, а также протестировать студента (устроить мини-тест во время лекции) и оценить его результаты.

К позитивным моментам североамериканской системы можно отнести peer-tutoring (студенческая взаимопомощь), узкую специализацию, обучение разноуровневых студентов (diverse students), взаимную интеграцию и отзывы о преподавателе (feedback).

Как уже было отмечено ранее, студенты, помимо интернета, имеют широкий спектр возможностей для самообучения. Во-первых, каждый профессор еженедельно проводит два часа индивидуальных консультаций; во-вторых, студенческий сервис помогает студентам во всём: проблемы в семье, со здоровьем, юридические услуги, и, конечно, консультации по базовым предметам, включая математику, и многое другое; наконец, в-третьих, сами студенты на платной основе (платит им университет) помогают своим товарищам (peer-tutoring). Здесь очень популярно совместное выполнение заданий и контрольных, и они не стесняются задавать друг другу и преподавателю вопросы, ответить на которые они легко могли бы и сами, потратив немного времени на самостоятельную работу.

Узкие специалисты в Америке могут не знать элементарных вещей в смежной дисциплине. Это можно рассматривать как минус в образовательной сфере, так и плюс в канадской системе, поскольку технологичное общество нуждается в высококвалифицированных специалистах узкого профиля, и мы, со своей широтой, иногда им уступаем в частном, хотя во многом превосходим в общем.

Обучение разноуровневых студентов является одной из главных задач канадского образования, провозглашающей равенство, а также представляет дополнительный доход для учреждения. Узкая специализация, что, прежде всего, является причиной упрощения материала, только способствует возможности успешного обучения студентов разных уровней.

Наша сильная со времён холодной войны система фундаментального образования создала много талантливых учёных, которые успешно работают на благо североамериканского и западного общества. И, к сожалению, Россия с каждым годом теряет эту базу в ущерб своему обществу и науке. Выпускнику канадского университета, свободно владеющему иностранным языком (английским или французским), представляется возможность учёбы и трудоустройства в любой стране мира, что по-

звонит ему выбрать то, что соответствует его знаниям и стремлениям. Зарплаты преподавателей в Америке и Европе не сильно разнятся, поэтому идёт активная взаимная интеграция учёных между различными университетами мира, и, конечно, они вносят свой вклад в развитие местного образования. К сожалению, многие российские учёные не могут также свободно влиться в этот процесс, да и привлечь иностранного специалиста бывает довольно сложно.

Студенты по окончании курса пишут отзывы о своём преподавателе, отвечая на вопросы анкеты. И несмотря на то, что слабые студенты не стесняются обвинять преподавателя во всех своих неудачах, в целом, распределение отзывов даёт объективную картину происходящего и преподаватель может внести коррективы в свою работу. Поскольку в Канаде, как я уже отмечал, образование это бизнес, то преподавателям с плохими отзывами испытывают определённые трудности.

В заключение хочу сказать, что преподавание в наши дни становится все сложнее и сложнее, и это связано с тем, что преподавателям приходится быстро осваивать новые методы и технологии, и, из-за растущей неоднородности уровня студентов, более гибко подходить к самому процессу обучения. Поколение последних 20-ти лет (в Канаде его называют generation-Y) сильно отличается от предшествующих, и наши традиционные методы преподавания требуют постоянной корректировки. Если мы будем изучать методики различных образовательных учреждений по всему миру и стремиться внедрить лучшее у нас, более широко осуществлять международные контакты и обмены, то мы сможем внести неоценимый вклад в нашу отечественную науку, а значит, и в наше будущее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гмурман, В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003. 479 с.
2. http://www.integralschool.com/articles/Dva_polusa.pdf
3. *Bloom, B.S.* Taxonomy of Educational Objectives, Handbook 1: Cognitive Domain. Longmans, 1956. 207 с.
4. *Lind, D.A.* Basic statistics for business & economics / D.A. Lind, W.G. Marchal, S.A. Wathen, C.A. Waite. McGraw-Hill, 2009. 510 с.
5. *Kolb, D. A.* Experiential learning: Experience as the source of learning and development. New Jersey: Prentice-Hall, 1984.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 624.072.33

А. Л. Балускин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: balushkinal@ystu.ru

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ АРМИРОВАННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Рассматриваются вопросы построения расчетных моделей для исследования процессов деформирования армированных стержневых конструкций на примере железобетонных.

Ключевые слова: адаптивно подвижные сетки, нелинейность деформирования, дискретность трещинообразования, депланация.

A. L. Balushkin

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: balushkinal@ystu.ru

FEATURES OF CREATIONS OF MATHEMATICAL MODELS OF THE REINFORCED BARS STRUCTURES

Questions of creation of settlement models for research of processes of deformation of the reinforced bar structures on the example of reinforced concrete are considered.

Keywords: adaptive mobile grids, nonlinearity of deformation, discretization of cracking, deplanation.

Рассмотрение аспектов деформирования армированных конструкций составляет важную часть механики деформируемого твердого тела (МДТТ).

Особую практическую значимость имеет исследование процессов силового деформирования железобетонных элементов, являющихся специфическими представителями композиционных конструкций, с армированием длинными дискретными волокнами – металлическими арматурны-

ми элементами в виде отдельных гибких стержней, канатов, проволок. Данные конструкции отличает широкий спектр использования во многих областях строительства, транспорта, энергетики, машиностроения и др. Кроме того, весьма широк диапазон условий эксплуатации таких конструкций, а также сочетание используемых исходных конструкционных материалов и полуфабрикатов для реализации данных конструкций.

Все сказанное предполагает наличие определенных подходов к разработке алгоритмов, моделей и процедур, позволяющих получить достоверные оценки параметров процесса деформирования, эксплуатационных характеристик данных конструкций с учетом воздействия факторов внешней среды, режимности нагружения, износных и деградиационных процессов. Рассмотрению подлежит генезис всех стадий работы конструкции - начиная с упругой работы и заканчивая критическими стадиями деформирования, характеризующимися частичными отказами конструкционного материала в различных областях рабочего сечения армированного стержня.

Для учета многообразия условий работы таких конструкций перспективным является направление разработки не отдельных моделей для каждого вида армированной конструкции, а адаптивных моделей, способных максимально гибко учитывать особенности конкретного армированного элемента.

Все вышесказанное позволяет сформулировать требования к адаптивным моделям армированных стержневых конструкций.

1. Применимость для широкого круга практических задач. Возможность использования модели, на всех этапах жизненного цикла.

2. Простота математической формулировки модели. Наличие удобного математического аппарата, основанного на использовании основных разрешающих уравнений в замкнутой форме. Возможность численной реализации алгоритмов в современных математически ориентированных программных продуктах: MathCAD, MathLAB и др.

3. При построении модели принимается минимальное число гипотез и предпосылок, которые должны строго выполняться только в рамках рассматриваемой проблемы. Геометрические гипотезы могут трактоваться в общей постановке.

4. Минимальная привязка к эмпирическим зависимостям. Возможность применения уравнений для конструкций с произвольным сочетанием механических свойств, при разных способах контактного взаимодействия между основным материалом стержня и армирующими элементами.

5. Модель должна иметь возможность учета режимности нагружения, влияния факторов внешней среды на свойства конструкционных материалов (фактор времени, коррозия, температурно-влажностное воздействие).

6. Адекватность физической реализации в оценке процесса трещинообразования (индикатор эволюции предельных состояний) на всех стадиях деформирования.

7. Реализация модели для разных уровней расчета: сечение, элемент, система элементов.

8. Гибкая дискретизация расчетной области при решении задач с использованием численных методов (МКЭ, МГЭ, МКР) для областей, имеющих начальные особенности в расчетной схеме и большие градиенты получаемого решения. Адаптация шага расчетной сетки по пространственным координатам (Δx) и по временному параметру (Δt). Реализация метода «установления», возможность введения «фиктивного времени» с построением условных временных рядов.

9. Плавная реакция модели на импульс. В модели стержень - это учет дискретных трещин по длине элемента. Реакция не должна быть мгновенной в силу специфичности сопротивления железобетона, эффектов внутреннего трения и «внутренней неустойчивости» сечения.

10. Реакция модели на ступенчатое изменение параметров (учет скачка) без разрывов и скачков в разрешающих уравнениях. Для модели сечение - это учет появления трещины, отказ части сжатой зоны сечения, скачкообразное изменение по высоте ширины поперечного сечения элемента, локальное разрушение зоны контакта армирующего элемента.

11. Предсказуемая реакция модели на линейную или квадратичную функцию. Возможность учета различных факторов, прежде всего на этапе реализации условий равновесия в сечении, поскольку многие параметры расчетной схемы имеют тенденцию линейного или параболического роста.

Система уравнений для стержневого элемента при сложном поперечном изгибе для определения параметров напряженно-деформированного состояния выглядит так

$$\left. \begin{aligned} \int_A \sigma dA &= N \\ \int_A \sigma z dA &= M + \delta N \\ \int_A \tau dA &= Q \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь A – площадь поперечного сечения элемента;

M, N, Q – внешние силовые факторы, действующие на стержневой элемент, соответственно изгибающий момент, продольная и поперечная силы;

z – расстояние от нейтральной оси до рассматриваемого волокна;

$\delta = x - z_0$ – расстояние от нейтральной оси до центра тяжести сечения;

z_0, m_0 – координаты центра тяжести сечения;

x, m – соответственно высота сжатой и растянутой зоны;

σ, τ – нормальное и касательное напряжения, действующие в сечении.

При наличии градиента относительных деформаций $\varepsilon(z)$ по высоте сечения элемента первый и второй интегралы системы (1) реализуются с учетом следующих соотношений, которые записываются в виде

$$dA = b(z)dz, \sigma(z) = E(y, z)\varepsilon(z), \varepsilon(z) = \rho^{-1}(z)z = (\rho_0^{-1} + \alpha z)z, \quad (2)$$

где $b(z)$ – ширина поперечного сечения по высоте элемента;

$E(y, z) = E_b(y, z)$ – модуль деформации бетона, который может иметь переменное значение как по высоте (координата z), так и по ширине (координата y) сечения;

α – коэффициент, учитывающий возможные депланации бетона по высоте сечения элемента;

ρ_0^{-1} – градиент относительных деформаций на уровне нейтральной оси;

$\rho^{-1}(z)$ – значение градиента относительных деформаций по высоте сечения элемента.

Если более подробно в развернутом виде представить первое уравнение системы (1), получим следующее соотношение с учетом, что

$$\sigma_b(z) = E_b(\varepsilon, y, z)\varepsilon_b(z), \varepsilon_b(z) = \rho^{-1}(z)z, \quad -m \leq z \leq h - m,$$

$$\int_A \sigma dA = \int_{-m}^{h-m} E_b(\varepsilon_b(z), y, z)\rho^{-1}(z)zb(z)dz + A_{s1}E_{s1}\varepsilon_{s1} - A_{s2}E_{s2}, \quad (3)$$

где h – высота поперечного сечения стержневого элемента;

$\rho^{-1}(z) = \rho_0^{-1} + [\alpha_t + H(z, 0)(\alpha_c - \alpha_t)]z$ – градиент относительных деформаций по высоте поперечного сечения бетонной ветви;

$H(z, 0)$ – функция Хевисайда;

ρ_0^{-1} – градиент относительных деформаций на уровне нейтральной оси стержня – кривизна в традиционном понимании;

α_c, α_t – функции влияния, учитывающие развитие депланации армированного материала в сжатой и растянутой зонах сечения.

$\varepsilon_{s1}, \varepsilon_{s2}$ – соответственно относительные деформации армирующих элементов, расположенных в верхней и нижней зонах сечения. Деформации определяются с учетом податливости контактной зоны. Если контакт между материалом стержня и армирующим элементом абсолютно жесткий, тогда оба материала деформируются совместно $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_b(z = x - a_{s1}), \varepsilon_{s2} = \varepsilon_b(z = -(m - a_{s2}))$. Здесь a_{s1}, a_{s2} – расстояния от верхней и нижней граней элемента до центров тяжести армирующих элементов, имеющих площади сечения A_{s1}, A_{s2} .

Особую значимость имеет параметр $\rho^{-1}(z)$ – градиент относительных деформаций по высоте сечения. Принятие в качестве геометрической гипотезы – гипотезы Бернулли – отождествляет градиент относительных деформаций по высоте поперечного сечения и кривизну нейтральной оси

стержня $\rho^{-1}(z) \equiv \rho_0^{-1}(x)$. В ряде работ, вместо понятия кривизны, используется параметр $\theta'(x) = \rho_0^{-1}(x)$ – приращение по длине стержня угла поворота сечения [1]. Данный подход оправдан для изотропных материалов для стадий до образования трещин. После образования трещин в железобетонном элементе использование гипотезы плоских сечений для определения относительных деформаций бетона по высоте сечения может давать значительные погрешности. Поэтому при разработке моделей, предлагается разделить понятия кривизна нейтральной оси $\rho_0^{-1}(x)$ (приращение угла поворота сечения по длине элемента $\theta'(x)$) и градиент относительных деформаций бетона по высоте сечения $\rho^{-1}(z)$.

Модуль деформации материала стержня (бетона) E_b параметр переменный, изменяется в процессе нагружения, вследствие проявления нелинейных эффектов деформирования $E_b(\varepsilon_b)$, в том числе из-за длительного воздействия приложенных нагрузок. Кроме того, переменность модуля деформации материала стержня может быть наведенной в процессе изготовления армированной конструкции или полученной при эксплуатации в результате влияния температуры, коррозионных процессов $E_b(y, z)$ и других факторов.

Основные уравнения системы (1) получаются с использованием значений «касательного модуля деформации» $E_{b,i}$, который вычисляется на основании параметров диаграммы $\sigma - \varepsilon$. Данная диаграмма может быть записана аналитически, а также в виде двумерного массива значений $\{\sigma_i; \varepsilon_i\}$.

$$E_{b,i} = \frac{\sigma_{b,i} - \sigma_{b,i-1}}{\varepsilon_{b,i} - \varepsilon_{b,i-1}}, i = 1, 2 \dots n. \quad (4)$$

Используя значения «касательного модуля» основные уравнения системы (1) могут быть записаны в инкрементальной форме, что позволяет решать задачу в приращениях, то есть определять не фактические значения M, N, Q – значения обобщенных усилий (усилия внутренних сил в поперечном сечении) на каждом этапе нагружения, а их приращения: $\Delta M, \Delta N, \Delta Q$.

Ширина поперечного сечения стержня $b(z)$ изменяется по высоте нелинейно только для стержневых элементов круглого или кольцевого сечения. Элементы с такими сечениями используются в качестве стоек с преобладающим действием продольной силы при полностью сжатом или слабо растянутом сечении. Для элементов, работающих в условиях сложного изгиба, характерно использование сечений со ступенчатым изменением ширины, поэтому, в практических расчетах $b(z)$ записывается с использованием обобщенных ступенчатых функций (функции Хевисайда $H(z, a)$). Каждое сечение делится на фрагменты, имеющие постоянную высоту и ширину $\{h_{f,i}; b_{f,i}\}$ (рис. 1). Общее число фрагментов сечения с постоянной шириной n_f , при этом $\sum_{i=0}^{i=n_f} h_{f,i} = h$.

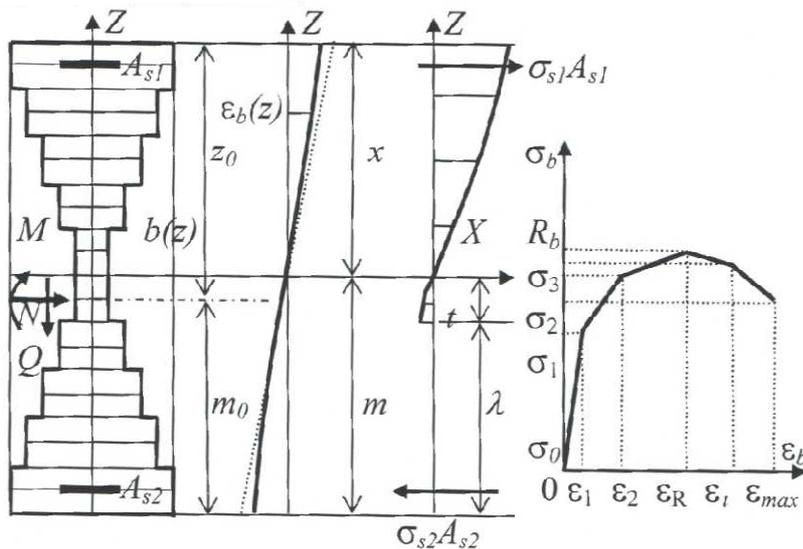


Рис. 1. К расчету армированного стержня с учетом переменного градиента относительных деформаций. Профиль стержня произвольный, аппроксимируется функцией ступенчатого изменения ширины. Диаграмма $\sigma - \epsilon$ для основного материала стержня и армирования n -звенная ломаная

При реализации условия равновесия (3) в интегральной форме учитывается, что $-m \leq z \leq h - m$. Вводя вспомогательную переменную $z^* = z + m (0 \leq z^* \leq h)$, получаем аналитическую зависимость ширины поперечного сечения $b(z)$. В сокращенном виде выражение, определяющее параметр $b(z)$, с учетом, что $h_{f,0} = 0$ выглядит так

$$b(z^*) = b_{f,ib}, \quad ib = \sum_{i=0}^{i=n_f-1} H_i(z^*; \sum_0^i h_{f,i}). \quad (5)$$

Для широко распространенного сечения двутаврового вида, при двухкратном скачкообразном изменении ширины сечения по высоте, удобнее при интегрировании условий равновесия использовать зависимость

$$b(z) = b + H(z_*; z_0 - h'_f)(b'_f - b) + H(-z_*; m_0 - h_f)(b_f - b) \quad (6)$$

$$z_* = z + x - z_0.$$

Если ширина поперечного сечения по высоте не меняется $b(z) = \text{const}$ или изменяется скачкообразно, модуль деформации материала стержня по всему сечению имеет одно значение $E_b(y, z) = \text{const}$, для деформированных волокон принимается гипотеза Бернулли, то есть коэффициенты, учи-

тывающие деформацию $\alpha_c = \alpha_t = 0$. Тогда при реализации первого условия равновесия в сечении получаем уравнение второй степени, а для второго уравнения системы соответственно третьей степени. Решение системы (1) можно получить в замкнутом виде.

В случае, когда модуль деформации $E_b(z)$, градиент относительных деформаций бетона $\rho^{-1}(z)$ будут изменяться по высоте линейно, тогда имеем в качестве первого условия равновесия - уравнение 4-й степени, а второго соответственно 5-й степени. Естественно система уравнений (1) уже на начальном этапе процесса деформирования будет иметь только численное решение.

При разработке адаптивных моделей железобетонных стержневых конструкций весьма удобно использование кусочно-линейных аппроксимаций для представления различных параметров в виде линейных функций: $b(z)$, $E_b(y, z)$, $\rho^{-1}(z)$, $\sigma = f(\varepsilon)$. Использование простых аппроксимаций дает возможность получать уравнения в замкнутой форме, которые можно подвергнуть предварительному анализу, выявить влияние наиболее значимых параметров расчетной схемы.

Адаптивные модели имеют жесткий алгоритм поведения, в основе которого метод проб и ошибок. Адаптация модели в процессе расчета происходит перманентно и состоит из небольших дискретных изменений. Решение задач осуществляется в следующей последовательности.

1. Для расчетной области назначается сетка. Сетка может быть равномерной, иметь постоянный шаг $\Delta x = \text{const}$. Если расчетная область имеет особенности, рационально сразу генерировать неравномерную сетку с переменным шагом $\Delta x_i \neq \text{const}$.

2. Модель находится в начальном исходном состоянии, при этом совокупность внешних воздействий характеризуется вектором $\{q_k\}$, ($k = 0$ – номер шага счета), все параметры напряженно-деформированного состояния (НДС) для расчетных сечений, элементов и системы в целом определяются на основе общих положений технической теории изгиба армированных стержней.

3. Реализуя процесс последовательного нагружения, вектору внешних воздействий задается приращение: $\{q_{k+1}\} = \{q_k\} + \{\Delta q_k\}$, что позволяет вычислить значения внешних факторов на следующем шаге расчета. Параметры НДС определяются, используя соотношения математической модели поведения железобетонного элемента с предыдущего шага счета.

4. Выполняется анализ параметров НДС, оценивается корректность применения уравнений, использованной модели. При наличии несоответствий между использованными уравнениями и соответствующих стадий НДС через логические операторы обратной связи выполняется согласование расчетной модели и пересчет параметров НДС на текущем шаге счета.

5. Выполняется анализ решения задачи. При появлении зон с большими градиентами производится корректировка расчетной сетки. Выбирается способ адаптации решения к расчетной области. Рассматриваются динамические адаптивно подвижные сетки или адаптивно встраиваемые сетки.

6. Выбирается способ адаптации получаемого решения по одному из возможных сценариев в зависимости от набора и значимости факторов внешних воздействий. Включается один из модулей расчетной модели, учитывающий особенности решаемой задачи (влияние дискретных трещин, учет переменности механических характеристик армируемого материала по сечению вследствие коррозии, неупругая работа контактной зоны, депланация и другие).

7. Далее дается дальнейшее приращение вектору внешних воздействий $\{q_k\}$. Проводятся расчеты п.п. 4-6.

8. Расчет можно закончить, имея фиксированное значение параметра внешнего воздействия (силовой нагрузочный эффект, температура, коррозионный износ, текущее время и др.). При необходимости расчет можно продолжить, реализуя закритическую стадию деформирования с переходом к другой расчетной схеме железобетонного элемента.

Особенность адаптивных моделей в том, что компоненты приращения вектора внешних воздействия $\{\Delta q_k\} \neq \text{const}$, то есть рост внешнего нагрузочного эффекта определяется на каждом шаге счета $\{\Delta q_k\} = f(k, q_{cr}, q_u)$ и зависит от момента появления трещин, предельной нагрузки и других факторов.

Адаптация модели должна осуществляться плавно, итеративно. Логика механизма адаптации выбирается индивидуально в зависимости от особенности задачи сопротивления армированных конструкций, априорно, с последующей одномоментной верификацией.

Представленные подходы реализованы при создании расчетных моделей стержневого железобетонного элемента, имеющего эксплуатационные повреждения, работающего в условиях агрессивной среды для всех стадий жизненного цикла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Биргер, И.А.* Сопротивление материалов / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат лит-ры, 1986. 560 с.

УДК 314

А. Н. Жаров¹, Г. Е. Козлов²

¹ Ярославский государственный технический университет,
Россия, г. Ярославль, e-mail: zharovan@ystu.ru

² Финансовый университет при правительстве Российской Федерации,
Россия, г. Ярославль, e-mail: kge1964@rambler.ru

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ И ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ ЯРОСЛАВСКОЙ ОБЛАСТИ ДО 2025 ГОДА

На основе метода возрастных передвижек сделан прогноз численности и структуры населения ярославской области до 2025 года. Вычислены коэффициенты трудовой нагрузки на работоспособное население ярославской области.

Ключевые слова: демография, прогнозирование, метод возрастных передвижек, коэффициент нагрузки на трудовое население.

A. N. Zharov¹, G. E. Kozlov²

¹ Yaroslavl State Technical University

Russia, Yaroslavl, e-mail: zharovan@ystu.ru

² Financial university under the government of the Russian Federation,

Russia, Yaroslavl, e-mail: kge1964@rambler.ru

PREDICTING PATTERNS AND POPULATION OF YAROSLAVL REGION TO 2025 YEAR

On the basis of method of movements of age a projection of the number and structure of the population of Yaroslavl region to 2025 year is made. Coefficients of labor burden on the working population of Yaroslavl region is calculated.

Keywords: demography, forecasting, the method of movements of age, load ratio on working of population.

Основным методом прогнозирования числа проживающих на данной территории является метод передвижки возрастов [1-3]. В основе данного метода лежат данные о количестве проживающих и их возрастном-половом распределении, полученном на основе переписи населения. Последняя перепись населения в России проходила с 14 по 25 октября 2010 года. По результатам этой переписи можно построить следующую таблицу о структуре населения Ярославской области [4].

Таблица 1. Возрастно-половой состав населения Ярославской области по результатам переписи 2010 года

Возраст, x	Общая численность		% жен. в общ. числ. насел.	% го- род. насел.
	муж., S_{x-x+4}^M	жен., S_{x-x+4}^F		
0-4	32771	31442	49,0	82,5
5-9	29504	27942	48,6	82,4
10-14	26164	24431	48,3	80,8
15-19	32289	32076	49,8	83,2
20-24	48824	49616	50,4	83,7
25-29	49918	49602	49,8	84,5
30-34	47010	47586	50,3	85,0
35-39	44173	46030	51,0	84,8
40-44	39572	42760	51,9	82,4
45-49	43802	49936	53,3	80,7
50-54	44748	56008	55,6	80,1
55-59	40413	56662	58,4	81,1
60-64	32199	48074	59,9	82,5
65-69	14486	27175	65,2	81,7
70-74	21168	46920	68,9	80,4
75-79	10219	27954	73,2	76,6
80-84	6883	24770	78,3	77,0
85-89	1918	10620	84,7	77,7
90-94	288	2250	88,7	79,9
95-99	73	543	88,1	78,2
100 и более	8	49	86,0	80,7
Возраст не указан	1667	1925		
Всего	568097	704371		
	1272468			

Анализируя таблицу 1 можно видеть, что для Ярославской области наблюдается очень высокий процент урбанизации. Так в среднем 82 % жителей проживают в городах и только 18 % в сельских поселениях. Данный показатель незначительно меняется с возрастом, немного уменьшаясь для жителей, чей возраст 70 лет и больше.

Процент женщин в общем составе населения сильно меняется от 49 % при рождении до 78-88 % в возрасте 80-100 лет. Данный факт свидетельствует о высоком коэффициенте смертности мужчин и меньшей продолжительности жизни мужчин в сравнении с продолжительностью жизни у женщин Ярославской области.

Для оценки коэффициентов дожития используем данные о возрастных коэффициентах смертности за 2010 год [5], которые представлены в таблице 2.

Для всех интервалов шириной в 5 лет коэффициенты дожития построим согласно выражению

$$p_{x/x+4} = 1 - \frac{5q}{1000}. \quad (1)$$

Для построения коэффициентов дожития для 5-летних интервалов в возрасте от 70 до 105 лет применим экстраполяцию по параболе на основе метода наименьших квадратов по коэффициентам дожития за три последних временных интервала: 55-59; 60-64; 65-69, считая, что коэффициент дожития в интервале 100 лет и более равен нулю $p_{100/104} = 0$.

Для мужского населения имеем четыре опорные точки для коэффициентов дожития

$$(n = 1; p_{55/59} = 0,8685); \quad (n = 2; p_{60/64} = 0,8145);$$

$$(n = 3; p_{65/69} = 0,7505); \quad (n = 10; p_{100/104} = 0),$$

где n – номер точки. Уравнение параболы, построенное по методу наименьших квадратов для этих точек, имеет вид

$$p_{x/x+4} = -0,0054 \cdot n^2 - 0,0376 \cdot n + 0,9114. \quad (2)$$

Для женского населения опорными точками для построения коэффициентов дожития являются $(n = 1; p_{55/59} = 0,9545); (n = 2; p_{60/64} = 0,9345); (n = 3; p_{65/69} = 0,8995); (n = 10; p_{100/104} = 0)$. Уравнение параболы, построенное по методу наименьших квадратов для этих точек, имеет вид

$$p_{x/x+4} = -0,0112 \cdot n^2 + 0,0171 \cdot n + 0,9475. \quad (3)$$

Используя выражения (1) - (3) построим 5-летние коэффициенты дожития, которые можно видеть в таблице 3.

Для оценки числа рожденных детей используем возрастные коэффициенты рождаемости за 2010 год [5]. Их можно видеть в таблице 4.

Таблица 2. Возрастные коэффициенты смертности за 2010 год (умершие на 1000 человек соответствующей возрастной группы)

Возраст, x	Муж., q_m	Жен., q_f
0-4	2,3	1,9
5-9	0,4	0,2
10-14	0,4	0,3
15-19	1,2	0,5
20-24	2,5	0,8
25-29	4,5	1,3
30-34	6,8	1,9
35-39	7,9	2,4
40-44	9,8	3,2
45-49	13,4	4,2
50-54	18,6	5,9
55-59	26,3	9,1
60-64	37,1	13,1
65-69	49,9	20,1
70 и более	95,2	69,8

Таблица 3. Коэффициенты дожития

Возраст, x	Муж., $p_{x/x+4}$	Жен., $p_{x/x+4}$
0-4	0,9885	0,9905
5-9	0,9980	0,999
10-14	0,9980	0,9985
15-19	0,9940	0,9975
20-24	0,9875	0,996
25-29	0,9775	0,9935
30-34	0,9660	0,9905
35-39	0,9605	0,988
40-44	0,9510	0,984
45-49	0,9330	0,979
50-54	0,9070	0,9705
55-59	0,8685	0,9545
60-64	0,8145	0,9345
65-69	0,7505	0,8995
70-74	0,6746	0,8367
75-79	0,5884	0,753
80-84	0,4914	0,6469
85-89	0,3836	0,5184
90-94	0,2650	0,3675
95-99	0,1356	0,1942
100 и более	0	0

Для оценки миграционной составляющей используем данные о мигрантах прибывших и убывших с территории Ярославской области [6]. Эти данные можно видеть в таблице 5. Используя данные таблицы 5, найдем среднее сальдо миграции. Оно составит 4025 чел./год. Среднее квадратичное отклонение сальдо миграции составляет 1530 чел./год.

Прогноз численности населения на основе вышепредставленных данных будем производить следующим образом. Население, не указавшее свой возраст в анкете переписи 2010 года, распределим между всеми возрастными группами пропорционально статистическому весу числа жителей данного возраста на момент переписи населения. Подсчёт числа живущих мужчин и женщин $S_{x+5-x+9}$ в возрасте от $x+5$ до $x+9$ производим согласно выражению

$$S_{x+5-x+9} = S_{x-x+4} \cdot p_{x/x+4}. \quad (4)$$

Подсчитываем число родившихся за 5 лет на основе соотношения

$$S_{0-4} = \sum_{\substack{x=15;20;25 \\ 30;35;40;45}} 5 \cdot f_{x-x+4} \cdot S_{x-x+4}^F. \quad (5)$$

где f_{x-x+4} – коэффициент рождаемости, представленный в таблице 4.

Таблица 4. Возрастные коэффициенты рождаемости за 2010 год (родившиеся в среднем за год на 1000 женщин соответствующей возрастной группы)

Возраст, x	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
Коэф. рожд. f_{x-x+4}	27,0	87,5	99,2	67,3	30,0	5,9	0,3

Количество рожденных мальчиков и девочек считаем в отношении 0,51 к 0,49

$$S_{0-4}^M = 0,51 \cdot S_{0-4}; \quad S_{0-4}^F = 0,49 \cdot S_{0-4}. \quad (6)$$

Сальдо миграции считаем постоянным со средним значением 4025 чел./год. Состав мигрантов считаем равномерно распределенным по полу и возрастам от 15 до 54 лет.

Таблица 5. Миграция населения на территорию Ярославской области

Год	2000	2005	2009	2010	2011	2012	2013
Прибыло	19889	15949	13234	13017	27061	32740	35500
Убыло	16417	12590	10037	11338	21085	27092	30659
Сальдо миграции	3472	3359	3197	1679	5976	5648	4841

Результаты прогноза народонаселения Ярославской области, выполненные по (4) - (6), можно видеть в таблице 6. Анализируя полученные данные, нетрудно видеть, что число жителей Ярославской области до 2015 года будет возрастать в сравнении с числом наличного населения переписи 2010 года. После 2015 года народонаселение Ярославской области будет уменьшаться, даже не смотря на постоянный миграционный приток.

На основе выполненного прогноза проведем анализ основных показателей трудовой структуры и состава населения [3]. Первым из таких показателей является число лиц нетрудоспособного возраста на 1000 человек трудоспособного:

$$K_1 = \frac{S_{0-15}^M + S_{0-15}^F + S_{60-105}^M + S_{55-105}^F}{S_{15-59}^M + S_{15-54}^F} \cdot 1000;$$

$$K_1^M = \frac{S_{0-15}^M + S_{60-105}^M}{S_{15-59}^M} \cdot 1000; \quad K_1^F = \frac{S_{0-15}^F + S_{55-105}^F}{S_{15-54}^F} \cdot 1000.$$

Данные коэффициенты в 2010 году равны:

$$K_1 = 660; K_1^M = 450; K_1^F = 880,$$

в 2015 году:

$$K_1 = 767; K_1^M = 529; K_1^F = 1022,$$

в 2020 году:

$$K_1 = 834; K_1^M = 585; K_1^F = 1101,$$

а в 2025 году:

$$K_1 = 844; K_1^M = 602; K_1^F = 1101.$$

Следовательно, к 2025 году на каждую 1000 работающих жителей Ярославской области будет приходиться 844 жителя нетрудоспособного возраста. Хорошо видно, что нагрузка на трудоспособное население Ярославской области будет возрастать, так же как и нагрузка отдельно на мужское население и женское.

Таблица 6. Прогноз численности населения Ярославской области до 2025 года на основе переписи населения 2010 года в условиях постоянного сальдо миграционного потока 4025 чел./год

Возраст	2015 г.		2020 г.		2025 г.	
	Муж.	Жен.	Муж.	Жен.	Муж.	Жен.
0-4	38300	36798	35209	33829	30325	29136
5-9	32489	31229	37860	36449	34804	33507
10-14	29532	27991	32424	31197	37784	36412
15-19	27446	25719	30730	29206	33617	32408
20-24	33448	33341	28539	26913	31804	30391
25-29	49613	50811	34287	34466	29441	28063
30-34	50196	50672	49755	51738	34774	35500
35-39	46803	48521	49747	51449	49321	52505
40-44	43811	46860	46212	49196	49040	52089
45-49	39002	43449	42922	47368	45206	49667
50-54	42245	50279	37646	43794	41304	47631
55-59	40706	54505	38317	48796	34145	42502
60-64	35202	54232	35353	52025	33278	46576
65-69	26303	45048	28672	50680	28795	48617
70-74	10904	24511	19741	40521	21518	45587
75-79	14322	39366	7356	20508	13317	33904
80-84	6031	21107	8427	29642	4328	15443
85-89	3392	16068	2963	13654	4141	19176
90-94	738	5520	1301	8329	1137	7078
95-100	77	829	196	2029	345	3061
более 100	10	106	10	161	27	394
Всего	570570	706962	567669	701951	558451	689647
	1 277 532		1 269 620		1 248 098	

Вторым показателем является коэффициент нагрузки детьми, то есть количество детей, приходящееся на 1000 человек трудоспособного возраста:

$$K_2 = \frac{S_{0-15}^M + S_{0-15}^F}{S_{15-59}^M + S_{15-54}^F} \cdot 1000; \quad K_2^M = \frac{S_{0-15}^M}{S_{15-59}^M} \cdot 1000; \quad K_2^F = \frac{S_{0-15}^F}{S_{15-54}^F} \cdot 1000.$$

Данные коэффициенты в 2010 году равны:

$$K_2 = 225; K_2^M = 226; K_2^F = 224,$$

в 2015 году:

$$K_2 = 272; K_2^M = 269; K_2^F = 275,$$

в 2020 году:

$$K_2 = 299; K_2^M = 295; K_2^F = 304,$$

а в 2025 году:

$$K_2 = 298; K_2^M = 295; K_2^F = 302.$$

Видно, что коэффициент нагрузки детьми будет незначительно возрастать до 2020 года, после чего стабилизируется на уровне около 300 детей на 1000 лиц трудоспособного возраста.

Третьим показателем, характеризующим трудовую структуру населения, является коэффициент нагрузки пожилыми, то есть количество людей пенсионного возраста, приходящееся на 1000 жителей трудоспособного возраста:

$$K_3 = \frac{S_{60-105}^M + S_{55-105}^F}{S_{15-59}^M + S_{15-54}^F} \cdot 1000; \quad K_3^M = \frac{S_{60-105}^M}{S_{15-59}^M} \cdot 1000; \quad K_3^F = \frac{S_{55-105}^F}{S_{15-54}^F} \cdot 1000.$$

Данные коэффициенты в 2010 году равны:

$$K_3 = 435; K_3^M = 223; K_3^F = 656,$$

в 2015 году:

$$K_3 = 496; K_3^M = 260; K_3^F = 747,$$

в 2020 году:

$$K_3 = 535; K_3^M = 290; K_3^F = 797,$$

а в 2025 году:

$$K_3 = 545; K_3^M = 307; K_3^F = 799.$$

Анализ данных коэффициентов явно указывает на увеличение нагрузки пожилыми на людей трудоспособного возраста Ярославской области.

Интересным показателем, характеризующим структуру населения, является коэффициент старости (%), или удельный вес населения в возрасте 60 лет и старше в общей численности населения:

$$K_c = \frac{S_{60-105}}{S} \cdot 100.$$

В 2010 году этот показатель равен:

$$K_c = 21,72 \%;$$

в 2015 году:

$$K_c = 23,78 \%;$$

в 2020 году:

$$K_c = 25,33 \%;$$

а в 2025 году:

$$K_c = 26,18 \%.$$

На основе шкалы оценки процесса старения населения, предложенной Э. Россет, Ярославская область характеризуется: «демографической старостью», поскольку $K_c > 12$.

Отметим, что прогноз, выполненный на основе метода передвижки возрастов, проведен нами при условии постоянства коэффициентов дожития, коэффициентов рождаемости и сальдо миграционного притока. Изменение же этих величин может значительно сказаться на прогнозе числа и структуры населения Ярославской области. Данные коэффициенты (дожития, рождаемости) могут значительно меняться в зависимости от социаль-

но-экономического состояния региона и страны в целом. Это можно хорошо видеть на рис. 1, где представлена зависимость числа проживающих на территории Ярославской области по годам.

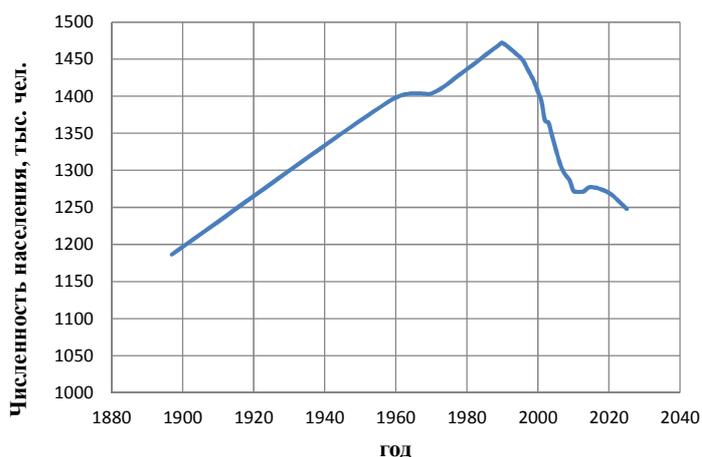


Рис. 1. Численность населения Ярославской области по годам

Так изменение социально-экономической формации в 1990 годы привело к резкому уменьшению коэффициентов рождаемости и дожития, что в свою очередь привело к значительному спаду числа проживающих на территории Ярославской области. В целом с 1990 года по 2013 год население Ярославской области уменьшилось на 200400 человек, что составляет 13,61 % от населения 1990 года. Незначительное увеличение числа проживающих на территории Ярославской области в 2015 году по сравнению с 2010 годом обусловлено исключительно положительным сальдо миграционного потока. Естественный же прирост населения в эти годы остаётся отрицательным.

Из рис. 1 видно, что общая численность населения нашего региона находится на уровне 1920-1930 годов прошлого века.

В заключение кратко отметим, что как видно из выполненного прогноза и расчетных коэффициентов трудовой структуры населения Ярославской области, наша область столкнется с недостатком трудовых ресурсов трудоспособного возраста. Данный фактор является тормозящим фактором экономического развития. Преодоление недостатка трудовых ресурсов Ярославской области, на наш взгляд, следует восполнять за счет увеличения производительности труда на предприятиях, внедрением автоматизирован-

ных и полуавтоматизированных линий обработки, информационных технологий во все сферы жизнедеятельности Ярославского региона. Также, на наш взгляд, стоит обратить внимание на возможность стимулирования включения в трудовую деятельность пенсионеров. Однако это стоит делать только в условиях четкого экономико-физиологического обоснования, поскольку стимулирование трудовой деятельности пенсионеров потребует дополнительных затрат, а производительность их труда в некоторых отраслях экономики может быть весьма низкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курс демографии / под ред. А.Я. Боярского. М.: Финансы и статистика, 1985. 391 с.
2. Статистика населения с основами демографии: учебник / Г.С. Кильдишев, Л.Л. Козлова, С.П. Ананьева [и др.]. М.: Финансы и статистика, 1990, 312 с.
3. Харченко Л.П. Демография: Учеб. пособие. М.: Омега-Л, 2007. 350 с.
4. Всероссийская перепись населения. 2010. Итоги [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://yar.gks.ru>
5. Российский статистический ежегодник. 2012: Стат. сб. / Росстат. М., 2012. 786 с.
6. Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по Ярославской области [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://yar.gks.ru>

УДК 536.421.4

Р. Г. Зайнуллин

Уфимский государственный авиационный технический университет,
Россия, г. Уфа, e-mail: zaynulin_r.g@mail.ru

ОБ ОДНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Излагается применение метода разложения по собственным функциям самосопряженного дифференциального оператора к решению одной нестационарной задачи теплообмена с фазовым переходом на примере процесса промерзания некоторой сплошной среды. Получено приближенно-аналитическое решение задачи в неавтономной постановке при специальных начальных условиях. В ходе решения задачи устанавливается параболический закон движения границы раздела двух фаз. Рассматривается случай, когда на уравнение для ядра интегрального преобразования, используемого при решении задачи, накладывается требование самосопряженности, что дает возможность применения упомянутого метода.

Ключевые слова: Фазовый переход, свободные границы, подвижные границы, задача Стефана, конечные интегральные преобразования, вырожденные гипергеометрические функции, возмущенный дифференциальный оператор.

R. G. Zaynulin

*Ufa State Aviation Technical University,
Russia, Ufa, e-mail: zaynulin_r.g@mail.ru*

**ON ONE OF THE WAYS OF ANALYTICAL
ONE-DIMENSIONAL PROBLEM SOLUTION
OF HEAT EXCHANGE WITH MOVING BOUNDARIES**

Application of a method of decomposition on own functions of the self-interfaced differential operator to the decision of one non-stationary problem of heat exchange with phase transition to a process example промерзания some continuous environment is stated. The approximately-analytical decision of a problem in not automodelling statement is received under the special entry conditions. During the problem decision the parabolic law of movement of border of section of two phases is established. The case when on the equation for a kernel of the integrated transformation used at the decision of a problem, the self-associativity requirement is imposed that gives the chance applications of the mentioned method is considered.

Keywords: *Phase transition, free borders, moving borders, a problem of Stefana, final integrated transformations, confluent hypergeometrical functions, disturbed differential operator.*

Краевые задачи теплопроводности в областях с подвижными границами за последние годы приобретают всё большее значение как в теоретических, так и в прикладных разделах физики и математики Аналитический подход при решении краевых задач теплообмена в системах со свободными границами относится к числу труднейших проблем в современной аналитической теории математической физики. Вследствие зависимости положения характеристического раздела области от времени к этому классу задач неприменимы классические методы дифференциальных уравнений в частных производных, так как оставаясь в рамках этих методов, не удаётся согласовать решение уравнения теплопроводности с движением границы фазового перехода.

Суть метода решения изучаемой задачи состоит в том, что переходя в неподвижную систему координат из подвижной с помощью соответствующих преобразований, задача преобразуется к классическому случаю с фиксированной границей, но в ней появляются переменные коэффициенты. В последнем случае становится возможным применение метода конечных интегральных преобразований, ядра которых находятся через постановку и решение соответствующей спектральной задачи. Новый подход в развитии теории интегральных преобразований в конечном счете приводит к получению формулы обращения, что позволяет выписать аналитическое решение задачи [9] и рассмотреть ряд частных случаев.

1. Постановка задачи

Рассмотрим применение метода вырожденных гипергеометрических преобразований (ВГГП), разработанного в [1-2], к процессу теплообмена с фазовым переходом при затвердевании некоторой сплошной среды под действием плоского источника холода. В начальный момент времени среда обладает постоянной температурой $t_0 > 0$ при $x \geq a\xi_0$. Внешняя поверхность среды обладает температурой $t_e < 0$. Образуются зоны промерзания ($k = 1$) и охлаждения ($k = 2$), и граница фазового перехода с течением времени продвигается внутрь среды. Математическую модель этого процесса для одномерной схемы можно представить в виде:

$$\frac{\partial t_k(x, \tau)}{\partial \tau} = a_k \frac{\partial^2 t_k(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (1.1)$$

$$x \in D_k(\tau): D_1(\tau) = \{0 < x < \xi_1(\tau)\}, \quad D_2(\tau) = \{\xi_1(\tau) < x < \xi_2(\tau)\};$$

$$\tau > 0, \quad \xi_1(+0) = \xi_0 > 0, \quad \xi_2(\tau) = a\xi_1(\tau), \quad a > 1;$$

$$t_1(x, 0) = \left(1 - \frac{x}{\xi_0}\right)t_e; \quad t_2(x, 0) = \frac{x - \xi_0}{(a-1)\xi_0}t_0; \quad (1.2)$$

$$t_1(0, \tau) = t_e; \quad t_k(\xi_1(\tau), \tau) = 0; \quad t_2(\xi_2(\tau), \tau) = t_0; \quad (1.3)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(\xi_1(\tau), \tau)}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial t_2(\xi_1(\tau), \tau)}{\partial x} = \sigma v \frac{d\xi_1(\tau)}{d\tau}. \quad (1.4)$$

Здесь a_k и λ_k – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности в $D_k(\tau)$; σ – скрытая теплота кристаллизации; v – плотность образующейся фазы; a – безразмерный параметр теплового влияния [3].

Условие $\xi_2(\tau) = a\xi_1(\tau)$ $a > 1$ принято на основании данных многократных наблюдений, проводимых в мерзлотной лаборатории Института мерзлотоведения АН СССР под руководством Н.А. Цитовича [3]. Это объясняется тем, что среда обладает настолько большим тепловым сопротивлением, что влияние источника холода, имеющего конечную температуру, за конечный промежуток времени практически не может распространяться на бесконечно большое расстояние. Для проверки предположения о линейной зависимости между толщиной промерзания $\xi_1(\tau)$ и расстоянием влияния $\xi_2(\tau)$ источника холода в период 1938–1950 гг. были осуществлены натурные наблюдения и проведены специальные опыты.

Предполагаем, что $t_k(x, \tau)$ и $\xi_1(\tau)$ являются решениями задачи (1.1) – (1.4) для всех $0 < \tau < T \leq \infty$, если:

$$t_k(x, \tau) \in C^2(D_k(\tau)) \cap C^0(\bar{D}_k(\tau)), \quad \text{grad } t_k(x, \tau) \in C^0(\bar{D}_k(\tau)), \quad \xi_1(\tau) \in C^1(0, T).$$

**2. Нахождение собственных функций
и закона движения свободной границы**

Используя подстановку

$$x = y\xi_1(\tau) \tag{2.1}$$

и вводя вспомогательные функции

$$T_k(y, \tau) = t_k(y\xi_1(\tau), \tau) - \begin{cases} (1-y)t_e & \text{при } k = 1; \\ \frac{y-1}{a-1}t_0 & \text{при } k = 2, \end{cases} \tag{2.2}$$

сведем задачу (1.1) - (1.4) к решению уравнения

$$\xi^2(\tau) \frac{\partial T_k(y, \tau)}{\partial \tau} = a_k \frac{\partial^2 T_k(y, \tau)}{\partial y^2} + \xi_1(\tau) \xi_1'(\tau) y \frac{\partial T_k(y, \tau)}{\partial y} - \begin{cases} t_e \xi_1(\tau) \xi_1'(\tau) y & \text{при } k = 1; \\ \frac{t_0}{1-a} \xi_1(\tau) \xi_1'(\tau) y & \text{при } k = 2 \end{cases} \tag{2.3}$$

с однородными краевыми условиями

$$T_k(y, 0) = 0; \tag{2.4}$$

$$T_1(0, \tau) = T_k(1, \tau) = T_2(a, \tau) = 0. \tag{2.5}$$

Решение задачи (2.3) - (2.5) отыскиваем, используя метод конечных интегральных преобразований по y :

$$U_k(\gamma, \tau) = \int_{y_1}^{y_2} T_k(y, \tau) \rho_k(y) K_k(y, \gamma) dy, \tag{2.6}$$

где $y_1 = 0, y_2 = 1$ ($k = 1$) и $y_1 = 1, y_2 = a$ ($k = 2$), с априори неизвестным ядром, полагая, что постулируемые ниже свойства преобразования (2.6) имеют место равномерно относительно τ .

Ядра $K_k(y, \gamma)$ преобразования (2.6) являются решениями уравнений

$$a_k \frac{\partial^2 [\rho_k(y) K_k(y, \gamma)]}{\partial y^2} - \xi_1(\tau) \xi_1'(\tau) \frac{\partial [\rho_k(y) K_k(y, \gamma)]}{\partial y} + \mu_k^2(\gamma) \rho_k(y) K_k(y, \gamma) = 0 \tag{2.7}$$

при однородных граничных условиях

$$K_1(0, \gamma) = K_k(1, \gamma) = K_2(a, \gamma) = 0, \tag{2.8}$$

где $\mu_k^2(\gamma)$ - величина, не зависящая от y . При этом преобразованное уравнение не будет содержать интегральных членов.

В дальнейшем, будем пользоваться формальными равенствами

$$K_k(y, \gamma) = K_{k,\gamma}(y); \quad \mu_k^2(\gamma) = \mu_{k,\gamma}^2; \quad U_k(\gamma, \tau) = U_{k,\gamma}(\tau),$$

в которых переменная γ принимает натуральные значения, что связано с условиями существования разложения решения задачи (2.3) – (2.5) по собственным функциям $K_{k,\gamma}(y)$, соответствующим собственным значениям $\mu_{k,\gamma}^2$.

Для обеспечения условий, позволяющих получить это разложение, на уравнения (2.7) накладываем требование самосопряженности. Уравнения (2.7) преобразуются в самосопряженные, если только $a_k \rho'_k(y) = \xi_1(\tau) \xi'_1(\tau) \rho_k(y)$.

Полагая, что

$$2 \xi_1(\tau) \xi'_1(\tau) = \Lambda^2,$$

получаем весовую функцию

$$\rho_k(y) = \exp\left(\frac{\Lambda^2 y^2}{4a_k}\right) = \exp(\beta_k y^2)$$

с точностью до произвольного множителя и устанавливаем характер зависимости положения свободной границы от времени

$$\xi_1^2(\tau) = \int_0^\tau \Lambda^2 d\eta + \xi_0^2 = \Lambda^2 \tau + \xi_0^2.$$

Параметр Λ подлежит определению через условие (1.4). Он определяется характером положения и движения свободной границы и является функцией теплофизических характеристик и краевых условий.

После наложения требования самосопряженности уравнение (2.7) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\rho_k(y) \frac{\partial K_{k,\gamma}(y)}{\partial y} \right] + \frac{\mu_{k,\gamma}^2}{a_k} \rho_k(y) K_{k,\gamma}(y) = 0 \quad (2.9)$$

при однородных граничных условиях

$$K_{1,\gamma}(0) = K_{k,\gamma}(1) = K_{2,\gamma}(a) = 0. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.9), при необходимости, можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 K_{k,\gamma}(y)}{\partial y^2} + 2 \beta_k y \frac{\partial K_{k,\gamma}(y)}{\partial y} + \frac{\mu_{k,\gamma}^2}{a_k} K_{k,\gamma}(y) = 0. \quad (2.11)$$

Задача (2.9) – (2.10) есть задача Штурма-Лиувилля. Подстановками

$$K_{k,\gamma}(y) = \frac{2\sqrt{a_k z}}{\Lambda} u_{k,\gamma}(z) \exp(-z), \quad z = \frac{\Lambda^2 y^2}{4a_k} = \beta_k y^2$$

уравнения (2.7) приводятся к вырожденным гипергеометрическим:

$$z \frac{\partial^2 u_{k,\gamma}(z)}{\partial z^2} + \left(\frac{3}{2} - z\right) \frac{\partial u_{k,\gamma}(z)}{\partial z} - b_{k,\gamma} u_{k,\gamma}(z) = 0; \quad b_{k,\gamma} = 1 - \left(\frac{\mu_{k,\gamma}}{\Lambda}\right)^2, \quad (2.12)$$

с однородными граничными условиями

$$u_{1,\gamma}(0) = u_{k,\gamma}(\beta_k) = u_{2,\gamma}(\beta_2 a^2) = 0. \quad (2.13)$$

Подстановкой

$$K_{k,\gamma}(y) = v_{k,\gamma}(y) \exp(-\beta_k \int_0^y \xi d\xi) = v_{k,\gamma}(y) \exp\left(-\frac{1}{2}\beta_k y^2\right)$$

при $\beta_k = \frac{\Lambda^2}{4a_k}$, уравнение (2.11) приводится к виду

$$-v_{k,\gamma}''(y) + P_k(y)v_{k,\gamma}(y) = \frac{H_{k,\gamma}^2}{a_k} v_{k,\gamma}(y) \quad (2.14)$$

с однородными граничными условиями

$$v_{1,\tau}(0) = v_{k,\gamma}(1) = v_{2,\gamma}(a) = 0, \quad (2.15)$$

где $P_k(y) = (\beta_k y)^2 + \beta_k$.

Решая задачу (2.12)-(2.13), находим собственные функции задачи (2.9) – (2.10) ортонормированные с весом $\rho_k(y)$, которые имеют вид

$$\begin{aligned} K_{1,\gamma}(y) &= C_{1,\gamma}^{-1} y F\left(b_{1,\gamma}, \frac{3}{2}; z\right) \exp(-z); \\ K_{2,\gamma}(y) &= C_{2,\gamma}^{-1} \Delta F\left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; z\right) \exp(-z), \end{aligned} \quad (2.16)$$

нормирующие множители $C_{k,\gamma}^{-1}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} C_{1,\gamma}^2 &= -b_{1,\gamma} F\left(b_{1,\gamma} + 1, \frac{5}{2}; \beta_1\right) \exp(-\beta_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b_{1,\gamma})_n}{(1,5)_n} S_{1,n} \frac{\beta_1^n}{n!}; \\ C_{2,\gamma}^2 &= -\left(\frac{a_2}{\Lambda^2} q p_0 + B\right) \exp(-\beta_2) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(b_{2,\gamma})_n}{(1,5)_n} (q - a^{2n+1} q_0) S_{2,n} - a \frac{(b_{2,\gamma} - 0,5)_n}{(0,5)_n} (p - a^{2n-1} p_0) S_n \right] \frac{\beta_2^n}{n!}; \end{aligned}$$

в которых

$$\begin{aligned} S_{k,n} &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{b_{k,\gamma} + m}, \quad S_n = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{b_{2,\gamma} - 0,5 + m}; \\ B &= \frac{b_{2,\gamma}}{3} q F\left(b_{2,\gamma} + 1, \frac{5}{2}; \beta_2\right) - a \left(b_{2,\gamma} - \frac{1}{2}\right) p F\left(b_{2,\gamma} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \beta_2\right); \\ q &= F\left(b_{2,\gamma} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \beta_2 a^2\right), \quad p = F\left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 a^2\right); \\ q_0 &= F\left(b_{2,\gamma} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \beta_2\right), \quad p_0 = F\left(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2\right). \end{aligned}$$

В дальнейшем изложении предполагаем, что собственные функции нормированы.

3. Определение собственных значений

Нетривиальные решения изучаемой задачи возможны лишь при значениях $\mu_{k,\gamma}$, удовлетворяющих характеристическим уравнениям

$$F(b_{1,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_1) = 0, \quad \Delta F(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2) = 0, \quad (3.1)$$

где

$$\Delta F(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 y^2) = F(b_{2,\gamma} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \beta_2 a^2) y F(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 y^2) - a F(b_{2,\gamma}, \frac{3}{2}; \beta_2 a^2) F(b_{2,\gamma} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \beta_2 y^2).$$

Используя частные случаи вырожденной гипергеометрической функции [4, 5]:

$$F(b, \frac{3}{2}; y) = (\pi y)^{-0.5} 2^{b-2.5} e^{0.5y} \Gamma(b - \frac{1}{2}) [D_{1-2b}(-\sqrt{2y}) - D_{1-2b}(\sqrt{2y})];$$

$$F(b - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; y) = \pi^{-0.5} 2^{b-1.5} e^{0.5y} \Gamma(b) [D_{1-2b}(-\sqrt{2y}) + D_{1-2b}(\sqrt{2y})].$$

($\Gamma(b)$ – гамма-функция), в уравнениях (3.1) можно перейти к функциям параболического цилиндра

$$[D_{1-2b_{1,\gamma}}(-\sqrt{2\beta_1}) - D_{1-2b_{1,\gamma}}(\sqrt{2\beta_1})] \Gamma(b_{1,\gamma} - \frac{1}{2}) = 0; \quad (3.2)$$

$$[D_{1-2b_{2,\gamma}}(a\sqrt{2\beta_2}) D_{1-2b_{2,\gamma}}(-\sqrt{2\beta_2}) - D_{1-2b_{2,\gamma}}(-a\sqrt{2\beta_2}) D_{1-2b_{2,\gamma}}(\sqrt{2\beta_2})] \Gamma(b_{2,\gamma} - \frac{1}{2}) \Gamma(b_{2,\gamma}) = 0.$$

Будем считать, что левая часть уравнения (2.14) порождается возмущенным дифференциальным оператором. Собственные значения задачи (2.14) - (2.15) при $P_k(y) = 0$ хорошо известны и имеют вид

$$\bar{\mu}_{1,\gamma}^2 = (\pi\gamma)^2 a_1, \quad \bar{\mu}_{2,\gamma}^2 = \left(\frac{\pi\gamma}{a-1}\right)^2 a_2, \quad \gamma \in N/,$$

причём ее решениями являются ортонормированные собственные функции

$$\bar{v}_{1,\gamma} = \sqrt{2} \sin(\pi\gamma y), \quad \bar{v}_{2,\gamma} = \sqrt{\frac{2}{a-1}} \sin(\pi\gamma \frac{a-y}{a-1})$$

Для нахождения собственных значений возмущенного дифференциального оператора, порождённого краевой задачей (2.14) - (2.15), воспользуемся методом, разработанным в работах [7, 8]. Из результатов этих работ нетрудно установить, что

$$\frac{\mu_{1,\gamma}^2}{a_1} = (\pi\gamma)^2 + (P_1 \bar{v}_{1,\gamma}, \bar{v}_{1,\gamma}) + \delta_1(\gamma); \quad \frac{\mu_{2,\gamma}^2}{a_2} = \left(\frac{\pi\gamma}{a-1}\right)^2 + (P_2 \bar{v}_{2,\gamma}, \bar{v}_{2,\gamma}) + \delta_2(\gamma), \quad (3.3)$$

где $P_k = (\beta_k y)^2 + \beta_k$, а для $\delta_k(\gamma)$ справедливы оценки

$$|\delta_k(\gamma)| \leq (2\gamma - 1)r_\gamma \frac{Q_\gamma^2}{1 - Q_\gamma}; \quad r_\gamma = \frac{1}{2a_k} |\bar{\mu}_{k,\gamma+1}^2 + \bar{\mu}_{k,\gamma}^2|,$$

$$Q_\gamma = \frac{2\|P_k\|}{|\bar{\mu}_{k,\gamma+1}^2 - \bar{\mu}_{k,\gamma}^2|} < 1; \quad \|P_1\| = \sqrt{\int_0^1 P_1^2 dy}; \quad \|P_2\| = \sqrt{\int_1^a P_2^2 dy}.$$

Соответствующие вычисления для скалярных произведений в формулах (3.3) приводят к следующим выражениям

$$(P_1 \bar{v}_{1,\gamma}, \bar{v}_{1,\gamma}) = 2 \int_0^1 [(\beta_1 y)^2 + \beta_1] \sin^2(\pi\gamma y) dy = \beta_1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2(\pi\gamma)^2} \right) \beta_1^2;$$

$$(P_2 \bar{v}_{2,\gamma}, \bar{v}_{2,\gamma}) = \frac{2}{a-1} \int_1^a [(\beta_2 y)^2 + \beta_2] \sin^2\left(\pi\gamma \frac{y-a}{a-1}\right) dy = \beta_2 + \left(\frac{1}{3} \frac{a^3-1}{a-1} - \frac{1}{2(\pi\gamma)^2} \right) \beta_2^2.$$

Тогда формулы (3.3) принимает следующий вид:

$$\frac{\mu_{1,\gamma}^2}{a_1} = (\pi\gamma)^2 + \beta_1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2(\pi\gamma)^2} \right) \beta_1^2 + \delta_1(\gamma);$$

$$\frac{\mu_{2,\gamma}^2}{a_2} = \left(\frac{\pi\gamma}{a-1} \right)^2 + \beta_2 + \left(\frac{1}{3} \frac{a^3-1}{a-1} - \frac{1}{2(\pi\gamma)^2} \right) \beta_2^2 + \delta_1(\gamma); \quad (4.4)$$

4. Построение температурного поля

Преобразованием (2.6) задача (2.3) - (2.5) приводится к виду

$$\frac{\partial U_{k,\gamma}(\tau)}{\partial \tau} + \left(\frac{\mu_{k,\gamma}}{\xi_1(\tau)} \right)^2 U_{k,\gamma}(\tau) = - \frac{H_{k,\gamma}}{\xi_1^2(\tau)}; \quad (4.1)$$

$$U_{k,\tau}(0) = 0, \quad (4.2)$$

где $H_{1,\gamma} = \frac{t_e \Lambda^2}{6C_{1,\gamma}} F\left(b_{1,\gamma}, \frac{5}{2}; \beta_1\right);$

$$H_{2,\gamma} = \frac{t_0 \Lambda^2}{6(1-a)C_{2,\gamma}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[(a^{2n+3} - 1) q \binom{b_{2,\gamma}}{(2,5)_n} + 3a(a^{2n} - 1) p \frac{a_2}{\Lambda^2} \binom{b_{2,\gamma} - 0,5}{(-0,5)_n} \right] \frac{\beta_2^n}{n!}.$$

Решение задачи (4.1) - (4.2) получается в виде

$$U_{k,\gamma}(\tau) = \int_{\tau}^0 \frac{H_{k,\gamma}}{\xi_1^2(\eta)} \exp \left[\int_{\tau}^{\eta} \left(\frac{\mu_{k,\gamma}}{\xi_1(\theta)} \right)^2 d\theta \right] d\eta.$$

Осуществив преобразования, обратные (2.6), и учитывая (2.1), (2.2), для распределения температурных полей, получим следующие формулы:

$$t_{k,\gamma}(x, \tau) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} U_{k,\gamma}(\tau) K_{k,\gamma} \left(\frac{x}{\xi_1(\tau)} \right) + \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{\xi_1(\tau)} \right) t_e & \text{при } k=1; \\ \left(\frac{x}{\xi_1(\tau)} - 1 \right) \frac{t_0}{a-1} & \text{при } k=2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Функции $K_{k,\gamma} \left(\frac{x}{\xi_1(\tau)} \right)$ в (4.3) определяются формулами (2.16) и выражаются через комбинации вырожденных гипергеометрических функций [6, 10].

Из условия (1.4) получаем соотношение для нахождения параметра Λ :

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty} \left[\lambda_1 U_{1,\gamma}(\tau) \frac{\partial K_{1,\gamma}(1)}{\partial y} - \lambda_2 U_{2,\gamma}(\tau) \frac{\partial K_{2,\gamma}(1)}{\partial y} \right] - \frac{\lambda_2 t_0}{a-1} - \lambda_1 t_e = \frac{1}{2} \sigma v \Lambda^2.$$

При $\tau = 0$ получим, что

$$\Lambda^2 = \frac{2}{v\sigma} \left(\frac{\lambda_2 t_0}{1-a} - \lambda_1 t_e \right). \quad (4.4)$$

С учетом того, что параметр Λ не зависит от времени τ , решение задачи (4.1) - (4.2) принимает вид

$$U_{k,\gamma}(\tau) = \frac{H_{k,\gamma}}{\mu_{k,\gamma}^2} \left[\left(\frac{\xi_0^2}{\Lambda^2 \tau + \xi_0^2} \right)^{\left(\frac{\mu_{k,\gamma}}{\Lambda} \right)^2} - 1 \right].$$

Это решение соответствует случаю, когда $\tau \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow \infty$. При $\tau \rightarrow \infty$ для нахождения параметра Λ из условия (1.4) получается следующее соотношение:

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty} \left[\lambda_2 \frac{H_{2,\gamma}}{\mu_{2,\gamma}^2} \frac{\partial K_{2,\gamma}(1)}{\partial y} - \lambda_1 \frac{H_{1,\gamma}}{\mu_{1,\gamma}^2} \frac{\partial K_{1,\gamma}(1)}{\partial y} \right] - \frac{\lambda_2 t_0}{a-1} - \lambda_1 t_e = \frac{1}{2} \sigma v \Lambda^2.$$

В данном случае, при $\tau \rightarrow \infty$, решение (4.3) стремится к виду

$$t_k(x, \tau) = - \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{H_{k,\gamma}}{\mu_{k,\gamma}^2} K_{k,\gamma} \left(\frac{x}{\Lambda \sqrt{\tau}} \right) + \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{\Lambda \sqrt{\tau}} \right) t_e & \text{при } k=1; \\ \left(\frac{x}{\Lambda \sqrt{\tau}} - 1 \right) \frac{t_0}{a-1} & \text{при } k=2. \end{cases} \quad (4.5)$$

Подставлением найденных значений Λ и $\mu_{k,\gamma}^2$ в (4.3) завершается решение поставленной задачи. В решении (4.3) присутствуют экспоненты с отрицательными показателями, что видно из формул (2.16), по которым можно судить о быстрой сходимости рядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шафеев, М.Н.* Решение одной плоской задачи Стефана методом ВГП // Инженер.-физ. журн. 1978. Т.34, №4. С. 713-722.
2. *Шафеев, М.Н.* Решение одной нелинейной задачи методом ВГП // Изв. вузов. Сер. Математика. 1980. №12(233). С. 73-75.
3. *Хакимов, Х.Р.* Замораживание грунтов в строительных целях. М.: Госстройиздат, 1962. 257 с.
4. *Прудников, А.П.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. М.: Наука, 1986. 800 с.
5. *Абрамович, М.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / М. Абрамович, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
6. *Слейтер, Л.Д.* Вырожденные гипергеометрические функции. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1968. 178 с.
7. *Садовничий, В.А.* Замечание об одном новом методе вычисления собственных значений и собственных функций дискретных операторов / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. М.: МГУ, 1994. Вып. 17. С. 244-248.
8. *Кадченко, С.И.* Метод регуляризованных следов // Вестник ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2009. Вып. 4, №37(170). С.4-23.
9. *Зайнуллин, Р.Г.* Об одном аналитическом подходе к решению одномерной задачи переноса тепла со свободными границами // Изв. вузов. Сер. Математика. 2008. № 2. С. 24-31.
10. *Никифоров, А.Ф.* Специальные функции математической физики / А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. М.: Наука, 1984. 344 с.

УДК 535.8

П. А. Иванов

Ярославский государственный технический университет,
Россия, г. Ярославль, e-mail: ivanovpa@ystu.ru

СОСТАВНЫЕ ФИЛЬТРЫ В ЗАДАЧАХ РАЗЛИЧЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ПОДВЕРНУТЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ ГЕОМЕТРИИ

Рассматривается применение инвариантных корреляционных составных фильтров с минимальной средней энергией корреляции (МАСЕ), с минимальной средней энергией корреляции со сглаживающей функцией Гаусса (ГМАСЕ) и с ми-

нимумом шума и энергии корреляции (MINACE) в задачах корреляционного различения изображений, подвергнутых геометрическим преобразованиям поворота и изменения масштаба. Приводятся и анализируются результаты моделирования на ПЭВМ корреляционного распознавания двумерных полутоновых изображений. На основании полученных данных делаются выводы о перспективах использования данных типов фильтров для задач распознавания 2D изображений.

Ключевые слова: инвариантные корреляционные фильтры, корреляционная функция, различение объектов.

Р. А. Иванов

*Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: ivanovpa@ystu.ru*

COMPOSITE FILTERS IN PROBLEMS OF RECOGNITION OF GEOMETRICALLY DISTORTED IMAGES

The usage of composite invariant correlation filters with minimal average correlation energy (MACE), with minimal average correlation energy with smoothing Gaussian (GMACE) and with minimum of noise and correlation energy (MINACE) in problems of rotated and scaled images correlation recognition is observed. Results of PC modeling for correlation recognition of 2D grayscale images are presented and analyzed. Based on obtained data the conclusions about of perspectives of usage of above mentioned filters in problems of recognition of 2D images are done.

Keywords: invariant correlation filters, correlation function, object recognition.

Одной из наиболее быстроразвивающихся в последнее время областей квантовой электроники является оптическая обработка информации. Среди широкого круга задач, имеющих в данной области, весьма актуальной является задача распознавания изображений, подвергнутых преобразованиям геометрии (поворот, сдвиг, изменение масштаба, различные искажения формы распознаваемого объекта и т.п.). Довольно популярным и привлекательным решением является применение оптикоэлектронных корреляторов изображений [1] (рис. 1). Такой подход актуален, прежде всего, в связи с естественностью осуществления операций типа свертка/корреляция в оптике, наличием большого разнообразия фотоприемных устройств, разработанность технологий устройств ввода данных в оптикоэлектронную систему (таких, например, как пространственно-временной модулятор света), а также средств пост- и предобработки данных (ПЭВМ, спецпроцессоры и др.).

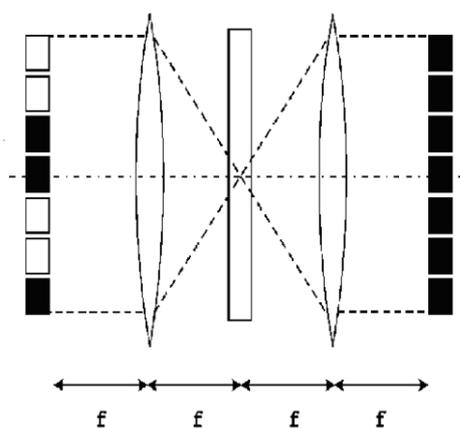


Рис. 1. Схема $4f$ -коррелятора (Ван-дер-Люгта)

Схематика оптикоэлектронных когерентных корреляторов изображений хорошо известна, наиболее популярны реализации в виде $4f$ -схемы (схемы Ван-дер-Люгта), коррелятора совместного преобразования, акустооптического коррелятора, а также модификаций указанных схем в зависимости от решаемой задачи [1]. Тем не менее, вне зависимости от выбранного схематического решения, основной функцией данного устройства является вычисление корреляционной функции входных данных с эталонным объектом, реализованным в виде голографического фильтра. Возникает вопрос о выборе указанного эталонного объекта.

К сожалению, выбор в качестве эталона оригинала распознаваемого изображения является крайне неудачным. При корреляционном распознавании изображений, подвергнутых геометрическим преобразованиям (а в естественных условиях, например, при аэрофотосъемке, таковые есть всегда), выходной корреляционный пик резко деградирует при самых малейших изменениях геометрии распознаваемого объекта (за исключением преобразования сдвига, т.к. корреляционная функция обладает автоматической инвариантностью к этому типу преобразований). Довольно привлекательным и популярным вариантом выбора эталона является применение составного инвариантного корреляционного фильтра [2].

В настоящее время исследования в области создания и применения инвариантных корреляционных фильтров ведутся в большом количестве российских и зарубежных научных лабораториях и центров, тем не менее, универсального решения в этой области на сегодняшний день не найдено. Основные исследуемые на сегодняшний день алгоритмы синтеза корреляционных фильтров относятся к следующим реализациям [2]:

1. Алгоритмы на основе разложений входных данных в функциональные ряды (например, разложение по радиальным гармоникам Меллина, фильтр с линейными фазовыми коэффициентами и т.д.)

2. Алгоритмы синтеза составных фильтров на основе вычисления оптимизационного параметра (МСЭК, ГМСЭК-фильтры и т.д.).

3. Алгоритмы, в основе которых лежит синтез фильтра на основе ядер интегральных преобразований (вейвлет-преобразования и т.д.).

К сожалению, на сегодняшний день невозможно указать оптимального с точки зрения качественных и количественных характеристик корреляционного пика алгоритмов, все они имеют свои недостатки. Поэтому, как правило, применяют тот или иной подход, в зависимости от типа решаемой задачи.

Весьма привлекательным подходом для решения задач распознавания изображений, подвергнутых преобразованиям геометрии, являются алгоритмы синтеза фильтров на основе вычисления оптимизационного параметра, в первую очередь, фильтров с минимальной средней энергией корреляции (МСЭК) и их модификаций [3]. Данное решение привлекательно с двух точек зрения: во-первых, вычисление минимума средней энергией корреляции дает, естественно, корреляционный пик с наиболее возможной остротой, что крайне актуально с точки зрения локализации распознаваемого объекта (т.е. определения его местонахождения на поданной на вход сцене с наибольшей точностью), во-вторых, поскольку алгоритм синтеза, в силу способа построения, позволяет получить целое семейство фильтров, то он сравнительно легко может быть подвергнут модификации, что позволяет улучшать результаты, сужая класс задачи распознавания до рассматриваемого случая. Вид фильтра представлен выражением

$$h = D^{-1}X(X^+D^{-1}X)^{-1}u. \quad (1)$$

Здесь X – матрица, ее элементы есть абсолютные величины преобразования Фурье исходного изображения; D – диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят величины квадрата абсолютных величин преобразования Фурье исходного изображения; u – вектор распознаваемого объекта, его элементы равны 1, “+” – обозначает операцию транспонирования матрицы. Размерность матриц равна разрешению (в пикселях) поданного на вход изображения.

Для ГМСЭК фильтра (фильтра с минимальной средней энергией корреляции со сглаживающей функцией Гаусса) вид фильтра представлен выражением

$$h = D^{-1}X(X^+D^{-1}X)^{-1}u + D^{-1}TF - D^{-1}X(X^+D^{-1}X)^{-1}X^+D^{-1}TF. \quad (2)$$

Здесь F - матрица, ее элементы есть абсолютные величины преобразования Фурье функции Гаусса (сглаживающей); T – сумма матриц набора исходных изображений X_i ; i – число изображений исходного набора (на базе которого строится фильтр).

Для MINACE фильтра вид фильтра соответствует (1), за исключением состава матрицы D . Последнюю следует заменить на матрицу A , которая есть сумма матриц $A_i(k, k) = \max[D_i(k, k), N(k, k)]$, где N - спектр шума.

Исходными объектами исследования, на основе которых были синтезированы указанные фильтры, были выбраны изображения типа “самолет” (рис. 2), подвергнутых преобразованиям поворота (поворот в плоскости на углы от 0 до 355° с шагом в 5°, 10° и 15° соответственно, всего 72, 36 и 24 исходных изображения) и изменения масштаба (изменение масштаба в сторону уменьшения/увеличения оригинального изображения при угле поворота 0° с шагом в 1% и 2% соответственно, всего 90, 55, 45, и 27 исходных изображений для изменения масштаба в ту или иную сторону). Разрешения исходных изображений - 64x64 (высокое разрешение) и 32x32 (низкое разрешение). На основе указанных баз данных исходных изображений синтезировались на ПЭВМ фильтры и вычислялись корреляции фильтров со всей базой данных, которая принималась за базу входных изображений (для преобразования поворота – 72 изображения с шагом в 5°, для каждого разрешения и каждого из 3-х МСЭЖ-фильтров отдельно; для преобразования изменения масштаба – 90 изображений с шагом 1% в каждую сторону и для каждого разрешения – отдельно).



Рис. 2. Изображение распознаваемого объекта

В качестве среды моделирования был выбран пакет MatlabMathworks, как наиболее подходящий для подобного рода задач. Для каждого случая вычислялись значения корреляционных функций, нормированных на величину максимального пика (количественные характеристики корреляции)

$$C(x_c, y_c) = \iint_{\pm\infty} f_{эм}^*(x, y) * f_{эс}(x - x_c, y - y_c) dx dy. \quad (3)$$

Здесь * - обозначает комплексное сопряжение, $f_{эм}$ и $f_{эс}$ - эталонное (фильтр) и входное изображения соответственно. Характерная картина зависимостей нормированной величины корреляционного пика от угла поворота входного изображения и величины изменения масштаба представлены на рис. 2 и 3 соответственно.

Также вычислялись значения величин отношений пика корреляции к отклонению от среднего (по фону корреляционной картины), и пика корреляции к среднеквадратическому отклонению от среднего (по фону корреляционной картины), которые обозначены как П/СР и П/СР_КВ соответственно (качественные характеристики пика). Изображение считалось распознанным по значению порога, который принимался равным 0,5 от максимальной величины пика корреляции, как это принято, например, в [3]. Некоторые результаты проведенного моделирования приведены в таблицах 1-4.

Таблица 1. Характеристики корреляционных пиков, изменение масштаба (МСЭК-фильтр)

Число изображений	Шаг, %	Разрешение, пиксели	П/СР	П/СР_КВ	Число ошибок
90	-1	64x64	14.0 – 41.0	31.0 – 181.0	0
		32x32	5.7 – 10.4	6.2 – 19.0	8
55	+1	64x64	21.8 – 25.1	17.5 – 30.0	0
		32x32	18.5 – 21.0	19.5 – 26.5	0
45	-2	64x64	16.0 – 40.0	24.5 – 98.0	0
		32x32	5.0 – 14.5	5.0 – 20.0	14
27	+2	64x64	16.0 – 30.1	14.0 – 36.0	0
		32x32	18.7 – 21.0	19.0 – 35.0	0

Таблица 2. Характеристики корреляционных пиков, изменение масштаба (ГМСЭК-фильтр)

Число изображений	Шаг, %	Разрешение, пиксели	П/СР	П/СР_КВ	Число ошибок
90	-1	64x64	14.8– 41.0	25.0 – 185.0	0
		32x32	5.4 – 10.4	6.8 – 19.8	8
55	+1	64x64	21.8 – 25.3	17.5 – 30.0	0
		32x32	18.5 – 21.0	19.1 – 27.2	0
45	-2	64x64	17.0 – 40.0	34.0 – 170.0	0
		32x32	6.8 – 17.7	9.7 – 37.0	10
27	+2	64x64	16.0 – 30.1	14.0 – 36.0	0
		32x32	18.7 – 21.0	19.0 – 35.0	0

Таблица 3. Характеристики корреляционных пиков, изменение масштаба (MINACE-фильтр)

Число изображений	Шаг, %	Разрешение, пиксели	П/СР	П/СР_КВ	Число ошибок
90	-1	64x64	15.2– 47.0	19.0 – 90.0	0
		32x32	5.0 – 12.2	5.6 – 15.1	8
55	+1	64x64	22.5 – 26.4	19.0 – 30.0	0
		32x32	18.9 – 20.8	18.5 – 25.6	0
45	-2	64x64	15.6 – 44.8	24.0 – 100.0	0
		32x32	5.0 – 14.5	5.7 – 20.0	12
27	+2	64x64	16.0 – 30.1	14.8 – 35.1	0
		32x32	17.7 – 24.3	19.0 – 35.0	0

Таблица 4. Характеристики корреляционных пиков, поворот, (МСЭК-фильтр)

Число изображений	Шаг, град.	Разрешение, пиксели	П/СР	П/СР_КВ	Число ошибок
72	5	64x64	11.8 – 14.5	18.3 – 24.2	0
		32x32	8.5 – 10.1	13.9 – 17.2	0
36	10	64x64	7.9 -22.0	12.0 – 35.0	6
		32x32	6.9 – 11.1	10.8 – 18.2	0
24	15	64x64	8.0 – 26.5	11.3 – 40.0	35
		32x32	6.9 – 13.0	11.0 – 20.4	0

Результаты проведенного моделирования позволяют сделать следующие выводы:

1. Отмечен рост количественных и качественных характеристик корреляции с ростом разрешения. Однако, к сожалению, данный результат достигается за счет значительного увеличения машинного времени, необходимого на синтез фильтров и расчет корреляционной функции.

2. Имеют место удовлетворительные результаты в случае распознавания изображений, подвергнутых преобразованию поворота в плоскости, при шаге угла поворота исходного изображения до 10° . При больших значениях угла поворота отмечено существенное ухудшение результатов (так, при шаге 15° имеет место 35 ошибок распознавания при высоком разрешении для входной базы из 72 изображений, что, безусловно, неудовлетворительно). Тем не менее, на взгляд автора, несмотря на удовлетворительные результаты при поворотах до 10° , следует крайне осторожно использовать составные фильтры для данного типа задач, т.к. качественные характеристики пика невысоки.

3. Имеют место очень хорошие результаты для распознавания изображений, подвергнутых преобразованию изменения масштаба, особенно в сторону его уменьшения. С учетом того факта, что свертка/корреляция автоматически обладает инвариантностью к сдвигу распознаваемого объекта, результаты моделирования позволяют надеяться на успешное применение составных фильтров (прежде всего, MINACE) для подобного класса задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Информационная оптика / Н.Н. Евтихийев, О.А. Евтихьева, И.Н. Компанец, А.Е. Краснов, Ю.Н. Кульчин, С.Б. Одинокоев, Б.С. Ринкевичюс. М.: Изд-во МЭИ. 2000.
2. *Vijaya Kumar B. V. K.* Tutorial survey of composite filter design for optical correlators // *Appl. Opt.* 1992. 31. P. 4773-4801.
3. *Ivanov, P.A.* Comparison of correlation peaks characteristics for scaled images recognition using MACE, GMACE and MINACE filters // *Proc. SPIE.* 2013. Vol.8748. P.8748ON1-8748ON-6.
4. *Evtikhiev, N.N.* Invariant correlation filters design in problems of image recognition / N.N. Evtikhiev, P.A. Ivanov, R.S. Starikov // *APCOM'2002, Vladivostok, proc. SPIE 2002.* Vol. 5129. P.92-99.
5. Experiments on realization of wavelet transform based on architecture of hybrid optoelectronic chip / N.N. Evtikhiev, P.A. Ivanov, A.V. Kamensky, R.S. Starikov, M.I. Zabolonov // *Optical memory & neural network.* 2002. Vol. 11, No.1. P. 39-43.

УДК 537.1

Н. Ю. Колбнева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Россия, г. Ярославль, e-mail: kolbneva-nata@yandex.ru

**ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
НЕЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛЕЙ, ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ
В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

Выведено дисперсионное уравнение для осцилляций незаряженной сферoidalной капли проводящей жидкости в однородном электростатическом поле с учетом потерь на излучение электромагнитных волн. Показано, что такая капля излучает электромагнитные волны. Проведена оценка интенсивности электромагнитного излучения и ширины полосы его частот в зависимости от размеров капли и напряжённости внешнего поля для отдельной капли и для облака.

Ключевые слова: незаряженная капля, электростатическое поле, осцилляции, излучение электромагнитных волн

N. Yu. Kolbneva

*P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: kolbneva-nata@yandex.ru*

**THE ELECTROMAGNETIC RADIATION FROM A NON-
CHARGED DROP OSCILLATED IN ELECTROSTATIC FIELD**

The dispersion equation for a no charged spheroidal drop's oscillation in homogeneous electrostatic field including electromagnetic radiation losses was found. It is shown the drop radiates electromagnetic waves. The location of the electromagnetic radiation power and frequency range depending on drop radius and external field intensity was found for a drop and cloud.

Keywords: no charged drop, electrostatic field, oscillations, electromagnetic radiation.

Вопросы, связанные с наличием электромагнитного излучения от осциллирующих облачных и дождевых капель, представляют интерес в связи с проблемами радиопомех от огней Св. Эльма и радиолокационного зондирования метеорологических объектов.

Целью работы являлись исследование и анализ электромагнитного излучения незаряженной каплей, осциллирующей в электростатическом поле. Для достижения заданной цели были поставлены следующие **задачи:** 1) вывод дисперсионного уравнения для осцилляций незаряженной ка-

плей проводящей жидкости в однородном электростатическом поле; 2) нахождение спектра капиллярных колебаний поверхности капли; 3) проведение оценки интенсивности электромагнитного излучения для отдельной капли и облака.

Постановка задачи. Пусть незаряженная сферическая капля радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ_1 , коэффициентом поверхностного натяжения σ , находится в идеальной несжимаемой среде с проницаемостью ϵ_{ex} и плотностью ρ_2 в однородном постоянном электрическом поле напряжённостью E_0 . Уравнение возмущенной волновым движением поверхности капли в сферической системе координат, начало которой совпадает с положением центра масс, представлено равновесной формой, не совпадающей с исходной сферической формой и капиллярным волновым возмущением поверхности капли. Математическая формула задачи состоит из линеаризованного уравнения Эйлера, уравнения неразрывности, волнового уравнения для вектора напряженности электростатического поля и уравнений, определяющих напряженность поля. Задачу дополнили граничными условиями и условием эквипотенциальности. Для замыкания выписанной системы введены условия неизменности полного объема капли, неподвижности её центра масс и условие незаряженности капли.

Основная часть. Задача решается, полагая, что поля скоростей течения жидкости имеют порядок малости, что и волновое искажение. Искомые величины разложены по порядкам малости. Решив задачу нулевого порядка малости, получили форму равновесной поверхности капли, совпадающей с уравнением вытянутого сфероида. Из динамического граничного условия первого порядка найдено дисперсионное уравнение. Мнимая часть комплексной частоты обусловлена затуханием колебаний из-за излучения электромагнитных волн. Найдено выражение для интенсивности электромагнитного излучения.

$$I = \frac{9}{4} \frac{n^{n+2} (n+1)^{n+3} ((n-1)(n+2))^{n+1} \rho_1 (\mu_n^+ K_{1,n+1,n} + \mu_n^- K_{1,n-1,n}) \times}{(\rho_2 n + \rho_1 (n+1))^{n+2} (2n+1)} \times \left[\frac{1}{(2n-1)!!} \right]^2 w \frac{\rho_1 \sigma^{n+2}}{c^{2n+1} R^{n+2}} \alpha_n^2,$$

где α_n – амплитуда возмущения капли; c – скорость света,

$$K_{l,m,n} = \left[C_{l0,m0}^{n0} \right]^2, C_{lk,mp}^{nq} \text{ – коэффициенты Клебша-Гордана,}$$

$$\mu_n^+ = \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}, \mu_n^- = \frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}, w \equiv \frac{\epsilon_{ex} E_0^2 R}{\sigma}.$$

Для численных оценок электромагнитного излучения приведены параметры для капли и среды. Отношение амплитуды возмущения к радиусу капли α_n / R принято постоянным, равное 0.1.

Возможный источник облачного электромагнитного излучения связан с осцилляциями мелких капель из диапазона наиболее часто встречающихся в облаке размеров от 3 до 30 мкм. Концентрация n таких капель в облаке $\sim 10^3 \text{ см}^{-3}$.

Основные результаты работы: 1) интенсивности электромагнитного излучения единичной каплей и облака представляют собой обратную зависимость, определяемую радиусом капли, и квадратичную зависимость, определяемую квадратом напряженности электростатического поля; 2) интенсивность электромагнитного излучения приходится на полосу частот от ~ 100 до $\sim 5 \text{ МГц}$; 3) для слабых полей величина напряженности электростатического поля слабо зависит от частоты; 4) с увеличением размера капли частота излучения снижается быстро, по гиперболической зависимости; 5) с увеличением номера моды мощность излучения уменьшается на порядок $\sim 10^{-15}$, на высоких модах интенсивность излучения незначительна.

Заключение. Осцилляции незаряженных капель во внешнем электростатическом поле генерируют электромагнитное излучение в широком диапазоне частот. Фоновое излучение облаков естественного и искусственного происхождения может быть частично объяснено излучением электромагнитных волн при осцилляциях капель в электростатических полях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Голованов А.С., Рыбакова М.В. // ЖТФ. 2002. Т.72, вып.1. С.8-14.
2. Григорьев А.И., Синкевич О.А. // ЖТФ. 1984. Т.54, вып.7. С.1276-1283.
3. Ширяева, С.О. Скаляризация векторных краевых задач гидродинамики / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев. Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2010. 180 с.
4. Ширяева, С.О. Заряженная капля в грозном облаке / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев. Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2008. 535 с.

УДК 51-74

О. Н. Колесников

Ярославский государственный технический университет,
Россия, г. Ярославль, e-mail: o.kolesnikov@mail.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЯ ПРИ ПРИНЯТИИ ЭКСПЕРТНОГО РЕШЕНИЯ

Приводится расчет среднеквадратичных отклонений измерения изотопного состава урана в микрочастицах. Выявлено увеличение статистической ошибки измерения при наложении изобарных ионов.

Ключевые слова: *среднеквадратичное отклонение, дисперсия случайной величины, ион, изотоп.*

O. N. Kolesnikov

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: o.kolesnikov@mail.ru

DETERMINING THE STATISTICAL MEASUREMENT ERROR WHEN MAKING EXPERT SOLUTIONS

We give calculation of the standard deviation of the measurements of isotopic composition of uranium in the microparticles. An increased statistical error of measurements at imposing isobaric ions was obtained.

Keywords: *standard deviation, random variance, ion, isotope.*

Одним из видов контроля незаявленной ядерной деятельности является исследование производственной пыли с предприятий ядерного топливного цикла с помощью масс-спектрометрии вторичных ионов. Особый интерес представляет собой изотопный состав урана в отдельных микрочастицах этой пыли. Правильная экспертная оценка изотопного состава является очень важной с точки зрения принятия решения о характере деятельности на подконтрольном предприятии. Кроме концентрации изотопа ^{235}U необходимо определять и концентрацию изотопа ^{236}U , так как его наличие указывает на то, что исследуемый материал находился под нейтронным облучением.

Микрочастицы пыли, как правило, имеют микронные и субмикронные размеры, то есть содержат малые количества вещества для исследования. В то же время при масс-спектрометрии вторичных ионов происходит распыление образца. Все это не позволяет разрешать по массам такие изобарные ионы, как $^{236}\text{U}^+$ и $^{235}\text{U}^1\text{H}^+$, так как увеличение разрешения сильно

снижает чувствительность анализа. Поэтому концентрация изотопа ^{236}U является перерасчетной величиной. А это усложняет вычисление среднеквадратичных отклонений измерений изотопного состава урана в микрочастицах.

1. Присутствует в пробе ^{236}U

Если измеряемая величина является функцией нескольких переменных $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, то стандартная неопределенность этой величины $u(y)$ определяется как [1]:

$$u(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2) + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 u^2(x_n)}, \quad (1)$$

где $u(x_1), u(x_2), u(x_3), \dots, u(x_n)$ стандартные неопределенности переменных $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ соответственно.

В случае измерения изотопного состава урана в качестве переменных выступают количества ионов от разных изотопов, зафиксированных на электронных умножителях масс-спектрометра.

Обозначим как:

n_4, n_5, n_8 – зарегистрированное число ионов изотопов $^{234}\text{U}+, ^{235}\text{U}+$ и $^{238}\text{U}+$ соответственно;

n_6 – рассчитанное число ионов изотопа $^{236}\text{U}+$;

n – суммарное число ионов $n_4 + n_5 + n_6 + n_8$;

$c_{234}, c_{235}, c_{236}, c_{238}$ – концентрации изотопов $^{234}\text{U}, ^{235}\text{U}, ^{236}\text{U}$ и ^{238}U соответственно.

Тогда концентрации изотопов урана в относительных единицах рассчитывается как:

$$c_{234} = \frac{n_4}{n}; \quad c_{235} = \frac{n_5}{n}; \quad c_{236} = \frac{n_6}{n}; \quad c_{238} = \frac{n_8}{n}.$$

Таким образом, концентрации изотопов урана являются функциями нескольких переменных. Поэтому для расчета среднеквадратических отклонений величин искоемых концентраций можно воспользоваться выражением (1). Введем обозначения:

$\sigma_{234}, \sigma_{235}, \sigma_{236}, \sigma_{238}$ – среднеквадратичные отклонения концентраций изотопов $^{234}\text{U}, ^{235}\text{U}, ^{236}\text{U}$ и ^{238}U соответственно;

$\sigma_4, \sigma_5, \sigma_8$ – среднеквадратичные отклонения количества зарегистрированных ионов изотопов $^{234}\text{U}+, ^{235}\text{U}+$ и $^{238}\text{U}+$ соответственно;

σ_6 – среднеквадратичное отклонение рассчитанного количества ионов изотопа $^{236}\text{U}+$.

В результате с учетом выражения (1) имеем:

$$\sigma_{234} = \sqrt{\left(\frac{\partial c_{234}}{\partial n_4}\right)^2 \sigma_4^2 + \left(\frac{\partial c_{234}}{\partial n_5}\right)^2 \sigma_5^2 + \left(\frac{\partial c_{234}}{\partial n_6}\right)^2 \sigma_6^2 + \left(\frac{\partial c_{234}}{\partial n_8}\right)^2 \sigma_8^2},$$

$$\sigma_{235} = \sqrt{\left(\frac{\partial c_{235}}{\partial n_4}\right)^2 \sigma_4^2 + \left(\frac{\partial c_{235}}{\partial n_5}\right)^2 \sigma_5^2 + \left(\frac{\partial c_{235}}{\partial n_6}\right)^2 \sigma_6^2 + \left(\frac{\partial c_{235}}{\partial n_8}\right)^2 \sigma_8^2},$$

$$\sigma_{236} = \sqrt{\left(\frac{\partial c_{236}}{\partial n_4}\right)^2 \sigma_4^2 + \left(\frac{\partial c_{236}}{\partial n_5}\right)^2 \sigma_5^2 + \left(\frac{\partial c_{236}}{\partial n_6}\right)^2 \sigma_6^2 + \left(\frac{\partial c_{236}}{\partial n_8}\right)^2 \sigma_8^2},$$

$$\sigma_{238} = \sqrt{\left(\frac{\partial c_{238}}{\partial n_4}\right)^2 \sigma_4^2 + \left(\frac{\partial c_{238}}{\partial n_5}\right)^2 \sigma_5^2 + \left(\frac{\partial c_{238}}{\partial n_6}\right)^2 \sigma_6^2 + \left(\frac{\partial c_{238}}{\partial n_8}\right)^2 \sigma_8^2}.$$

Найдем все частные производные:

$$\frac{\partial c_{234}}{\partial n_4} = \frac{n_5 + n_6 + n_8}{n^2}, \quad \frac{\partial c_{234}}{\partial n_5} = \frac{\partial c_{234}}{\partial n_6} = \frac{\partial c_{234}}{\partial n_8} = \frac{-n_4}{n^2},$$

$$\frac{\partial c_{235}}{\partial n_5} = \frac{n_4 + n_6 + n_8}{n^2}, \quad \frac{\partial c_{235}}{\partial n_4} = \frac{\partial c_{235}}{\partial n_6} = \frac{\partial c_{235}}{\partial n_8} = \frac{-n_5}{n^2},$$

$$\frac{\partial c_{236}}{\partial n_6} = \frac{n_4 + n_5 + n_8}{n^2}, \quad \frac{\partial c_{236}}{\partial n_4} = \frac{\partial c_{236}}{\partial n_5} = \frac{\partial c_{236}}{\partial n_8} = \frac{-n_6}{n^2},$$

$$\frac{\partial c_{238}}{\partial n_8} = \frac{n_4 + n_5 + n_6}{n^2}, \quad \frac{\partial c_{238}}{\partial n_4} = \frac{\partial c_{238}}{\partial n_5} = \frac{\partial c_{238}}{\partial n_6} = \frac{-n_8}{n^2}.$$

С учетом вычисленных частных производных имеем:

$$\sigma_{234} = \frac{1}{n^2} \cdot \sqrt{(n_5 + n_6 + n_8)^2 \sigma_4^2 + n_4^2 (\sigma_5^2 + \sigma_6^2 + \sigma_8^2)},$$

$$\sigma_{235} = \frac{1}{n^2} \cdot \sqrt{(n_4 + n_6 + n_8)^2 \sigma_5^2 + n_5^2 (\sigma_4^2 + \sigma_6^2 + \sigma_8^2)},$$

$$\sigma_{236} = \frac{1}{n^2} \cdot \sqrt{(n_4 + n_5 + n_8)^2 \sigma_6^2 + n_6^2 (\sigma_4^2 + \sigma_5^2 + \sigma_8^2)},$$

$$\sigma_{238} = \frac{1}{n^2} \cdot \sqrt{(n_4 + n_5 + n_6)^2 \sigma_8^2 + n_8^2 (\sigma_4^2 + \sigma_5^2 + \sigma_6^2)}.$$

Для расчета n_6 числа ионов изотопа $^{236}\text{U}^+$ используется тот факт, что такие гидридные ионы как $^{235}\text{U}^1\text{H}^+$ и $^{238}\text{U}^1\text{H}^+$ образуются с одинаковой эффективностью. А также то, что на массе 236 а.е.м. регистрируется сумма

ионов $^{236}\text{U}+$ и $^{235}\text{U}^1\text{H}+$, а на массе 239 а.е.м. только ионы $^{238}\text{U}^1\text{H}+$. Тогда n_6 можно вычислить по формуле

$$n_6 = n_{\Sigma 6} - \frac{n_5 \cdot n_9}{n_8},$$

где $n_{\Sigma 6}$ – число всех ионов, зарегистрированных на массе 236 а.е.м.;

n_9 – зарегистрированное число ионов $^{238}\text{U}^1\text{H}+$.

Так как n_6 является функцией нескольких переменных, то σ_6 можно тоже вычислить с использованием выражения (1):

$$\sigma_6 = \sqrt{\left(\frac{\partial n_6}{\partial n_{\Sigma 6}}\right)^2 \sigma_{\Sigma 6}^2 + \left(\frac{\partial n_6}{\partial n_5}\right)^2 \sigma_5^2 + \left(\frac{\partial n_6}{\partial n_8}\right)^2 \sigma_8^2 + \left(\frac{\partial n_6}{\partial n_9}\right)^2 \sigma_9^2},$$

где $\sigma_{\Sigma 6}$ – среднее квадратичное отклонение количества всех ионов, зарегистрированных на массе 236 а.е.м.;

σ_9 – среднее квадратичное отклонение количества ионов $^{238}\text{U}^1\text{H}+$;

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial n_6}{\partial n_{\Sigma 6}} = 1, \quad \frac{\partial n_6}{\partial n_5} = -\frac{n_9}{n_8}, \quad \frac{\partial n_6}{\partial n_8} = \frac{n_5 \cdot n_9}{n_8^2}, \quad \frac{\partial n_6}{\partial n_9} = -\frac{n_5}{n_8}.$$

Тогда для вычисления σ_6 получаем выражение

$$\sigma_6 = \sqrt{\sigma_{\Sigma 6}^2 + \left(\frac{n_9}{n_8}\right)^2 \sigma_5^2 + \left(\frac{n_5 n_9}{n_8^2}\right)^2 \sigma_8^2 + \left(\frac{n_5}{n_8}\right)^2 \sigma_9^2}.$$

Распределение Пуассона моделирует случайную величину, представляющую собой число событий (число регистрируемых ионов при фиксированной массе), произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой интенсивностью и независимо друг от друга [2]. При распределении Пуассона математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ случайной величины X равны между собой: $M(X) = D(X)$, а среднее квадратичное отклонение случайной величины равно

$$\sigma = \sqrt{D(X)}.$$

$$\text{Поэтому: } \sigma_4 = \sqrt{n_4}, \quad \sigma_5 = \sqrt{n_5}, \quad \sigma_{\Sigma 6} = \sqrt{n_{\Sigma 6}}, \quad \sigma_8 = \sqrt{n_8}, \quad \sigma_9 = \sqrt{n_9}.$$

И окончательно получаем следующие выражения для вычисления среднеквадратичных отклонений расчета изотопного состава урана:

$$\sigma_{234} = \frac{1}{n^2} \cdot \sqrt{(n_5 + n_6 + n_8)^2 n_4 + n_4^2 (n_5 + \sigma_6^2 + n_8)},$$

$$\sigma_{235} = \frac{1}{n^2} \cdot \sqrt{(n_4 + n_6 + n_8)^2 n_5 + n_5^2 (n_4 + \sigma_6^2 + n_8)},$$

$$\sigma_{236} = \frac{1}{n^2} \cdot \sqrt{(n_4 + n_5 + n_8)^2 \sigma_6^2 + n_6^2 (n_4 + n_5 + n_8)},$$

$$\sigma_{238} = \frac{1}{n^2} \cdot \sqrt{(n_4 + n_5 + n_6)^2 n_8 + n_8^2 (n_4 + n_5 + \sigma_6^2)},$$

где $\sigma_6^2 = n_{\Sigma 6} + \left(\frac{n_9}{n_8}\right)^2 n_5 + \left(\frac{n_5 n_9}{n_8^2}\right)^2 n_8 + \left(\frac{n_5}{n_8}\right)^2 n_9$.

Если при расчете числа ионов n_6 изотопа ^{236}U получается отрицательная величина, то возможны наложения посторонних ионов на массах 235 и 239 а.е.м.

2. В пробе отсутствует ^{236}U

В случае, если есть уверенность, что в пробе отсутствует ^{236}U , то для расчета изотопного состава урана можно будет применить упрощенные формулы.

$$c_{234} = \frac{n_4}{n_4 + n_5 + n_8}; \quad c_{235} = \frac{n_5}{n_4 + n_5 + n_8}; \quad c_{238} = \frac{n_8}{n_4 + n_5 + n_8}.$$

Аналогично можно получить и формулы для расчета среднеквадратичных отклонений:

$$\sigma_{234} = \frac{1}{(n_4 + n_5 + n_8)^2} \cdot \sqrt{(n_5 + n_8)^2 n_4 + n_4^2 (n_5 + n_8)},$$

$$\sigma_{235} = \frac{1}{(n_4 + n_5 + n_8)^2} \cdot \sqrt{(n_4 + n_8)^2 n_5 + n_5^2 (n_4 + n_8)},$$

$$\sigma_{238} = \frac{1}{(n_4 + n_5 + n_8)^2} \cdot \sqrt{(n_4 + n_5)^2 n_8 + n_8^2 (n_4 + n_5)}.$$

Пример. Для примера расчета изотопного состава были взяты результаты анализа урансодержащей микрочастицы пробы N. По этой пробе

было дано неверное заключение о наличии в микрочастицах пыли изотопа ^{236}U . В результате масс-спектрометрического анализа были получены количества ионов, зарегистрированных по интересующим массам ($n_4, n_5, n_{\Sigma 6}, n_8$ и n_9), которые необходимы для расчета изотопного состава:
 $n_4 = 30, n_5 = 3568, n_{\Sigma 6} = 29, n_8 = 517151, n_9 = 3083$.

Дальнейшая обработка данных осуществлялась по полученным формулам с использованием математической прикладной программы Mathcad 13. В результате получили следующие концентрации изотопов урана в процентах и среднеквадратичные отклонения измерений:

$$\begin{array}{ll} c_{234} = 0,006 & \sigma_{234} = 0,001; \\ c_{235} = 0,685 & \sigma_{235} = 0,011; \\ c_{236} = 0,001 & \sigma_{236} = 0,001; \\ c_{238} = 99,308 & \sigma_{238} = 0,012. \end{array}$$

Отсюда видно, что σ_{236} составляет 100% от концентрации ^{236}U . По остальным урансодержащим микрочастицам этой пробы были получены аналогичные результаты. Таким образом, с уверенностью утверждать о наличии ^{236}U в данной пробе нет оснований.

Заключение. В данной работе рассматривались только статистические ошибки определения концентраций изотопов урана. Общие погрешности измерений будут еще большими, так как не учитывались систематические ошибки. При исследовании изотопного состава урана в микрочастицах с помощью последовательной регистрации ионов в масс-спектрометре систематическая ошибка может возникать из-за неправильного учета динамики распыления частицы. При параллельной регистрации систематическая ошибка может зависеть от разной эффективности регистрации детекторов. Также могут влиять и другие факторы.

Тем не менее, аккуратно рассчитанная в данной работе статистическая ошибка измерения уже указывает на то, что экспертное заключение оказалось не верным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Причард, Э. Контроль качества в аналитической химии: пер. с англ. / Э. Причард, В. Барвик; под ред. И.В. Болдырева. СПб.: Профессия, 2011. 204 с.
2. Распределение Пуассона [Электронный ресурс]: Режим доступа: <http://www.statistica.ru/theory/raspredelenie-puassona/>

УДК 532.5

А. В. Кондратьева, Д. Ф. Белоножко

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Россия, г. Ярославль, e-mail: belonozhko@mail.ru

**О МЕТОДИКЕ РАСЧЕТА СПЕКТРА ВОЛНОВОГО
ДВИЖЕНИЯ В ТОНКОМ ЗАРЯЖЕННОМ ЖИДКОМ СЛОЕ,
ПОКРЫТОМ ПЛЕНКОЙ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНОГО
ВЕЩЕСТВА**

Разработана методика расчета совместного влияния поверхностного электрического заряда и пленки поверхностно-активного вещества на спектр волновых движений в слое вязкой жидкости конечной толщины. Выработана стратегия выделения в бесконечном спектре волновых движений частных компонент: составляющих, отвечающих капиллярно-гравитационным волнам и волнам перераспределения поверхностно-активного вещества.

Ключевые слова: *слой вязкой жидкости, поверхностно-активное вещество, свободная поверхность, поверхностный электрический заряд, неустойчивость капиллярно-гравитационных волн.*

A. V. Kondratieva, D. F. Belonozhko

*P.G. Demidov Yaroslavl State University
Russia, Yaroslavl, e-mail: belonozhko@mail.ru*

**ON THE METHODOLOGY OF CALCULATION OF WAVE
MOTION SPECTRUM IN ELECTRICALLY CHARGED
THIN LIQUID LAYER COVERED WITH UPPER ACTIVE
COATING OF SUBSTANCE**

A methodology is developed for calculation of combined action of surface electric charge and surfactant on the spectrum of wave motion in a layer of a viscous liquid with finite depth. A strategy is elaborated to distinguish the particular components among infinity of wave motion: the capillary-gravity waves and the waves which are caused by repartition of the surfactant.

Keywords: *viscous fluid layer, surfactant, free surface, surface electric charge, instability of capillary-gravity waves.*

В работе развита методика расчета спектра капиллярно-волнового движения в заряженном горизонтальном жидком слое, покрытом пленкой поверхностно-активного вещества (ПАВ). Исследовалось волновое движение в слое вязкой жидкости толщиной d с плотностью ρ , коэффициен-

том вязкости ν . Считалось, что поверхность жидкости покрыта пленкой ПАВ. Полагалось, что концентрация ПАВ Γ_0 в равновесном состоянии известна. Эффект изменения поверхностного натяжения, связанный с инициацией волнового движения и возникающим изменением концентрации ПАВ, описывался с помощью параметра упругости $\varepsilon = \Gamma_0 (d\gamma/d\Gamma) < 0$, который пропорционален тангенсу угла наклона изотермы, изображающей зависимость поверхностного натяжения от концентрации ПАВ: $\gamma = \gamma(\Gamma)$. Принималось, что жидкость является идеальным проводником, а на ее поверхности помимо ПАВ сосредоточен электрический заряд, который в равновесном состоянии распределяется по этой поверхности с постоянной поверхностной плотностью σ_0 . Слой опирается на твердое плоское дно. Задача решалась в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ с осью Ox , направленной горизонтально вдоль направления распространения волны и осью, Oz направленной вертикально вверх, против направления действия поля силы тяжести \mathbf{g} . Для простоты течение жидкости считалось независимым от горизонтальной координаты y .

Рассматривалась задача исследования совместного влияния электрического заряда и ПАВ на спектр реализующихся капиллярно-волновых движений. В первом приближении по амплитуде волны математическая формулировка задачи расчета электрических и гидродинамических переменных имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} z \rightarrow \infty: \quad |\nabla\Phi_1| &\rightarrow 0; & z > 0: \quad \Delta\Phi_1 &= 0 \\ -\infty \leq z < 0: \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{\rho} p \right) - \nu \Delta \vec{U} &= 0; & \text{div}(\vec{U}) &= 0 \\ z = 0: \quad \Phi_1 - 4\pi\sigma\xi &= 0; \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - \nu = 0; \quad -\rho g\xi + p - 2\rho\nu \frac{\partial v}{\partial z} + \gamma_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \sigma_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} &= 0; \\ -\rho\nu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \chi \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \Gamma_1}{\partial t} + \Gamma_0 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ z \rightarrow -d: \quad \mathbf{u} = 0; \quad \mathbf{v} = 0 \end{aligned}$$

Здесь функция $z = \xi(x, t)$ описывает изменяющуюся со временем форму свободной поверхности жидкости; $\vec{U} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_z$ - скорость жидкости в заданной точке пространства ($u = u(t, x, z)$ - горизонтальная компонента скорости, $v = v(t, x, z)$ - вертикальная компонента); $p = p(t, x, z)$ -

добавка к гидростатическому давлению внутри жидкости. Электрический потенциал $\Phi = \Phi(t, x, z)$ представлялся слагаемыми нулевого и первого порядка малости: $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, где $\Phi_0 = -E_0 z = -4\pi\sigma_0 z$, Φ_1 – малая поправка к электрическому потенциалу, обращающаяся в нуль при $z \rightarrow \infty$. $\gamma_0 = \gamma(\Gamma_0)$ – равновесное значение поверхностного натяжения; Γ_1 – добавка первого порядка по амплитуде волны малости к равновесной поверхностной концентрации ПАВ. Неизвестные искались в виде бегущей волны с комплексной частотой s и волновым числом k :

$$u = u(z)\exp(st - ikx); \quad v = v(z)\exp(st - ikx);$$

$$\Phi_1 = f(z)\exp(st - ikx); \quad \Gamma_1 = g(z)\exp(st - ikx);$$

$$\xi = \zeta \exp(st - ikx), \quad \zeta = const.$$

Из уравнений для электрического потенциала и поля скоростей уточнялся вид зависимости амплитудных множителей от координаты z :

$$u = (A_1 Ch(kz) + B_1 Sh(kz) + C_1 Ch(lz) + D_1 Sh(lz))\exp(st - ikx);$$

$$v = \left(iB_1 Ch(kz) + iA_1 Sh(kz) + \frac{iD_1 k}{l} Ch(lz) + \frac{iC_1 k}{l} Sh(lz) \right)\exp(st - ikx);$$

$$p = -\frac{is\rho}{k} (A_1 Ch(kz) + B_1 Sh(kz))\exp(st - ikx);$$

$$\Phi_1 = \Lambda \exp(-kz)\exp(st - ikx); \quad \Gamma_1 = \frac{i(A_1 + C_1)k\Gamma_0}{s} \exp(st - ikx).$$

Граничные условия задачи использовались для построения дисперсионного уравнения, связывающего комплексную частоту s , волновое число k и другие параметры задачи. Выяснилось, что дисперсионное уравнение в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 0 & -i & 0 & -\frac{ik}{l} & s \\ \frac{k^2 \varepsilon}{s} & -2kv & \frac{k^2 \varepsilon}{s} & -\frac{k^2 v}{l} - lv & 0 \\ -\frac{is}{k} - 2ikv & 0 & -2ikv & 0 & -\frac{\omega_0^2}{k} \\ -i Sh(dk) & i Ch(dk) & -\frac{ik}{l} Sh(dl) & \frac{ik}{l} Ch(dl) & 0 \\ Ch(dk) & -Sh(dk) & Ch(dl) & -Sh(dl) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\omega^2 = k + k^3 - k^2 W ; \quad l = \sqrt{\frac{s}{\nu} + k^2} .$$

Здесь ω - круговая частота волнового движения, реализуемого при тех же условиях в идеальной жидкости без пленки ПАВ; $W = 4\pi\sigma_0^2 / \sqrt{\rho g \gamma_0}$ - безразмерный параметр Тонкса-Френкеля, характеризующий отношение электрических и лапласовских сил на гребнях волн. Для безразмерных величин были оставлены прежние обозначения.

Дисперсионное уравнение задачи трансцендентно и его решения могут быть найдены только численными методами. Ситуация усложняется еще и тем, что решений бесконечно много – их счетное количество. Это связано с периодичностью в комплексной плоскости гиперболических функций, входящих в уравнение. Возникает вопрос, поведение каких решений целесообразно исследовать и каков их физический смысл. Для ответа на это вопрос было замечено, что подавляющее большинство решений имеет апериодический быстро затухающий характер. На практике проявить себя могут только решения с минимальным по модулю декрементом затухания, или решения с нарастающей во времени амплитудой. Расчеты показали, что таких решений не больше четырех, и они решения прекрасно идентифицируются при толщине пленки более чем вдвое превышающей длину волны. Эти решения близки по величине к решениями аналогичной задачи в постановке, в которой жидкость является бесконечно глубокой [2]. Выяснилось, что два корня описывают капиллярно-гравитационные волны, бегущие в разные стороны, а два – волны Марангони, возбуждаемые сжатиями и растяжениями пленки ПАВ. Из всего бесконечного спектра решений практический интерес имеют именно эти четыре корня, и именно на их исследовании важно сосредоточить внимание.

Уменьшая в расчетах толщину жидкого слоя, удается проследить непрерывное изменение идентифицированных решений дисперсионного уравнения. Расчеты показали, что качественно свойства анализируемых корней такие же как и в случае бесконечно глубокой жидкости. При увеличении электрического заряда капиллярно-гравитационное волновое движение претерпевает неустойчивость, которая в случае бесконечно глубокой идеальной жидкости называется «Неустойчивость Тонкса-Френкеля» [3]. Значение глубины и вязкости не влияют на критическое значение поверхностной плотности электрического заряда, по превышению которой реализуется неустойчивость Тонкса-Френкеля. На свойства волн Марангони значение поверхностной плотности электрического заряда влияет слабо независимо от толщины жидкого слоя и вязкости жидкости.

Влияние ПАВ на волновое движение различно при докритических и закритических, в смысле реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля, значениях поверхностной плотности электрического заряда.

Если величина поверхностной плотности заряда недостаточна для возникновения неустойчивости Тонкса-Френкеля, то увеличение по абсолютной величине упругости пленки приводит к сильному возрастанию модуля декремента затухания и частоты волн Марангони. При этом частота капиллярно-гравитационных волн меняется весьма слабо. Существует значение упругости пленки ПАВ, при котором частоты капиллярно-гравитационных волн и волн Марангони совпадают. При таком значении упругости происходит перекачка энергии от режима капиллярно-гравитационных волн в режим волн Марангони. В результате, затухание капиллярно-гравитационных при такой упругости пленки ПАВ оказывается экстремально высоким. Расчеты показали, что уменьшение толщины жидкого слоя значительно усиливает этот эффект.

Если величина поверхностной плотности заряда закритична, то развивается неустойчивость Тонкса-Френкеля. На начальной стадии происходит экспоненциальный рост амплитуд неустойчивых волновых искажений свободной поверхности. Пленка ПАВ при большой толщине жидкого слоя лишь незначительно уменьшает инкремент нарастания неустойчивости. При утоньшении слоя это влияние усиливается: уменьшая толщину жидкого слоя и увеличивая упругость пленки ПАВ можно снизить инкремент нарастания неустойчивости на порядок и выше. На практике это означает уменьшение интенсивности электродиспергирования жидкости.

Свойства волны Марангони при закритических значениях поверхностной плотности электрического заряда меняются слабо. На фоне развивающейся неустойчивости они будут весьма слабозаметным явлением.

Разобранная задача является показательным примером, в котором практическая целесообразность исследования существенно сужает класс решений, которые следует подвергнуть анализу. Описанная ситуация является характерной для большого количества задач с бесконечным набором решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левич, В.Г. Физико-Химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
2. Белоножко, Д.Ф. Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности вязкой жидкости, покрытой пленкой поверхностно-активного вещества / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // ЖТФ. 2004. Т.74, вып.11. С.29-37.
3. Белоножко, Д.Ф. Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости / Д.Ф. Белоножко, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2006. 288 с.

УДК 621.891.026

Л. В. Королев, Д. О. Бытев

Ярославский государственный технический университет,
Россия, г. Ярославль, e-mail: korolevly@mail.ru

КОЭФФИЦИЕНТ ПРОПУСКАНИЯ СОРБИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ С СУПЕРДИФФУЗИОННЫМИ КАНАЛАМИ

Методом непрерывных случайных блужданий найдено выражение для коэффициента пропускания сорбирующей среды, в которой движение частиц в направлении потока происходит в супердиффузионном режиме.

Ключевые слова: пористая среда, непрерывные случайные блуждания, супердиффузия.

L. V. Korolev, D. O. Bytev

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: korolevly@mail.ru

PERMEABILITY COEFFICIENT OF SORBING MEDIUM WITH SUPERDIFFUSIVE CHANNELS

A continuous random walks model is used to obtain permeability coefficient of sorbing medium, wherein particles streamline motion obeys the superdiffusion law.

Keywords: porous medium, continuous time random walks, superdiffusion.

В последние годы активно изучаются процессы случайного переноса частиц в средах со сложной структурой, таких как полимеры, жидкие кристаллы, капиллярно-пористые тела, полидисперсные сыпучие материалы. В таких средах могут устанавливаться режимы переноса, существенно отличающиеся от классической диффузии [1]. Для описания стохастического транспорта в этих средах применяется модель непрерывных случайных блужданий, которая позволяет получать интегральные кинетические уравнения для процессов с любыми заданными пространственно-временными распределениями единичных случайных смещений частицы.

Важным для приложений является исследование процессов переноса в пористых средах, обладающих разветвленной структурой каналов и полостей. В таких средах частицы могут участвовать в различных неупругих процессах, например, поглощения вещества в результате химической реакции или сорбции, эффективность которых определяется установившимся режимом переноса.

Рассмотрим простейшую модель пористой среды, предложенную в работе [2]. Среда занимает полупространство $x > 0$. Через среду в направлении оси x в момент времени $t = 0$ начинает протекать жидкость, содержащая взвешенные частицы. Поток этих частиц на поверхности $x = 0$ при $t > 0$ постоянен и равен J_0 . Среда имеет так называемую «гребешковую» структуру, то есть пронизана каналами двух типов. Продольные каналы, ведущие вдоль оси x , допускают движение частиц со скоростью v_{lon} вместе с потоком жидкости с пренебрежимо малым коэффициентом диффузии. Длительность свободного пробега частицы в продольном канале имеет плотность распределения $T_{lon}(\tau)$. По окончании свободного пробега в продольном канале частица попадает в поперечный канал, в котором блуждает в плоскости, перпендикулярной оси x , после чего вновь попадает в продольный канал. Плотность распределения длительности пребывания частицы в поперечном канале $T_{tr}(\tau)$. Находясь в поперечном канале, частица в каждом малом временном интервале $(t, t + \Delta t)$ может сорбироваться в нем с вероятностью $\Delta t / \tau_s$, где τ_s^{-1} - скорость сорбции. Сорбция приводит к ослаблению потока частиц $J(x, t)$, проходящего через поперечное сечение среды на расстоянии x от поверхности в момент времени t . В установившемся режиме процесс сорбции характеризуется экспериментально измеряемым коэффициентом пропускания

$$\psi(x) = \frac{J(x, t \rightarrow \infty)}{J_0}. \quad (1)$$

Из результатов работы [2] следует, что коэффициент $\psi(x)$ может быть представлен в виде

$$\psi(x) = 1 - \int_0^x f_s(x', t \rightarrow \infty) dx', \quad (2)$$

где $f_s(x, t)$ - распределение по координате x частиц, осевших в поперечных каналах среды к моменту времени $t > 0$, найденное при условии, что при $t = 0$ свободные частицы характеризуются плотностью распределения $f_0(x) = \delta(x)$, где $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака. Согласно модели непрерывных случайных блужданий [2], распределение $f_s(x, t)$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению

$$f_s = G_{tr} G_{lon} f_s + (K_{tr}^s + G_{tr}^s) G_{lon} f_0 \delta(t), \quad (3)$$

где операторы G_{tr} , K_{tr} , G_{lon} , K_{lon} действуют на произвольную функцию $\varphi(x, t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
 G_{tr} \varphi &= \int_0^t dt' T_{tr}(t-t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_s}\right) \varphi(x, t'), \\
 G_{lon} \varphi &= \int_0^x dx' \int_0^t dt' \delta(x-x' - v_{lon}(t-t')) T_{lon}(t-t') \varphi(x', t'), \\
 K_{tr}^S \varphi &= \int_0^t dt' \left(1 - \int_0^{t-t'} T_{tr}(\tau) d\tau\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_s}\right)\right) \varphi(x, t'), \\
 G_{tr}^S \varphi &= \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' T_{tr}(t'-t'') \left(1 - \exp\left(-\frac{t'-t''}{\tau_s}\right)\right) \varphi(x, t'').
 \end{aligned} \tag{4}$$

Операторы G_{tr} , G_{lon} описывают единичные случайные смещения свободной частицы в поперечном и продольном канале соответственно, а операторы K_{tr}^S и G_{tr}^S - пребывание осевшей частицы в поперечном канале.

Для нахождения функции f_S из (3), (4) необходимо задать распределения длительностей единичных смещений $T_{tr}(\tau)$ и $T_{lon}(\tau)$. Если длительность пребывания свободной частицы в поперечном канале велика и сравнима со временем наблюдения t , то $T_{tr}(\tau)$ можно моделировать степенным распределением с бесконечным математическим ожиданием

$$T_{tr}(\tau) = \frac{\alpha / \tau_{tr}}{(1 + \tau / \tau_{tr})^{1+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{5}$$

где τ_{tr} - параметр размерности времени. Например, при диффузионном движении частицы в поперечном канале распределение $T_{tr}(\tau) \sim (\tau_{tr} / \tau)^{3/2}$, что соответствует (5) при $\alpha = 1/2$.

В работе [2] было показано, что в случае, когда распределение $T_{lon}(\tau)$ имеет конечное математическое ожидание, коэффициент $\psi(x)$ экспоненциально убывает с ростом x , то есть среда характеризуется конечным пространственным масштабом ослабления потока. Предположим теперь, что процесс движения частицы по продольному каналу протекает по супердиффузионному сценарию, то есть длительность и, вследствие постоянства скорости v_{lon} , протяженность единичного продольного смещения сравнимы с характерными макроскопическими временными и пространственными масштабами наблюдения t и x . С точки зрения предлагаемой модели процесса это означает, что распределение $T_{lon}(\tau)$ должно иметь бесконечное математическое ожидание. Таким свойством обладает степенное распределение вида (5):

$$T_{lon}(\tau) = \frac{\gamma / \tau_{lon}}{(1 + \tau / \tau_{lon})^{1+\gamma}}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (6)$$

где τ_{lon} - модельный параметр.

Уравнение (3) с учетом (4) – (6) решается с помощью преобразования Лапласа по переменным t и x . Подстановка найденного выражение для f_s в (2) дает искомое выражение для коэффициента пропускания $\psi(x)$, которое при $x \gg (\tau_r v_{lon})$ можно представить в виде:

$$\psi(x) = 1 - qx^\gamma E_{\gamma, 1+\gamma}(-qx^\gamma), \quad q = \frac{(\tau_r / \tau_s)^\alpha \Gamma(1-\alpha)}{(\tau_{lon} v_{lon})^\gamma \Gamma(1-\gamma)}, \quad (7)$$

где $E_{\gamma, 1+\gamma}(z)$ - обобщенная функция Миттаг-Леффлера [3]; $\Gamma(z)$ - гамма-функция Эйлера. Из выражения (7) легко найти асимптотическое представление для $\psi(x)$ при $x \rightarrow \infty$:

$$\psi(x) \approx \left(\frac{\tau_{lon} v_{lon}}{x} \right)^\gamma \left(\frac{\tau_s}{\tau_r} \right)^\alpha \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (8)$$

Таким образом, коэффициент пропускания при движении частиц по продольному каналу в режиме супердиффузии убывает с ростом x по степенному закону $\psi(x) \sim x^{-\gamma}$. Значение показателя γ может быть найдено из сопоставления зависимости (8) с данными экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зеленый, Л. М. Фрактальная топологи и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики / Л. М. Зеленый, А. В. Милованов // Успехи физ. наук. 2004. Т. 174, № 8. С. 810-850.
2. Королев, Л. В. Случайный перенос в пористой сорбирующей среде / Л. В. Королев, Д. О. Бытев // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 2013. Т. 56, № 6. С. 86-89
3. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1967. 300 с.

УДК 532.59

А. А. Очиров, Д. Ф. Белоножко

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Россия, г. Ярославль, e-mail: belonozhko@mail.ru

О МЕТОДИКЕ РАСЧЕТА ВОЛНОВОГО ДРЕЙФА, ВОЗНИКАЮЩЕГО НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

Рассмотрен дрейф вещества, инициированный распространением периодической капиллярно-гравитационной волны по горизонтальной границе раздела двух движущихся относительно друг друга жидкостей. Проанализированы методические особенности техники расчета скорости дрейфового движения в верхней и нижних жидкостях.

Ключевые слова: *неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, идеальная жидкость, перенос вещества, эффект Доплера*

A. A. Ochirov, D. F. Belonozhko

P.G. Demidov Yaroslavl State University
Russia, Yaroslavl, e-mail: belonozhko@mail.ru

ON A TECHNIQUE OF CALCULATION OF WAVE DRIFT ARISING AN THE INTERFACE BETWEEN TWO LIQUIDS

The medium drift is considered caused by propagating of periodic capillary-gravity wave at the interface between two liquids moving relative to one another. Methodical features of the method were analyzed for calculation of the drift velocity in the upper and in the lower liquids.

Keywords: *Kelvin-Helmholtz instability, ideal fluid, mass transfer, Doppler effect.*

Если скорость ветра превышает некоторое пороговое значение, то амплитуда капиллярно-гравитационных волн на границе раздела водоем-воздух начинает расти. Это пример проявления неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, развивающейся на границе раздела двух жидкостей, движущихся относительно друг друга. Именно неустойчивость Кельвина-Гельмгольца является предметом многочисленных исследований поведения границы раздела двух жидкостей, движущихся относительно друг друга. Однако на такой границе раздела реализуется еще одно интересное явление - перенос вещества, вызванный распространением капиллярно-гравитационных волн. Механизм этого переноса был описан выдающимся

британским ученым Дж. Г. Стоксом еще в конце XIX века. Стокс показал, что в результате волнового движения индивидуальная жидкая частичка, прилегающая к границе раздела, движется в вертикальной плоскости по петлеобразной незамкнутой траектории, каждый виток которой по форме близок к окружности. Вследствие затухания движения с глубиной длина нижней части витка оказывается немного меньше длины верхней его половины и частичка через один период возвращается не в исходное положение, а в немного смещенное в сторону распространения волны. Со временем это смещение накапливается и образует средний горизонтальный дрейф жидкости в направлении распространения волны. Простейшая модель Стокса учитывает наличие только одной жидкости – нижней, но описанный в модели физический механизм возникновения дрейфа, очевидно, будет действовать и в системе из двух жидкостей.

В настоящей работе рассматривается обобщение простейшей модели возникновения дрейфа Стокса на случай, когда этот дрейф реализуется на границе раздела двух жидкостей, движущихся относительно друг друга. Как и в простейшей модели, причиной дрейфа являются капиллярно-гравитационные волны, распространяющиеся по границе раздела жидкостей. Так же, как и в модели Стокса, необходимо учитывать, что решение задачи о расчете поля скоростей в системе, которое выполняется в переменных Эйлера, еще не дает четкой информации о дрейфовом движении в обеих жидкостях. Эйлерово описание подразумевает лишь определение вектора поля скоростей течения в каждой точке пространства - скорость различных частичек, которые сменяя друг друга, проходят через ту точку пространства, к которой отнесен вектор поля скоростей. Движение индивидуальной жидкой частички следует связать с вектором, который будет соответствовать именно к этой частичке, изменяющей свое положение. Такой вектор описывает течение в переменных Лагранжа. Для перехода от эйлерова описания к лагранжевому в случае волнового движения имеется асимптотическая формула перехода [1]. Она справедлива во втором приближении по амплитуде волны и остается верной, только если жидкая частичка за период волнового движения смещается относительно своего начального положения на величину, не превышающую амплитуду волны. Ограничения в применимости формулы перехода делают обобщение простейшей модели Стокса на случай двух жидкостей не таким тривиальным, как это может показаться. В настоящей работе рассмотрены особенности обобщения идеальной модели дрейфа Стокса в идеальной жидкости на случай дрейфа, инициируемого волнами на границе раздела двух жидкостей, движущихся относительно друг друга.

Рассматривалась задача расчета дрейфа на границе раздела двух идеальных несжимаемых жидкостей, по границе раздела которых распро-

страняется капиллярно-гравитационная волна с волновым числом k и амплитудой ξ . Решение строилось в декартовой системе координат, плоскость Oxy которой располагалась на уровне невозмущенной границы раздела, а ось Oz была направлена вертикально вверх. Полагалось, что нижняя жидкость занимает полупространство $z < \xi$, а верхняя – полупространство $z > \xi$ (ξ – отклонение границы раздела от равновесного положения $z = 0$). Считалось, что верхняя жидкость движется относительно нижней в положительном направлении оси Ox с постоянной скоростью U_0 . Движение жидкостей принималось независимым от горизонтальной координаты y .

Полная математическая формулировка задачи расчета поля скоростей в обеих жидкостях имеет вид:

$$z > \xi: \quad \Delta\phi = 0; \quad (1)$$

$$p_b = p_0 - \rho_b g z - \rho_b \partial_t \phi - \frac{\rho_b}{2} \left((\partial_x \phi + U_0)^2 + \partial_z \phi^2 \right); \quad (2)$$

$$z < \xi: \quad \Delta\phi = 0; \quad (3)$$

$$p_a = p_0 - \rho_a g z - \rho_a \partial_t \phi - \frac{\rho_a}{2} \left(\partial_x \phi^2 + \partial_z \phi^2 \right); \quad (4)$$

$$z = \xi: \quad \partial_t \xi + \partial_x \phi \partial_x \xi = \partial_z \phi; \quad (5)$$

$$p_a - p_b = - \frac{\gamma \partial_{xx} \xi}{(1 + \partial_x \xi^2)^{3/2}}; \quad (6)$$

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = (\nabla \phi + U_0 \cdot \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{n}; \quad (7)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla \phi \rightarrow 0; \quad (8)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \nabla \phi \rightarrow 0. \quad (9)$$

Здесь нижними индексами a и b обозначается принадлежность величины к нижней и верхней жидкости соответственно, ϕ – гидродинамический потенциал верхней жидкости, φ – гидродинамический потенциал нижней жидкости, ρ – плотность, p_a – давление внутри жидкости; p_b – постоянное давление со стороны верхней жидкости (в случае вода-воздух – атмосферное давление); γ – коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела жидкостей, g – ускорение свободного падения, \mathbf{n} – вектор нормали к поверхности, направленный в верхнюю жидкость.

Задача (1) – (9) решается методом разложения по малому параметру $\varepsilon = \zeta k$. Дрейф Стокса – это явление второго порядка малости, и задача должна решаться с соответствующей точностью. Но расчеты показывают, что поле скоростей второго порядка малости не вносит своей добавки в дрейф жидкости [1]. Поэтому здесь приводится только задача первого порядка малости. Снеся граничные условия (5) – (7) на равновесную плоскость $z = 0$ (процедура сноса условий подробно описана в [2]) и разбив задачу по порядком малости для первого порядка, получим:

$$z > 0: \quad \Delta \phi_1 = 0; \quad (10)$$

$$z < 0: \quad \Delta \varphi_1 = 0; \quad (11)$$

$$\partial_t \xi_1 - \partial_z \varphi_1 = 0; \quad (12)$$

$$z = 0: \quad \partial_z \varphi_1 - U_0 \partial_x \xi_1 - \partial_z \phi_1 = 0; \quad (13)$$

$$-\rho_a g \xi_1 - \rho_a \partial_t \varphi_1 + \rho_b g \xi_1 + \rho_b \partial_t \phi_1 + \rho_2 \partial_x \phi_1 U_0 + \gamma \partial_{xx} \xi_1 = 0; \quad (14)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla \phi_1 \rightarrow 0; \quad (15)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \nabla \varphi_1 \rightarrow 0. \quad (16)$$

Здесь индекс «1» указывает на то, что величины рассматриваются в первом приближении по амплитуде волнового движения. Решение задачи (10) - (16) легко находится стандартными методами и имеет вид [2]:

$$\xi_1 = \zeta \exp(St - ikx) + c.c. \quad (17)$$

$$\phi_1 = \left(-\frac{S\zeta}{k} + i\zeta U_0 \right) \exp(-kz) \exp(St - ikx) + c.c. \quad (18)$$

$$\varphi_1 = \frac{S\zeta}{k} \exp(kz) \exp(St - ikx) + c.c. \quad (19)$$

Здесь символом *c.c.* обозначены комплексно сопряженные слагаемые, а *S* представляет из себя комплексную частоту волнового движения, которая в случае докритических режимов реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца является чисто мнимой величиной:

$$S = \frac{\left(ikU_0 \rho_b \pm \sqrt{k \left(g(-\rho_a^2 + \rho_b^2) + k(U_0^2 \rho_a \rho_b - k\gamma(\rho_a + \rho_b)) \right)} \right)}{\rho_a + \rho_b}.$$

Формальный подход вычисления скорости массопереноса, описанный выше приводит к ожидаемому результату при расчете дрейфа в нижней жидкости: горизонтальная скорость дрейфа U_d оказывается пропорциональна частоте волнового движения (чем чаще частичка совершает

петлеобразные движения – тем чаще она смещается и тем больше скорость дрейфа) и квадрату амплитуды. И вычисляется по формуле

$$U_d = \frac{1}{2} \zeta^2 k \omega \exp(2kz). \quad (20)$$

Здесь $\omega = \text{Im}(S)$ – частота волнового периодического движения.

Но применение этого метода при расчете дрейфового движения в верхней жидкости приводит к ошибочному результату. Дело в том, что формула перехода от описания скорости жидкости в эйлеровых координатах к лагранжевому представлению справедлива только при малых смещениях жидкой частички, тогда как частички верхней жидкости изначально дрейфуют с постоянной скоростью U_0 . Для того чтобы обойти описанную проблему можно перейти в движущуюся систему отсчета. Для этого в решении (18) – (19) воспользуемся преобразованиями Галилея. В новой системе отсчета получается поле скоростей:

$$\phi_1^* = -\frac{S\zeta}{k} \exp(-kz) \exp(St - ikx), \quad (21)$$

$$\varphi_1^* = \frac{(S + ikU_0)\zeta}{k} \exp(kz) \exp(St - ikx). \quad (22)$$

Однако, переходя от неподвижной системы отсчета к движущейся, важно не упустить из виду один важный момент. В новой системе отсчета частота волнового движения тоже должна измениться в соответствии с правилом, учитывающим эффект Доплера. Воспользовавшись формулами для перерасчета частоты, с учетом эффекта Доплера получим значение частоты волнового движения в новой системе отсчета:

$$S^* = \frac{\left(-ikU_0\rho_1 \pm \sqrt{k \left(g(-\rho_1^2 + \rho_2^2) + k(U_0^2\rho_1\rho_2 - k\gamma(\rho_1 + \rho_2)) \right)} \right)}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Верным образом примененный метод расчета горизонтальной скорости дрейфа для верхней жидкости дает результат:

$$W_d = \frac{1}{2} \zeta^2 k \omega^* \exp(-2kz). \quad (23)$$

Видно отличие от скорости дрейфа нижней жидкости в показатели экспоненты и частоте волнового периодического движения $\omega^* = \text{Im}(S^*)$.

Расчет без учета эффекта Доплера дает для величины скорости массопереноса совершенно нелепые значения, не имеющие никакого отношения к реальному физическому явлению. Правильность решения легко проверить, решив задачу изначально с неподвижной верхней и движущейся с постоянной скоростью нижней жидкостью. В математической формули-

ровке изменятся уравнения (2) и (4) и граничные условия (5) – (7). Решение новой задачи полностью совпадает с решением, полученным путем преобразований Галилея и учета изменения частоты вследствие эффекта Доплера.

Расчеты показали, что скорость движения верхней среды относительно нижней оказывает существенное влияние на массоперенос в жидкостях. В нижней жидкости скорость дрейфа с увеличением скорости U_0 уменьшается пропорционально частоте волнового движения вплоть до некоторого минимального ненулевого значения при критическом значении скорости U_0 . При превышении этого критического значения начинает развиваться неустойчивость Кельвина-Гельмгольца и характер дрейфа изменяется: его интенсивность начинает расти с увеличением степени надкритичности. В верхней жидкости на постоянный дрейф со скоростью U_0 накладывается отрицательная добавка в виде дрейфа Стокса (23). Таким образом, происходит существенное ослабление скорости перемещения верхней жидкости. Нижняя жидкость «тормозит» движущуюся верхнюю среду.

Представленная в работе модель позволяет глубже понять природу переноса вещества в жидкостях и газах и показывает неожиданную взаимосвязь явлений волнового переноса и неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Методически грамотная организация вычислений, в частности учет эффекта Доплера, принципиально важна для получения физически содержательных результатов и должна приниматься во внимание в более сложных моделях, учитывающих вязкость жидкостей, наличие поверхностно-активных веществ и другие обобщения рассмотренной задачи. Развитую методику легко применить не только для оценки влияния скорости ветра на дрейф в жидкостях при докритических в смысле реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца режимах течения, но и в закритической области для описания дрейфового движения, которое инициируется неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ле Блон. П.* Волны в океане Ч.1 / Ле Блон П., Майсек Л. М.: Мир, 1981. 480 с.
2. *Левич, В.Г.* Физико-Химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.

УДК 532.4

Н. А. Петрушов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Россия, г. Ярославль, e-mail: mikola_imba@mail.ru

**НЕЛИНЕЙНЫЙ РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ
ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ, ЛЕВИТИРУЮЩЕЙ
В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОДВЕСЕ**

Расчет электрического поля в окрестности капли, левитирующей во внешнем однородном электростатическом поле, коллинеарном гравитационному полю.

Ключевые слова: заряженная капля, электростатический подвес.

N. A. Petrushov

*P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: mikola_imba@mail.ru*

**NONLINEAR ANALYSIS OF THE ELECTRIC FIELD
OF A CHARGED DROP LEVITATING
IN ELECTROSTATIC SUSPENSION**

Calculation of the electric field in the vicinity drops levitating in a uniform external electrostatic field collinear gravitational field.

Keywords: charged drop, electrostatic suspension.

Исследование равновесных форм заряженных капель во внешних силовых полях представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями. Отдельный интерес представляет расчет равновесных форм капель в левитаторах (бесконтактных подвесах) различного типа.

Ранее был выполнен расчет равновесной капли в квадратичном по амплитуде деформации приближении [1]. Установлено, что в слабых электростатическом и гравитационном полях равновесную форму капли можно считать сфероидом, эксцентриситет e которого связан с зарядом капли Q и напряженностью электростатического поля E_0 :

$$e^2 = \frac{9w}{1-W}; \quad w \equiv \frac{E_0^2}{16\pi}; \quad W \equiv \frac{Q^2}{16\pi}$$

При малых значениях эксцентриситета форма капли достаточно хорошо описывается разложением в ряд по e уравнения сфероидальной капли:

$$r_{sph} \approx 1 + e^2 P_2(\cos \theta) + O(e^4).$$

Однако для больших значений e возникает необходимость учета большего числа слагаемых в разложении. Для более точного определения равновесной формы капли требует расчета всех действующих давлений на поверхность капли, среди которых давление электрического поля

$$P_E = \frac{E^2}{8\pi}$$

для определения, которого требуется вычислить электростатическое поле в окрестности капли. В свою очередь, определение электростатического поля в окрестности капли требует задания формы заряженной поверхности.

В коллинеарных полях \mathbf{E}_0 и \mathbf{g} равновесная поверхность будет обладать осевой симметрией, ось симметрии будет направлена параллельно \mathbf{E}_0 . Тогда равновесную форму капли будем искать в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$r(\theta) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta). \quad (1)$$

Поскольку заряд не нарушает сферичности равновесной формы капли, то $Q \sim \varepsilon^0$. Гравитационное и электростатическое поля должны обеспечивать неподвижность центра масс капли вне зависимости от её деформации, то есть должно выполняться соотношение $g \sim QE_0$. К искажению сферической формы приводит компонента давления электростатического поля, зависящая от зенитного угла θ . Отсюда следует, что отклонение формы капли от сферической формы пропорционально электростатическому давлению, таким образом, справедливо соотношение $E_0^2 \sim \varepsilon$, или $E_0 \sim \varepsilon^{1/2}$. На основании приведенных рассуждений представим коэффициенты a_n в (1) в виде разложения по степеням ε :

$$a_n = \varepsilon a_n^{(1)} + \varepsilon^{3/2} a_n^{(3/2)} + \varepsilon^2 a_n^{(2)} + \varepsilon^{5/2} a_n^{(5/2)} + O(\varepsilon^3).$$

Зададимся целью определить электростатическое поле с точностью до слагаемого порядка $\varepsilon^{5/2}$ для капли, форма которой может быть задана разложением (1).

Рассмотрим каплю несжимаемой идеально проводящей жидкости,

несущую заряд Q и подвешенную в электростатическом подвесе, когда коллинеарные внешнее однородное электростатическое поле \mathbf{E}_0 и гравитационное поле \mathbf{g} удерживают её в подвешенном состоянии. Задачу будем решать асимптотическим методом, в качестве малого параметра примем максимальное отклонение формы капли от сферической формы, в качестве характерных масштабов примем радиус сферической капли R , плотность жидкости ρ и коэффициент поверхностного натяжения σ . Перейдем к безразмерным переменным в которых $R = \rho = \sigma = 1$.

Запишем основные уравнения и граничные условия:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}_0;$$

- условие эквипотенциальности поверхности:

$$r \rightarrow r(\theta): \Phi(r, \theta) = \Phi_s;$$

- условие сохранения заряда капли:

$$\int_S E_n dS = 4\pi Q; \quad S \equiv \{r(\theta); 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

Перейдем от напряженности электрического поля к электростатическому потенциалу:

$$\Delta \Phi = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: -\nabla \Phi \rightarrow E_0 \mathbf{e}_z;$$

$$r \rightarrow r(\theta): \Phi(r, \theta) = \Phi_s;$$

$$-\int_S (\mathbf{n}, \nabla \Phi) dS = 4\pi Q; \quad S \equiv \{r(\theta); 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}; \quad (2)$$

где $\mathbf{n} \equiv \frac{\nabla(r-r(\theta))}{|\nabla(r-r(\theta))|}$ - орт нормали к свободной поверхности капли; \mathbf{e}_z -

орт декартовой оси координат, коллинеарной внешнему электрическому полю и гравитационному полю, связь орта \mathbf{e}_z со сферическими координатами:

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta.$$

Решение для электростатического потенциала будем искать в виде разложения:

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon^{1/2} \Phi_{1/2} + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^{3/2} \Phi_{3/2} + \varepsilon^2 \Phi_2 + \varepsilon^{5/2} \Phi_{5/2} + O(\varepsilon^3). \quad (3)$$

Подставив (1) и (3) в уравнение Лапласа и граничные условия (2), разложим сформулированную задачу на порядки малости.

Задача нулевого порядка малости описывает недеформированную сферическую каплю:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_0(r) &= 0; \\ r \rightarrow \infty: \Phi_0 &\rightarrow 0; \\ r \rightarrow 1: \Phi_0 &= \Phi_s; \\ -\int_S \partial_r \Phi_0(r) dS &= 4\pi Q; \quad S \equiv \{r=1; 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}; \end{aligned}$$

Решение задачи нулевого порядка малости не вызывает затруднений и имеет вид

$$\Phi_0(r) = \frac{Q}{r};$$

Задача порядка малости 1/2 имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{1/2}(r, \theta) &= 0; \\ r \rightarrow \infty: -\nabla\Phi_{1/2} &\rightarrow E_0 \mathbf{e}_z; \\ r \rightarrow 1: \Phi_{1/2} &= \Phi_s; \\ -\int_S \partial_r \Phi_{1/2} dS &= 0; \quad S \equiv \{r=1; 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}; \end{aligned}$$

Решением задачи порядка 1/2 – потенциал в окрестности незаряженной сферы, помещенной во внешнее однородное поле:

$$\Phi_{1/2}(r, \theta) = E_0 \left(\frac{1}{r^2} - r \right) \cos \theta;$$

Задача первого порядка малости:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_1(r, \theta) &= 0; \\ r \rightarrow \infty: \Phi_1 &\rightarrow 0; \\ r \rightarrow 1: \Phi_1 + \partial_r \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} P_n(\cos \theta) &= \Phi_s; \\ \int_S \left(\partial_r \Phi_1 + (2\partial_r \Phi_0 + \partial_{r,r} \Phi_0) \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} P_n(\cos \theta) \right) dS &= 0; \\ S &\equiv \{r=1; 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}; \end{aligned}$$

Решение задачи первого порядка малости запишется в виде:

$$\Phi_1(r, \theta) = Q \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} a_n^{(1)} P_n(\cos \theta);$$

$$\Phi_{1/2}(r, \theta) = E_0 \left(\frac{1}{r^2} - r \right) \cos \theta;$$

Задача порядка малости 3/2 имеет вид:

$$\Delta \Phi_{3/2}(r, \theta) = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_{3/2} \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow 1: \quad \Phi_{3/2} + \partial_r \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(3/2)} P_n(\cos \theta) + \partial_r \Phi_{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} P_n(\cos \theta) = \Phi_s;$$

$$\int_S \left(\partial_r \Phi_{3/2} + (2\partial_r \Phi_0 + \partial_{r,r} \Phi_0) \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(3/2)} P_n(\cos \theta) + \right. \\ \left. + (2\partial_r \Phi_{1/2} + \partial_{r,r} \Phi_{1/2}) \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} P_n(\cos \theta) + \right. \\ \left. + \partial_\theta \Phi_{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \partial_\theta (P_n(\cos \theta)) \right) dS = 0$$

$$S \equiv \{r = 1; 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

Решение задачи порядка малости 3/2 запишется в виде

$$\Phi_{3/2}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} \left(3E_0 \left(\frac{na_{n-1}^{(1)}}{2n-1} + \frac{(n+1)a_{n+1}^{(1)}}{2n+3} \right) + Qa_n^{(3/2)} \right) P_n(\cos \theta);$$

Задачи второго порядка малости и порядка 5/2 ввиду большой громоздкости не приводятся. Их решение осложнено произведениями бесконечных сумм и полиномов Лежандра. С помощью разложения в ряд Клебша-Гордана [2] решения можно представить в виде:

$$\Phi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} \left[3E_0 \left(\frac{na_{n-1}^{(3/2)}}{2n-1} + \frac{(n+1)a_{n+1}^{(3/2)}}{2n+3} \right) + \right. \\ \left. + Q \left(a_n^{(2)} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (k+m) a_{k+m}^{(1)} a_{k+n-m}^{(1)} \left(C_{(k+m, k+n-m, n)}^{(0,0,0)} \right)^2 \right) \right] P_n(\cos \theta);$$

$$\Phi_{5/2}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} \left[3E_0 \left\{ \frac{na_{n-1}^{(2)}}{2n-1} + \frac{(n+1)a_{n+1}^{(2)}}{2n+3} + \right. \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{(k+m)a_{k+m-1}^{(1)}}{2(k+m)-1} + \frac{(k+m+1)a_{k+m+1}^{(1)}}{2(k+m)+3} \right) (k+m)a_{k+n-m}^{(1)} \left(C_{(k+m, k+n-m, k)}^{(0,0,0)} \right)^2 \Bigg\} +$$

$$+ 2Q \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (k+n-m)a_{k+m}^{(3/2)} a_{k+n-m}^{(1)} \left(C_{(k+m, k+n-m, k)}^{(0,0,0)} \right)^2 + Qa_n^{(5/2)} \Bigg] P_n(\cos \theta);$$

где $C_{(k+m, k+n-m, n)}^{(0,0,0)}$ - коэффициенты Клебша-Гордана.

Полученное решение определяет с точностью до слагаемых порядка $\epsilon^{5/2}$ электростатический потенциал заряженной капли в однородном электростатическом поле, коллинеарном гравитационному полю, форма поверхности которой может быть описана разложением (1).

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170 и 14-08-00240.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяева, С.О. Нелинейный анализ равновесной формы заряженной электропроводной капли в электростатическом подвесе // Журн. техн. физики. 2006. Т.76. Вып.10. С. 32-40.
2. Вилленкин, Н.Я. Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1965. 596 с.

УДК 65.011.4

М. П. Цыганков, В. В. Кузьмин

Ярославский государственный технический университет,
Россия, г. Ярославль, e-mail: cigg@rambler.ru;
KuzminVV@yrnu-spb.spb.transneft.ru

ДИАГНОСТИРОВАНИЕ УТЕЧЕК НА МАГИСТРАЛЬНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ С МЕСТНЫМИ СОПРОТИВЛЕНИЯМИ

Анализируется влияние местных сопротивлений на возможности и точность диагностирования зон возникновения утечек на магистральных трубопроводах для транспортирования нефти. Рассматривается стационарный или псевдостационарный режим эксплуатации транспортной системы.

Ключевые слова: магистральный трубопровод, расчетный профиль, утечка, математическая модель, техническая диагностика, аналитическая избыточность

M. P. Tsygankov, V. V. Kuzmin

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: cigg@rambler.ru
KuzminVV@yrtu-spb.spb.transneft.ru

DIAGNOSING LEAKAGE OF TRUNK PIPELINES WITH LOCAL RESISTANCE

Analyzes the impact of local resistance to the opportunities and accuracy of diagnosing areas of leaks on the main pipeline to transport oil. We consider the pseudo-steady-state or steady-state mode of operation of the transport system.

Keywords: *trunk pipeline settlement profile, leak, mathematical model, technical diagnostics, analytical redundancy*

Решение задач технического диагностирования магистрального трубопровода актуально в связи с ужесточением требований к безопасности трубопроводных систем в условиях постоянного увеличения их общей протяженности.

При создании системы диагностирования необходимо отыскивать компромисс между ее чрезмерной стоимостью, с одной стороны, и надежностью локализации места возникающей утечки – с другой. Например, стоимость диагностической системы может оказаться неприемлемой при использовании дорогостоящих специализированных средств прямого обнаружения дефектности трубопровода (средств дефектоскопии).

В работе [1] для выполнения диагностических процедур предложено использовать простейшие датчики контроля давлений, решающие проблему снижения стоимости мониторинга трубопровода. Для выполнения диагностических процедур предлагается математическая модель динамики движения жидкости в трубе [2]. Но обычный режим эксплуатации трубопровода является стационарным или псевдостационарным. Разработка модели для таких условий эксплуатации, как будет показано ниже, позволяет отказаться от принятия допущений о виде модели дефекта (форма, площадь отверстия). Тем самым существенно упрощается как математическое описание трубопровода, так и алгоритм выявления места утечки.

Для построения расчетных соотношений в системе диагностирования рассмотрим простой трубопровод постоянного сечения, который расположен произвольно в пространстве, имеет общую длину l и диаметр d , а также содержит ряд местных сопротивлений (рис. 1).

Скорость потока в трубе постоянного сечения полагаем одинаковой по длине и равной v .

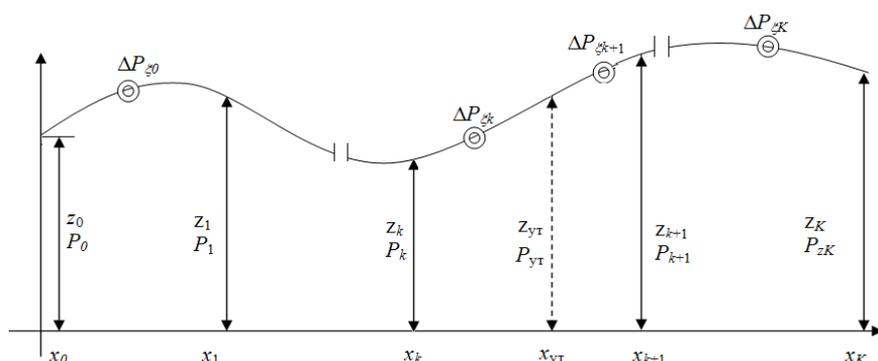


Рис. 1. Схема участка трубопровода с однократным дефектом (утечкой) на участке между k -й и $k+1$ -й точками промежуточного контроля давлений

Для двух произвольных сечений трубопровода, обозначенных индексами 1 и 2 уравнение потери напора по текущей координате (длине) трубопровода имеет вид [1]:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + KQ^m,$$

где z_i и P_i – геометрическая высота и избыточное давление в i -м сечении,

$$K = \frac{128\nu\ell_{расч}}{\pi g d^4} \text{ для } m=1;$$

$$K = \left(\sum \zeta + \lambda_T \frac{x}{d} \right) \frac{16}{2g\pi^2 d^4} \text{ для } m=2.$$

В силу этого расчетный профиль на "гладких" участках без утечек может быть найден из выражения

$$P = P_0 - \rho g(z - z_0) - \rho g Q^m \left(\frac{\lambda_T}{d} \right) \frac{16}{2g\pi^2 d^4} x, \quad (1)$$

где P_0 и z_0 – давление и высота в начале "гладкого" участка; x , z и P – текущие расстояние от начала гладкого участка, высота и давление по длине на этом расстоянии.

На участке местного сопротивления в пределах бесконечно малого отрезка трубопровода dx в силу $z = \text{const}$, получаем

$$\Delta P = -\rho g Q^m \zeta_m \frac{16}{2g\pi^2 d^4}, \quad (2)$$

где ΔP – скачок (падение) давления перед началом следующего гладкого участка.

Уравнения (1) и (2) справедливы до сечения утечки $x = x_{yT}$ (например, несанкционированного отбора). После этого сечения в силу уравнения материального баланса значение расхода уменьшается на величину Q_{yT} . Значение Q_{yT} рассматривается как дефект. Таким образом, (1) и (2) для оставшегося участка преобразуются к виду

$$P_l = P_{yT} - \rho g(z_l - z_{yT}) - \rho g(Q - Q_{yT})^m \frac{16}{2g\pi^2 d^5} \left(\left(\frac{\lambda_T}{d} \right) (x_l - x_{yT}) - \sum_{k=1}^K \zeta_{mk} \right), \quad (3)$$

где $\sum_{k=1}^K \zeta_{mk}$ – сумма местных сопротивлений на участке от сечения утечки до конца трубопровода; Q_0 – измеренный расход в начале трубопровода; Q_l – измеренный расход в конце трубопровода.

Дополнение уравнения (3) уравнением материального баланса: $Q_{yT} = Q_0 - Q_l$, при отсутствии местных сопротивлений ($\zeta_{mj} = 0, j = 1 \dots K+N$), принципиально позволяет вычислить сечение (место) утечки x_{yT} , если известен перепад давлений P_0 и P_l , расход Q жидкости и потеря расхода Q_{yT} на участке трубопровода. Вычисление даст точный результат в условиях точности модели течения жидкости и измерений расходов и давлений.

Во многих случаях на магистральных трубопроводах между точками промежуточного контроля содержатся не только гладкие участки, но и по нескольку местных сопротивлений, таких как задвижки, заслонки и т.д. Рассмотрим особенности мониторинга в соответствующих условиях.

Представим магистральный трубопровод рядом гладких участков между пунктами промежуточного контроля P_{k-1} и P_k давлений от одного местного сопротивления $P_{k_{i-1}}$ до следующего P_{k_i} .



Рис. 2. Схема трубопровода на отрезке между $i-1$ -м и $i+1$ -м сечениями скачков давления на местных сопротивлениях на участке промежуточного контроля давлений P_{k-1} и P_k

На гладком участке между сечениями $i-1$ и i с давлением p_{ci} в его конце:

$$p_{ci} = p_{i-1} - \rho g(z_i - z_{i-1}) - \rho g Q^m \left(\frac{\lambda_T}{d} \right) \frac{16}{2g\pi^2 d^5} X_i. \quad (4)$$

В конце гладкого участка возникает скачок давления от p_{ci} до p_i на местном сопротивлении ζ_{mi}

$$p_i = p_{ci} - \rho g Q^m \zeta_{mi} \frac{16}{2g\pi^2 d^5}. \quad (5)$$

После суммирования (4) и (5) и вынесения общего знаменателя за скобки, получаем выражение давления после местного сопротивления

$$p_i = p_{i-1} - \rho g (z_i - z_{i-1}) - \frac{8\rho}{\pi^2 d^4} Q^m \left(\left(\frac{\lambda_T}{d} \right) x_i - \xi_{mi} \right).$$

Суммируя по всем i -м участкам от предшествующей точки контроля давления P_{k-1} до последующей P_k , находим

$$P_k = P_{k-1} + \rho g (z_k - z_{k-1}) - \frac{8\rho}{\pi^2 d^4} Q^m \left(\left(\frac{\lambda_T}{d} \right) x_k - \xi_{mk} \right), \quad (6)$$

$$x_k = \sum_{i=I_{k-1}}^{I_k} x_i, \quad \xi_{mk} = \sum_{i=I_{k-1}}^{I_k} \xi_{mi},$$

где x_k – суммарная длина всех "гладких" участков трубопровода между местными сопротивлениями ξ_{mi} от $k-1$ -го до k -го пункта контроля давления P_k , ξ_{mk} – сумма местных сопротивлений ξ_{mi} от $k-1$ -го до k -го пункта контроля давления P_k , I_{k-1} и I_k – начальное и конечное значение номера i гладкого участка от $k-1$ -го до k -го пункта контроля давления P_k

Понятно, что расчетные значения λ_T и ξ_{mk} могут быть оценены только с очень невысокой точностью по причине случайности таких процессов как отложение парафина на внутренней поверхности трубопровода, загрязнений и т.д.

Их идентификация экспериментальным путем также затруднена, так как по данным измерений давлений в контрольных точках из (6) вычисляется лишь значение $y_k = \left(\frac{\lambda_T}{d} \right) x_k - \xi_{mk}$. Согласно смыслу входящих в это выражение величин значение y_k должно быть постоянным, если параметры λ_T и ξ_{mk} , характеризующие свойства трубопровода, не меняются во времени. С другой стороны в соответствии с (6):

$$y_k = \frac{\pi^2 d^4 (P_{k-1} - P_k - \rho g (z_k - z_{k-1}))}{8\rho Q^m}. \quad (7)$$

Значение λ_T можно оценить отдельно от ξ_{mk} по данным измерений не менее чем в двух контрольных точках только на гладком участке трубопровода (то есть при $\xi_{mk} = 0$). Правда, для обнаружения нарушений на каждом k -том участке раздельного оценивания λ_T и ξ_{mk} не требуется. Достаточно определить значение y_k в период нормального функционирования как постоянный коэффициент или очень медленно меняющийся параметр. Факт неисправности на этом участке фиксируется по изменению расчетного (по формуле (7)) значения этого коэффициента. Например, при утечке взамен (6) имеем

$$P_{yT} = P_{k-1} + \rho g (z_{yT} - z_{k-1}) - \frac{8\rho}{\pi^2 d^4} Q^m \left(\left(\frac{\lambda_T}{d} \right) x_{yT} - \xi_{myT} \right) \quad (8)$$

$$P_k = P_{yT} + \rho g (z_k - z_{yT}) - \frac{8\rho}{\pi^2 d^4} (Q - Q_{yT})^m \left(\left(\frac{\lambda_T}{d} \right) (x_k - x_{yT}) - \xi_{MyT1} \right), \quad (9)$$

где индекс "yT" обозначает принадлежность сечению трубы в котором произошла утечка; Q_{yT} – величина утечки; x_{yT} – расстояние от $k-1$ -го пункта контроля давления до сечения утечки; $x_{yT} - x_k$ – расстояние от сечения утечки до k -го пункта контроля давления; ξ_{MyT} и ξ_{MyT1} – сумма местных сопротивлений на k -м участке до сечения утечки и после этого сечения ($\xi_{MyT} + \xi_{MyT1}$) = ξ_{Mk} .

Суммируя (8) и (9) при $m=2$, находим

$$P_k = P_{k-1} + \rho g (z_k - z_{k-1}) - \frac{8\rho}{\pi^2 d^4} \left(Q^m \left(\left(\frac{\lambda_T}{d} \right) x_{yT} - \xi_{MyT} \right) + (Q - Q_{yT})^m \left(\left(\frac{\lambda_T}{d} \right) (x_k - x_{yT}) - \xi_{MyT1} \right) \right). \quad (10)$$

Выполним последовательность преобразований выражения $\left(Q^m \left(\left(\frac{\lambda_T}{d} \right) x_{yT} - \xi_{MyT} \right) + (Q - Q_{yT})^m \left(\left(\frac{\lambda_T}{d} \right) (x_k - x_{yT}) - \xi_{MyT1} \right) \right)$ в (10), приняв $m = 2$. Возведение $(Q - Q_{yT})$ в квадрат, почленное умножение на Q^2 и на $-2QQ_{yT} + Q^2_{yT}$ сомножителя $\left(\left(\frac{\lambda_T}{d} \right) (x_k - x_{yT}) - \xi_{MyT1} \right)$, вычитание одинаковых значений $Q^2 \left(\frac{\lambda_T}{d} \right) x_{yT} - Q^2 \left(\frac{\lambda_T}{d} \right) x_{yT}$ и вынесение общего сомножителя за скобки в сумме $Q^2 \xi_{MyT} + Q^2 \xi_{MyT1}$ с учетом $\xi_{Mk} = \xi_{MyT} + \xi_{MyT1}$, дает:

$$\begin{aligned} & Q^2 \left(\left(\frac{\lambda_T}{d} \right) x_{yT} - \xi_{MyT} \right) + (Q^2 - 2QQ_{yT} + Q^2_{yT}) \left(\left(\frac{\lambda_T}{d} \right) (x_k - x_{yT}) - \xi_{MyT1} \right) \\ & Q^2 \left(\frac{\lambda_T}{d} \right) x_{yT} - Q^2 x_{MyT} + Q^2 \frac{\lambda_T}{d} (x_k - x_{yT}) - Q^2 \xi_{MyT1} - (2QQ_{yT} - Q^2_{yT}) \left(\left(\frac{\lambda_T}{d} \right) (x_k - x_{yT}) - \xi_{MyT1} \right) \\ & Q^2 \frac{\lambda_T}{d} x_k - Q^2 \xi_{Mk} + (-2QQ_{yT} + Q^2_{yT}) \left(\left(\frac{\lambda_T}{d} \right) (x_k - x_{yT}) - \xi_{MyT1} \right). \end{aligned}$$

После подстановки преобразованного выражения в получаем взамен расчетного значения найденного из (7):

$$P_k = P_{k-1} + \rho g (z_k - z_{k-1}) - \frac{8\rho}{\pi^2 d^4} Q^2 \left(\frac{\lambda_T}{d} x_k - \xi_{Mk} \right) - \left((2QQ_{yT} - Q^2_{yT}) \left(\left(\frac{\lambda_T}{d} \right) (x_k - x_{yT}) - \xi_{MyT} \right) \right). \quad (11)$$

Разность между (6) и (11): $\left((2QQ_{yT} - Q^2_{yT}) \left(\left(\frac{\lambda_T}{d} \right) (x_k - x_{yT}) - \xi_{MyT} \right) \right)$ несет информацию о степени влияния на P_k и месте x_{yT} возникновения утечки.

Таким образом, при попытке оценивания y_k из выражения (7) находим взамен ожидаемого $y_k = \left(\frac{\lambda_T}{d} \right) x_k - \xi_{Mk}$, найденного из (7), путем вычисления выражения

$$y_k = \frac{\pi^2 d^4 (P_{k-1} - P_k - \rho g (z_k - z_{k-1}))}{8\rho Q^2},$$

другое расчетное значение:

$$y_{pk} = \left(\frac{\lambda_{\Gamma}}{d}\right) x_k - \xi_{mk} - \frac{Q_{\text{ут}}(2Q - Q_{\text{ут}})}{Q} \cdot \left(\left(\frac{\lambda_{\Gamma}}{d}\right) (x_k - x_{\text{ут}}) - \xi_{\text{мут1}} \right).$$

Разность

$$\delta_k = \frac{Q_{\text{ут}}(2Q - Q_{\text{ут}})}{Q} \cdot \left(\left(\frac{\lambda_{\Gamma}}{d}\right) (x_k - x_{\text{ут}}) - \xi_{\text{мут1}} \right) \quad (12)$$

представляет собой невязку расчетных значений y_k до и после возникновения утечки на участке трубопровода, включающем место утечки.

Таким образом, при вычислении расчетного значения y_k по формуле (7) до (обозначенного собственно как y_k) и после (обозначенного как y_{pk}) возникновения утечки получим невязку $\delta_k = y_{pk} - y_k$. Далее при известных значениях $\xi_{\text{мут1}}$, $\frac{\lambda_{\Gamma}}{d}$ и $Q_{\text{ут}}$ из выражения (12) возможно оценить координату утечки $x_{\text{ут}}$

Для каждого из следующих за сечением утечки k -тых участков трубопровода невязка будет иметь другую структуру:

$$\delta_k = y_{kp} - y_k = \frac{\pi^2 d^4 (P_{k-1} - P_k - \rho g(z_k - z_{k-1}))}{8\rho(Q - Q_{\text{ут}})^2} - \frac{\pi^2 d^4 (P_{k-1} - P_k - \rho g(z_k - z_{k-1}))}{8\rho Q^2},$$

то есть

$$\delta_k = Q_{\text{ут}} \cdot (Q_{\text{ут}} - 2 \cdot Q) \frac{\pi^2 d^4 (P_{k-1} - P_k - \rho g(z_k - z_{k-1}))}{8\rho Q^2 (Q - Q_{\text{ут}})^2}$$

или в соответствии с (7):

$$\delta_k = \left(\left(\frac{\lambda_{\Gamma}}{d}\right) x_k - \xi_{mk} \right) \frac{Q_{\text{ут}} \cdot (2 \cdot Q - Q_{\text{ут}})}{(Q - Q_{\text{ут}})^2},$$

откуда

$$Q_{\text{ут}} = Q \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{\left(\left(\frac{\lambda_{\Gamma}}{d}\right) x_k + \xi_{mk}\right)}{\left(\left(\frac{\lambda_{\Gamma}}{d}\right) x_k + \xi_{mk}\right) + \delta_k}} \right).$$

Согласно изложенному алгоритм мониторинга состояния процесса перекачки нефти включает шаги:

- идентификации коэффициентов y_k на каждом шаге опроса датчиков давления;
- вычисления невязки предыдущего и последующего шагов опроса и принятия решения об утечке по величине полученных разностей δ_k , выявление k -го участка утечки;
- вычисление $Q_{\text{ут}}$ с использованием (12) для индексов k , отвечающих участкам, которые следуют за участком утечки.
- Вычисления из (12) значения $x_{\text{ут}}$.

Таким образом, точность оценивания $x_{ут}$ зависит от наличия и точности предварительной идентификации значения λ_T и местных сопротивлений ζ_{mi} на этих участках. Ясно, что задача как идентификации λ_T , так и последующего диагностирования (оценивания значения $x_{ут}$) существенно упрощается для "гладких" участков трубопровода (то есть при $\zeta_{mi}=0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мамонова, Т.Е.* Учет геометрического профиля нефтепровода при определении параметров утечки [Электронный ресурс] // Нефтегазовое дело: электрон. науч. журн. 2012. № 2. С. 85-102. Режим доступа: <http://www.ogbus.ru>
2. *Вайншток, С.М.* Трубопроводный транспорт нефти: учебник для вузов: в 2 т. Т.1. / С.М. Вайншток, В.В. Новосёлов, А.Д. Прохоров, А.М. Шаммазов. М.: ООО Недра-Бизнесцентр, 2004.

УДК 378.046.4:51-77

В. А. Голкина

Ярославский государственный технический университет,
Россия, г. Ярославль, e-mail: golkinava@ystu.ru

ПОДХОД К ОЦЕНКЕ КОМПЕТЕНЦИЙ СЛУШАТЕЛЕЙ ПРОГРАММ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Рассматривается метод оценки компетенций слушателей образовательных программ, сформированных по модульному принципу.

Ключевые слова: компетенция, профессиональный модуль, программа дополнительного профессионального образования, оценка компетенций.

V. A. Golkina

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: golkinava@ystu.ru

APPROACH TO THE ASSESSMENT OF COMPETENCE OF LISTENERS OF VOCATIONAL TRAINING PROGRAMS

Author considers the method of an assessment of listener's competences. Educational programs are developed according to the modular principle.

Keywords: competence, professional module, vocational training program, assessment of competences.

Задача обеспечения качества программ дополнительного профессионального образования (ДПО) и процессов их реализации в настоящее время является актуальной для всех образовательных организаций. В результате освоения программ повышения квалификации и/или профессиональной переподготовки слушатели должны приобрести компетенции, установленные при проектировании образовательных программ. В связи с этим одним из оцениваемых показателей качества является степень сформированности компетенций слушателей.

В настоящее время проектируемые программы дополнительного профессионального образования основаны на модульном принципе формирования их структуры и содержания. Компетенции, которые должны быть сформированы у слушателей образовательных программ, формулируются образовательными организациями на основе комплексного анализа требований федерального законодательства, соответствующих федеральных государственных образовательных стандартов среднего профессионального и(или) высшего образования, утвержденных профессиональных стандартов и квалификационных требований, а также требований заказчиков образовательных программ.

Важным отличием программ ДПО от основных профессиональных образовательных программ высшего образования является то, что формирование компетенций слушателей происходит в результате освоения профессиональных модулей, являющихся по сути автономными. Автономность модуля в данном случае означает, что в результате его освоения у слушателя должны быть сформированы определенные компетенции. Разные модули в структуре образовательной программы направлены на формирование у слушателей содержательно разных компетенций (в отличие от программ высшего образования, в рамках которых допускается формирование одной компетенции у обучающихся в результате освоения нескольких учебных дисциплин). Подобная независимость профессиональных модулей в структуре программ ДПО позволяет гибко изменять содержание обучения в соответствии с требованиями конкретного заказчика и облегчает выполнение процедур оценки компетенций слушателей.

Еще одной особенностью системы ДПО является установленная законодательством отмена разграничения дополнительных профессиональных программ по часам. Данная законодательная норма определяет необходимость разработки таких методов оценки компетенций слушателей, которые, с одной стороны, позволяли бы получить адекватную оценку результатов обучения, с другой – не были сложными в применении, а процедуры оценивания не занимали много времени.

В работах [1-3] авторами предложены модели оценивания уровня сформированности компетенций и кластеров компетенций специалиста

машиностроительного профиля, а также проведено моделирование процедуры оценивания уровня социально-профессиональной компетентности специалиста в условиях рынка труда. Решение задач моделирования процедур оценки компетенций приведено на примере основных профессиональных образовательных программ, в рамках которых отдельно взятая компетенция может быть сформирована у обучающегося в результате освоения им нескольких учебных дисциплин. Кроме того, авторами рассматривается случай объединения компетенций в кластеры, что усложняет задачу моделирования оценочных процедур.

Применение предложенного в работах [1-3] подхода к моделированию процедур оценки компетенций слушателей образовательных программ дополнительного профессионального образования является возможным, однако требует упрощения моделей в связи с обозначенными выше особенностями программ ДПО.

При проектировании программ повышения квалификации и/или профессиональной переподготовки образовательная организация должна сформировать компетентностную модель специалиста, а также разработать матрицу взаимосвязи компетенций и профессиональных модулей образовательной программы. Пример формирования матрицы компетенций приведен в таблице 1.

Таблица 1. Матрица взаимосвязи компетенций и профессиональных модулей образовательной программы

Профессиональные модули $ПМ_j, j = \overline{1:m}$	Компетенции $ПК_c, c = \overline{1:l}$					
	$ПК_1$	$ПК_2$	$ПК_3$	$ПК_4$...	$ПК_l$
$ПМ_1$	+	+				
$ПМ_2$			+	+		
...						
$ПМ_m$						+

Профессиональная образовательная программа представляет собой совокупность профессиональных модулей $ПМ_j, j = \overline{1:m}$, в результате освоения которых у обучающихся формируется система компетенций $ПК_c, c = \overline{1:l}$. В результате освоения профессионального модуля $ПМ_j$ у обучающегося должны быть сформированы компетенции $ПК_{cj} \subset КП_c, c = \overline{1:l}, j = \overline{1:m}$.

Содержание каждого модуля может быть представлено системой дидактических единиц. Совокупный уровень освоения профессионального

модуля $ПМ_j, j = \overline{1:m}$, определяется подмножеством дидактических единиц $D_{jg} \subset D_i, i = \overline{1:n}, g = \overline{1:t}$. Система дидактических единиц D_i представляет собой полное содержание образовательной программы.

Для каждой дидактической единицы D_{jg} профессионального модуля экспертным путем может быть установлен уровень значимости α_{jg} , показывающий, в какой степени она влияет на освоение компетенций, формируемых у обучающихся в результате изучения профессионального модуля. При этом $0 \leq \alpha_{jg} \leq 1$ и $\sum_{g=1}^t \alpha_{jg} = 1$. В таблице 2 приведен пример формирования структуры профессионального модуля и взаимосвязи дидактических единиц модуля с соответствующими компетенциями.

Таблица 2. Структура профессионального модуля $ПМ_j$ образовательной программы

Дидактические единицы профессионального модуля D_{jg}	Уровень значимости дидактических единиц α_{jg}	$ПК_1$	$ПК_2$
D_{j1}	0,1	+	
D_{j2}	0,2		+
D_{j3}	0,6	+	
D_{j4}	0,05		+
D_{j5}	0,05	+	

Применим подход к проведению оценочных процедур, предложенный в работе [1] для решения задачи определения уровня освоения профессионального модуля программы повышения квалификации или профессиональной переподготовки следующим образом.

Если для каждого p -го обучающегося уровень освоения q_{pjg} хотя бы одной дидактической единицы D_{jg} , входящей в состав профессионального модуля $ПМ_j, j = \overline{1:m}$ равен нулю ($q_{pjg} = 0$), то целесообразно считать, что профессиональный модуль не освоен. То есть совокупный уровень освоения профессионального модуля $S_{pj} = 0$ (хотя бы при одном значении $g = \overline{1:t}$).

Если отсутствуют значения $q_{pjg} = 0$, то совокупный уровень освоения профессионального модуля S_{pj} определяется по уровню достижения

среднего значения среди всех имеющихся уровней освоения дидактических единиц профессионального модуля:

$$S_{pj} = \frac{\sum_{g=1}^t \alpha_{jg} \cdot q_{pjg}}{t},$$

если $q_{pjg} \neq 0$, при любом значении $g = \overline{1:t}$.

Пусть p -тый обучающийся обладает множеством компетенций, сформированных в результате освоения системы дидактических единиц $D_i, i = \overline{1:n}$, представляющих собой содержание профессиональной образовательной программы. Если уровень освоения q_{pi} системы дидактических единиц D_i меньше установленного порогового значения $q_{pi} < q_i^{\min}$, то дидактические единицы образовательной программы считаем неосвоенными, и уровень освоения образовательной программы q_{pi} принимаем равным нулю.

Согласно подходу предложенному авторами работы [1] определение уровня сформированности компетенций, в результате освоения профессионального модуля, производится следующим образом.

Если для каждого p -го обучающегося уровень освоения q_{pjg} хотя бы одной дидактической единицы D_{jg} , входящей в состав профессионального модуля $ПМ_j, j = \overline{1:m}$ равен нулю ($q_{pjg} = 0$), то целесообразно считать, что компетенция $K_{cj} \subset K_c, c = \overline{1:l}, j = \overline{1:m}$, формирование которой происходит в результате освоения данной дидактической единицы, не сформирована.

Если отсутствуют значения $q_{pjg} = 0$, то совокупный уровень сформированности компетенции K_{cj} определяется по уровню достижения среднего значения среди всех имеющихся уровней освоения $q_{pjg} = 0$ дидактических единиц $D_{jgc} \subset D_{jg}, g = \overline{1:t}, c = \overline{1:l}$, в результате освоения которых формируется данная компетенция:

$$S_{pjc} = \frac{\sum_{g=1}^t \alpha_{jg} \cdot q_{pjg}}{t},$$

если $q_{pjg} \neq 0$, при значениях $g = \overline{1:t}$ дидактических единиц в результате освоения которых формируется компетенция K_{cj} .

Последующей задачей, которая должна быть решена образовательной организацией, является разработка процедур количественной оценки уровня освоения дидактических единиц профессиональных модулей, а также оценки уровня сформированности компетенций и последующего принятия решений о качестве подготовки слушателей образовательных программ в соответствии с обозначенными выше решающими правилами. Очевидно, дальнейшее решение задач моделирования процедур оценки компетенций должно основываться на формировании фондов оценочных средств, содержащих контрольные задания, позволяющие оценить уровень освоения дидактических единиц профессиональных модулей и получить количественную оценку степени сформированности компетенций слушателей образовательных программ.

В настоящее время в ЯГТУ сформулированы принципы проектирования фондов оценочных средств для основных и дополнительных образовательных программ, разработано и введено в действие положение о фондах оценочных средств, проводится обучение профессорско-преподавательского состава процедурам оценки компетенций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозова, А.В.* Формирование модели оценивания уровня сформированности компетенций специалиста машиностроительного профиля / А.В. Киричек, А.В. Морозова // *Фундам. и приклад. проблемы техники и технологии.* 2012. № 2-3 (292). С. 127-133.
2. *Морозова, А.В.* Разработка модели оценивания уровня сформированности кластеров компетенций специалиста машиностроительного профиля / А.В. Киричек, А.В. Морозова // *Фундам. и приклад. проблемы техники и технологии.* 2012. № 2-4 (292). С. 131-137.
3. *Морозова, А.В.* Моделирование процедуры оценивания уровня социально-профессиональной компетентности специалиста машиностроительного профиля в условиях рынка труда / А.В. Киричек, А.В. Морозова // *Фундам. и приклад. проблемы техники и технологии.* 2012. № 2-5 (292). С. 134-142.

Содержание

Предисловие.....	3
------------------	---

МАТЕМАТИКА

1. Бородин А.В. Об одном классе кватернионных алгебраических уравнений.....	5
2. Большаков Ю.И. Некоторые задачи с конечными классификациями в H -унитарных пространствах.....	16
3. Гилемьянов А.И. К вопросу о представлении целых функций обобщенными рядами экспонент.....	23
4. Гой Т.П. О центральных факториальных степенях и некоторых их применениях.....	30
5. Гулевич Н.М. О некоторых результатах Марреро по мере невыпуклости... ..	36
6. Зверкина Г.А. О распределении стационарного времени восстановления.....	39
7. Кузнецов В.О. К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов.....	49
8. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях сшитого тройного цикла.....	54
9. Бородин А.В. Частные и полная вариации функций многих переменных. I....	68

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

10. Борковская И.М., Ловенецкая Е.И., Пыжкова О.Н., Мозырская Д. Уровневые тестовые задания как часть уровневой образовательной технологии.....	83
11. Веригин И.С. Об опыте освоения профессиональных компетенций при изучении студентами-бакалаврами учебной дисциплины «Теплотехника и термодинамика» по программе третьего поколения.....	91
12. Веригин И.С. О математической модели горения твёрдого распыленного топлива в разработке дидактического обеспечения освоения профессиональных компетенций в учебной дисциплине «Теплотехника и термодинамика».....	97
13. Жаров А.Н., Жарова И.Г. Об изложении темы: прогнозирование сезонных изменений.....	103
14. Иванова Н.И. О некоторых методах доказательства неравенств.....	111
15. Капранова А.Б., Зайцев А.И. Проблема построения границы выпуклого многоугольника.....	117
16. Коломоец А.А., Тупикова Е.В. Методы решения задач на собственные значения.....	129
17. Кузнецов В.О. Об элементарных и неэлементарных функциях.....	133
18. Оленикова Ю.К. Математические олимпиады и образование.....	138
19. Попов А.И., Пучков Н.П. Изучение креативности студента в олимпиадном движении по математике.....	154
20. Ройтенберг В.Ш. Теорема о неявной функции в курсе математики для инженеро-в	159
21. Трофимец Е.Н., Трофимец В.Я. Формирование профессиональных компетенций экономиста средствами икт на занятиях по математике....	167

22. Цыганков М.П., Игнатьев А.В. Выполнение расчетных задач в универсальных и специализированных средах программирования.....	172
23. Донцов В.В. Преподавание математики в университетах и колледжах Канады: взгляд изнутри.....	177

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

24. Балушкин А.Л. Особенности построения математических моделей армированных стержневых конструкций.....	187
25. Жаров А.Н., Козлов Г.Е. Прогнозирование структуры и численности населения Ярославской области до 2025 года.....	195
26. Зайнуллин Р.Г. Об одном аналитическом подходе к решению одномерной задачи теплообмена с подвижными границами.....	203
27. Иванов П.А. Составные фильтры в задачах различения изображений, подвернутых преобразованиям геометрии.....	212
28. Колбнева Н.Ю. Излучение электромагнитных волн незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле.....	220
29. Колесников О.Н. Определение статистической ошибки измерения при принятии экспертного решения.....	223
30. Кондратьева А.В., Белоножко Д.Ф. О методике расчета спектра волнового движения в тонком заряженном жидком слое, покрытом пленкой поверхностно-активного вещества.....	229
31. Королев Л.В., Быгев Д.О. Коэффициент пропускания сорбирующей среды с супердиффузионными каналами.....	234
32. Очиров А.А., Белоножко Д.Ф. О методике расчета волнового дрейфа, возникающего на поверхности раздела двух жидкостей.....	238
33. Петрушов Н.А. Нелинейный расчет электрического поля заряженной капли, левитирующей в электростатическом подвесе.....	244
34. Цыганков М.П., Кузьмин В.В. Диагностирование утечек на магистральных трубопроводах с местными сопротивлениями.....	249
35. Голкина В.А. Подход к оценке компетенций слушателей программ дополнительного профессионального образования.....	256

Научное издание

**МАТЕМАТИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
ОБРАЗОВАНИЕ**

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 9

Ответственный редактор Ю.К. Оленикова

Редактор М.А. Канакотина

Подписано в печать 31.08.14. Формат 60x84 1/16. Бумага белая.

Гарнитура Таймс. Офсетная печать

Усл. печ.л. 15,34. Уч.-издл. 15,32. Тираж 65. Заказ .

Ярославский государственный технический университет
152023, Ярославль, Московский пр., 88

Типография Ярославского государственного технического университета
150000, Ярославль, ул. Советская, 14а